1

Sobre un método de obtención de morfismos $\hat{g}_{(w_i,\, w_k)}: ((\mathcal{L}_i, \sqsubseteq^{w_i}, \sqcap^{w_i}, \sqcup^{w_i}, W_i, W_i^{c}), {}'^{i}) \to ((\mathcal{L}_k, \sqsubseteq^{w_k}, \sqcap^{w_k}, \sqcup^{w_k}, W_k, W_k^{c}), {}'^{k})$ ***entre álgebras asociadas a ciertas familias*** $(\sqsubseteq^{w_j})_{j\in J}$ ***de "inclusiones generalizadas" en retículos distributivos con negación y sobre sus posibles interpretaciones.***

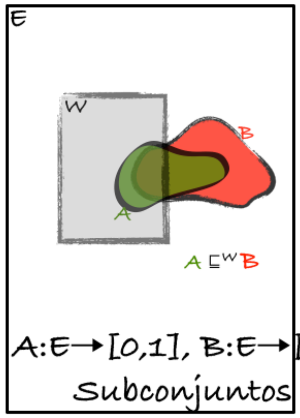
R. Fuentes-González

Grupo de Investigación: "Adquisición de conocimiento y minería de datos, funciones especiales y métodos numéricos avanzados". Universidad Pública de Navarra.

Harmonic,
Grazalema
Noviembre 2019

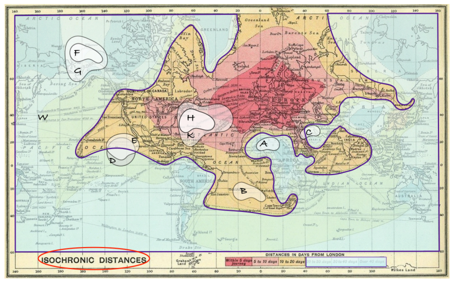
Interpretación de los órdenes de actividad entre como nuevas inclusiones entre subconjuntos ordinarios o borrosos.

(Harmonic 2017)



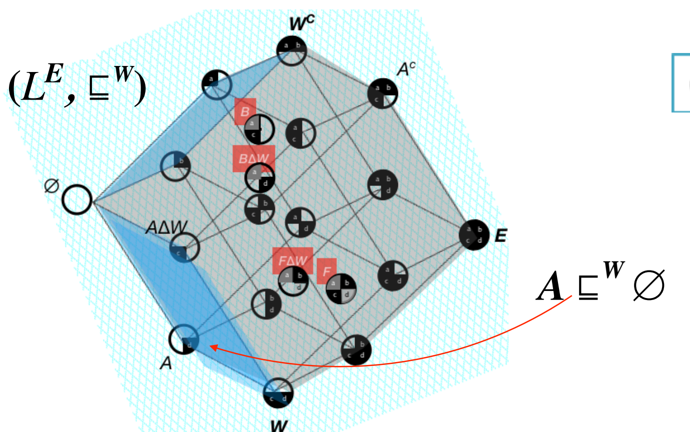
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow$

$(B \cdot W \leq A \leq B + W)$

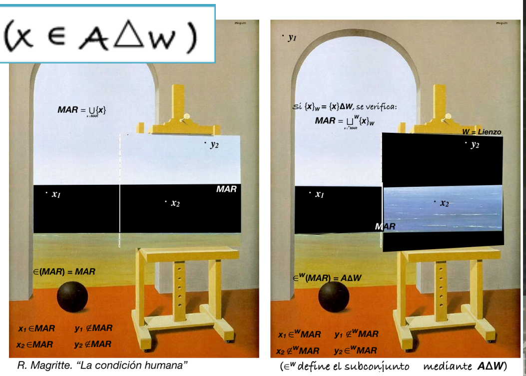


Una interpretación del contenido del vacío ∅ mediante los órdenes de actividad entre subconjuntos nítidos o borrosos.

(Harmonic 2018)



$(x \in^W A) \Leftrightarrow (x \in A \triangle W)$



Sobre un método de obtención de morfismos $\hat{g}_{(w_i,\, w_k)}$: $((\mathcal{L}_i, \sqsubseteq^{w_i}, \sqcap^{w_i}, \sqcup^{w_i}, W_i, W_i^{c}), '_i) \to ((\mathcal{L}_k, \sqsubseteq^{w_k}, \sqcap^{w_k}, \sqcup^{w_k}, W_k, W_k^{c}), '_k)$ entre álgebras asociadas a ciertas familias $(\sqsubseteq^{w_j})_{j\in J}$ de "inclusiones generalizadas " en retículos distributivos con negación y sobre sus posibles interpretaciones.

Sobre un método de obtención de morfismos $\hat{g}_{(w_i,\, w_k)}$: $((\mathcal{L}_i, \sqsubseteq^{w_i}, \sqcap^{w_i}, \sqcup^{w_i}, W_i, W_i^{\,c}), {}'_i) \rightarrow ((\mathcal{L}_k, \sqsubseteq^{w_k}, \sqcap^{w_k}, \sqcup^{w_k}, W_k, W_k^{\,c}), {}'_k)$ ***entre álgebras asociadas a ciertas familias*** $(\sqsubseteq^{w_j})_{j\in J}$ ***de "inclusiones generalizadas" en retículos distributivos con negación y sobre sus posibles interpretaciones.***

$$g : ((\mathcal{L}_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), {}'_1) \;\longrightarrow\; ((\mathcal{L}_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), {}'_2)$$

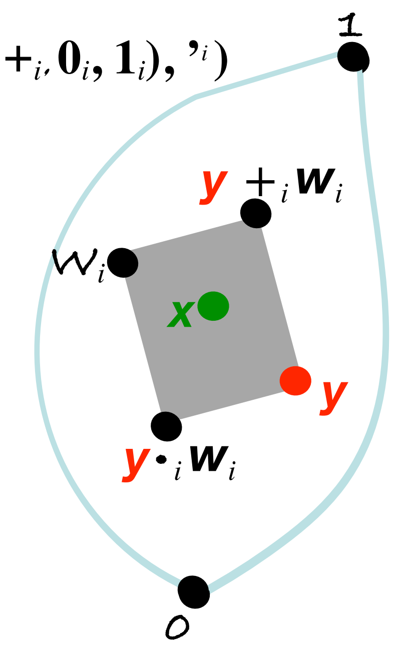
Sobre un método de obtención de morfismos $\hat{g}_{(w_i,\, w_k)}$: $((\mathcal{L}_i, \sqsubseteq^{w_i}, \sqcap^{w_i}, \sqcup^{w_i}, W_i, W_i^{\,c}), '_i) \rightarrow ((\mathcal{L}_k, \sqsubseteq^{w_k}, \sqcap^{w_k}, \sqcup^{w_k}, W_k, W_k^{\,c}), '_k)$ ***entre álgebras asociadas a ciertas familias*** $(\sqsubseteq^{w_j})_{j\in J}$ ***de "inclusiones generalizadas " en retículos distributivos con negación y sobre sus posibles interpretaciones.***

$$g : ((\mathcal{L}_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1) \rightarrow ((\mathcal{L}_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2)$$

$$x \sqsubseteq^{w_i} y \Leftrightarrow$$

$$(y \cdot_i w_i \leq_i x \leq_i y +_i w_i)$$

$i=1,\, 2$



Sobre un método de obtención de morfismos $\hat{g}_{(w_i,\, w_k)}$: $((\mathcal{L}_i, \sqsubseteq^{w_i}, \sqcap^{w_i}, \sqcup^{w_i}, W_i, W_i^{c}), {}'^{i}) \rightarrow ((\mathcal{L}_k, \sqsubseteq^{w_k}, \sqcap^{w_k}, \sqcup^{w_k}, W_k, W_k^{c}), {}'^{k})$ entre álgebras asociadas a ciertas familias $(\sqsubseteq^{w_j})_{j\in J}$ de "inclusiones generalizadas" en retículos distributivos con negación y sobre sus posibles interpretaciones.

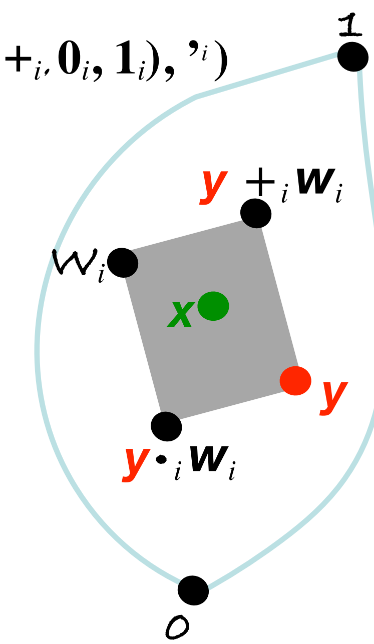
$$g : ((\mathcal{L}_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), {}'_1) \rightarrow ((\mathcal{L}_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), {}'_2)$$

$$x \sqsubseteq^{w_i} y \Leftrightarrow$$

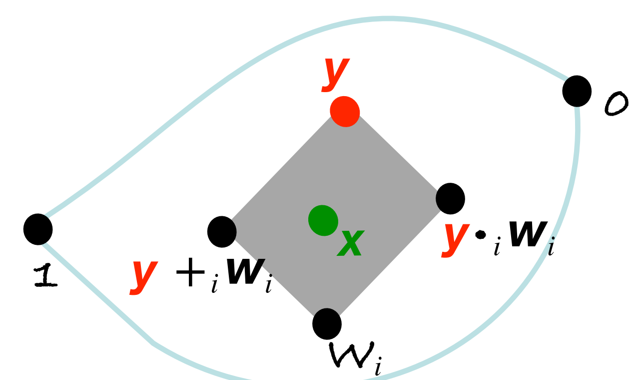
$$(y \cdot_i w_i \leq_i x \leq_i y +_i w_i)$$

$i=1, 2$

$((\mathcal{L}_i, \leq_i, \bullet_i, +_i, 0_i, 1_i), {}'_i)$



Si $w_i{}'^{i} = w_i^{c}$:



$((\mathcal{L}_i, \sqsubseteq^{w_i}, \sqcap^{w_i}, \sqcup^{w_i}, W_i, W_i^{c}), {}'_i)$

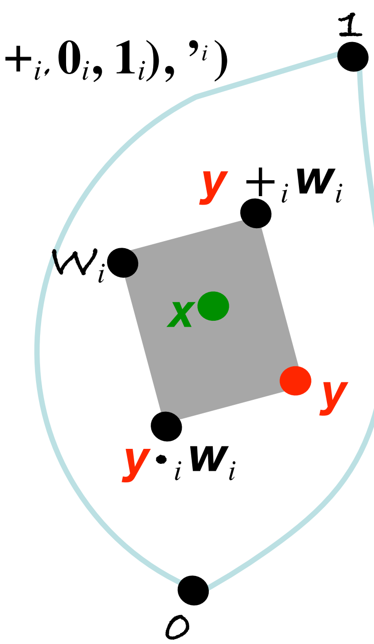
$$((\mathcal{L}_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, W_1, W_1^{c}), {}'_1) \qquad ((\mathcal{L}_2, \sqsubseteq^{w_2} \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, W_2, W_2^{c}), {}'_2)$$

Sobre un método de obtención de morfismos $\hat{g}_{(w_i,\, w_k)}$: $((\mathcal{L}_i, \sqsubseteq^{w_i}, \sqcap^{w_i}, \sqcup^{w_i}, W_i, W_i^{c}), {'}_i) \to ((\mathcal{L}_k, \sqsubseteq^{w_k}, \sqcap^{w_k}, \sqcup^{w_k}, W_k, W_k^{c}), {'}_k)$ ***entre álgebras asociadas a ciertas familias*** $(\sqsubseteq^{w_j})_{j\in J}$ ***de "inclusiones generalizadas" en retículos distributivos con negación y sobre sus posibles interpretaciones.***

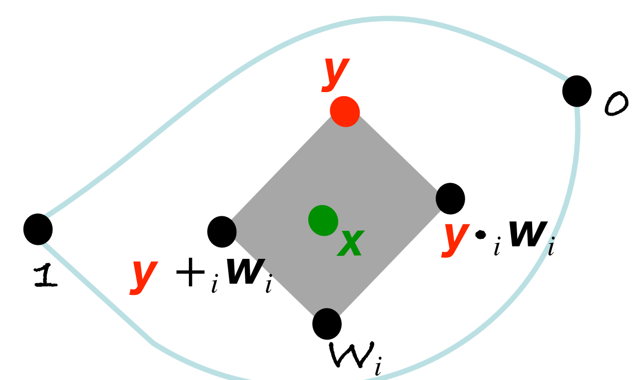
$$g : ((\mathcal{L}_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), {'}_1) \longrightarrow ((\mathcal{L}_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), {'}_2)$$

Extensión

$((\mathcal{L}_i, \leq_i, \bullet_i, +_i, 0_i, 1_i), {'}_i)$



Si $w_i{'}_i = w_i^c$:



$((\mathcal{L}_i, \sqsubseteq^{w_i}, \sqcap^{w_i}, \sqcup^{w_i}, W_i, W_i^{c}), {'}_i)$

$$x \sqsubseteq^{w_i} y \Leftrightarrow$$

$$(y \cdot_i w_i \leq_i x \leq_i y +_i w_i)$$

i=1, 2

?

$$\hat{g}_{(w_1, w_2)} : ((\mathcal{L}_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, W_1, W_1^{c}), {'}_1) \longrightarrow ((\mathcal{L}_2, \sqsubseteq^{w_2} \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, W_2, W_2^{c}), {'}_2)$$

RESUMEN

RESUMEN

Introducción: El orden de actividad en retículos distributivos y su interpretación .

RESUMEN

<u>Introducción</u>: El orden de actividad en retículos distributivos y su interpretación .

En primer lugar, en el marco de las álgebras $((\mathcal{L}_i, \leq_i, \cdot_i, +_i, 0_i, 1_i), {}'^{i})$ $i=1,2$, determinadas por retículos distributivos con negaciones fuertes, se propone la <u>extensión de relaciones</u> entre dos de ellas $R \subseteq \mathcal{L}_1 X \mathcal{L}_2$, a otras $\hat{R}_{(w1,w2)} \subseteq \mathcal{L}_1 X \mathcal{L}_2$ entre los mismos retículos, pero considerados ahora en el marco de las álgebras $((\mathcal{L}_i, \sqsubseteq^{w_i}, \sqcap^{w_i}, \sqcup^{w_{i_1}}, w_i, w_i^c), {}'^{i})$ $i=1,2$; isomorfas a las anteriores y determinadas por los órdenes de activad $(\sqsubseteq^{w_i})_{i=1,2}$: $(x \sqsubseteq^{w_i} y) \Leftrightarrow [(y \cdot_i w_i) \leq_i x \leq_i (y +_i w_i)]$ asociados a elementos complementados $w_i \in \mathcal{L}_i$ tales que $w_i'^{i} = w_i^c$.

RESUMEN

Introducción: El orden de actividad en retículos distributivos y su interpretación .

En primer lugar, en el marco de las álgebras $((\mathcal{L}_i, \leq_i, \cdot_i, +_i, 0_i, 1_i), '^i)$ $i=1,2$, determinadas por retículos distributivos con negaciones fuertes, se propone la extensión de relaciones entre dos de ellas $R \subseteq \mathcal{L}_1 X \mathcal{L}_2$, a otras $\hat{R}_{(w1,w2)} \subseteq \mathcal{L}_1 X \mathcal{L}_2$ entre los mismos retículos, pero considerados ahora en el marco de las álgebras $((\mathcal{L}_i, \sqsubseteq^{w_i}, \sqcap^{w_i}, \sqcup^{w_{i1}}, w_i, w_i^c), '^i)$ $i=1,2$; isomorfas a las anteriores y determinadas por los órdenes de activad $(\sqsubseteq^{w_i})_{i=1,2}$: $(x \sqsubseteq^{w_i} y) \Leftrightarrow [(y \cdot_i w_i) \leq_i x \leq_i (y +_i w_i)]$ asociados a elementos complementados $w_i \in \mathcal{L}_i$ tales que $w_i'^i = w_i^c$.

Después y como motivo principal en este trabajo, se aplica la extensión anterior en el caso particular en el que la relación R es una función g, obteniendo ahora nuevos morfismos $\hat{g}_{(w1,w2)}: ((\mathcal{L}_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '^1) \rightarrow ((\mathcal{L}_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '^2)$ a partir de otros $g: ((\mathcal{L}_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '^1) \rightarrow ((\mathcal{L}_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '^2)$ en las mismas circunstancias que en el caso general de relaciones $R \subseteq \mathcal{L}_1 X \mathcal{L}_2$.

RESUMEN

Introducción: El orden de actividad en retículos distributivos y su interpretación .

En primer lugar, en el marco de las álgebras $((\mathcal{L}_i, \leq_i, \cdot_i, +_i, 0_i, 1_i), '^i)$ $i=1,2$, determinadas por retículos distributivos con negaciones fuertes, se propone la extensión de relaciones entre dos de ellas $R\subseteq\mathcal{L}_1\times\mathcal{L}_2$, a otras $\hat{R}_{(w1,w2)}\subseteq\mathcal{L}_1\times\mathcal{L}_2$ entre los mismos retículos, pero considerados ahora en el marco de las álgebras $((\mathcal{L}_i, \sqsubseteq^{w_i}, \sqcap^{w_i}, \sqcup^{w_{i1}}, w_i, w_i^{c}), '^i)$ $i=1,2$; isomorfas a las anteriores y determinadas por los órdenes de activad $(\sqsubseteq^{w_i})_{i=1,2}$: $(x \sqsubseteq^{w_i} y) \Leftrightarrow [(y \cdot_i w_i) \leq_i x \leq_i (y +_i w_i)]$ asociados a elementos complementados $w_i\in\mathcal{L}_i$ tales que $w_i'^{i} = w_i^{c}$.

Después y como motivo principal en este trabajo, se aplica la extensión anterior en el caso particular en el que la relación R es una función g, obteniendo ahora nuevos morfismos $\hat{g}_{(w1,w2)}:((\mathcal{L}_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^{c}), '^1) \rightarrow ((\mathcal{L}_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^{c}), '^2)$ a partir de otros $g:((\mathcal{L}_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '^1) \rightarrow ((\mathcal{L}_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '^2)$ en las mismas circunstancias que en el caso general de relaciones $R\subseteq\mathcal{L}_1\times\mathcal{L}_2$.

Posteriormente, se prueba que esta extensión es coherente, ya que las nuevas aplicaciones $\hat{g}_{(w1,w2)}: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$, verifican propiedades análogas a las que cumplen las iniciales $g: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$, (tales como isotonía, homomorfismo para las leyes SUP e INF de los retículos, etc...).

También se prueba esa coherencia analizando la relación entre la extensión $(g\circ h)_{(w1,w3)}$ de la composición $(g\circ h)$ de dos de esos morfismos de partida, con la composición $\hat{g}_{(w1,w2)}\circ\hat{h}_{(w2,w3)}$ de sus extensiones respectivas.

RESUMEN

Introducción: El orden de actividad en retículos distributivos y su interpretación .

En primer lugar, en el marco de las álgebras $((\mathcal{L}_i, \leq_i, \cdot_i, +_i, 0_i, 1_i), '^{i})$ $i=1,2$, determinadas por retículos distributivos con negaciones fuertes, se propone la extensión de relaciones entre dos de ellas $R\subseteq \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$, a otras $\hat{R}_{(w1,w2)} \subseteq \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$ entre los mismos retículos, pero considerados ahora en el marco de las álgebras $((\mathcal{L}_i, \sqsubseteq^{w_i}, \sqcap^{w_i}, \sqcup^{w_i1}, w_i, w_i^{c}), '^{i})$ $i=1,2$; isomorfas a las anteriores y determinadas por los órdenes de activad $(\sqsubseteq^{w_i})_{i=1,2}$: $(x \sqsubseteq^{w_i} y) \Leftrightarrow [(y \cdot_i w_i) \leq_i x \leq_i (y +_i w_i)]$ asociados a elementos complementados $w_i \in \mathcal{L}_i$ tales que $w_i'^{i} = w_i^{c}$.

Después y como motivo principal en este trabajo, se aplica la extensión anterior en el caso particular en el que la relación R es una función g, obteniendo ahora nuevos morfismos $\hat{g}_{(w1,w2)}: ((\mathcal{L}_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^{c}), '^{1}) \to ((\mathcal{L}_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^{c}), '^{2})$ a partir de otros $g: ((\mathcal{L}_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '^{1}) \to ((\mathcal{L}_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '^{2})$ en las mismas circunstancias que en el caso general de relaciones $R\subseteq \mathcal{L}_1 \times \mathcal{L}_2$.

Posteriormente, se prueba que esta extensión es coherente, ya que las nuevas aplicaciones $\hat{g}_{(w1,w2)}: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$, verifican propiedades análogas a las que cumplen las iniciales $g: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$, (tales como isotonía, homomorfismo para las leyes SUP e INF de los retículos, etc…).

También se prueba esa coherencia analizando la relación entre la extensión $(g \circ h)_{(w1,w3)}$ de la composición $(g \circ h)$ de dos de esos morfismos de partida, con la composición $\hat{g}_{(w1,w2)} \circ \hat{h}_{(w2,w3)}$ de sus extensiones respectivas.

Por último, en esta línea de justificación de las definiciones, se prueba que las "intersecciones y uniones generalizadas": $\sqcap^{w_i}$ y $\sqcup^{w_i}$ son las extensiones de las de partida: $(\cdot_i)$ y $(+_i)$.

RESUMEN

<u>Introducción</u>: El orden de actividad en retículos distributivos y su interpretación .

En primer lugar, en el marco de las álgebras $((\mathcal{L}_i, \leq_i, \cdot_i, +_i, 0_i, 1_i), '^i)$ $i=1,2$, determinadas por retículos distributivos con negaciones fuertes, se propone la <u>extensión de relaciones</u> entre dos de ellas $R\subseteq\mathcal{L}_1 X \mathcal{L}_2$, a otras $\hat{R}_{(w1,w2)}\subseteq\mathcal{L}_1 X \mathcal{L}_2$ entre los mismos retículos, pero considerados ahora en el marco de las álgebras $((\mathcal{L}_i, \sqsubseteq^{w_i}, \sqcap^{w_i}, \sqcup^{w_{i1}}, W_i, W_i^c), '^i)$ $i=1,2$; isomorfas a las anteriores y determinadas por los órdenes de activad $(\sqsubseteq^{w_i})_{i=1,2}$: $(x \sqsubseteq^{w_i} y) \Leftrightarrow [(y \cdot_i w_i) \leq_i x \leq_i (y +_i w_i)]$ asociados a elementos complementados $W_i \in \mathcal{L}_i$ tales que $w_i'^i = w_i^c$.

Después y como motivo principal en este trabajo, se aplica la extensión anterior en el caso particular en el que la relación R es una función g, obteniendo ahora <u>nuevos morfismos</u> $\hat{g}_{(w1,w2)}:((\mathcal{L}_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, W_1, W_1^c), '^1) \rightarrow ((\mathcal{L}_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, W_2, W_2^c), '^2)$ a partir de otros $g:((\mathcal{L}_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '^1) \rightarrow ((\mathcal{L}_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '^2)$ en las mismas circunstancias que en el caso general de relaciones $R\subseteq\mathcal{L}_1 X \mathcal{L}_2$.

Posteriormente, se prueba que <u>esta extensión es coherente</u>, ya que las nuevas aplicaciones $\hat{g}_{(w1,w2)}: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$, verifican propiedades análogas a las que cumplen las iniciales $g: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$, (tales como isotonía, homomorfismo para las leyes SUP e INF de los retículos, etc...).

También se prueba esa coherencia analizando la relación entre la extensión $(g\circ h)_{(w1,w3)}$ de la composición $(g\circ h)$ de dos de esos morfismos de partida, con la composición $\hat{g}_{(w1,w2)}\circ\hat{h}_{(w2,w3)}$ de sus extensiones respectivas.

Por último, en esta línea de justificación de las definiciones, se prueba que las "<u>intersecciones y uniones generalizadas</u>": $\sqcap^{w_i}$ y $\sqcup^{w_i}$ son las extensiones de las de partida: $(\cdot_i)$ y $(+_i)$.

En segundo lugar, se ilustra la aplicación de este proceso de extensión de morfismos en los siguientes campos:

- Obtención de filtros en Morfología Matemática sobre retículos distributivos $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, W, W^c)$ con una negación fuerte y w tal que $w'=w^c$. En particular, se trata los casos $\mathcal{L}=P(E)$ y $\mathcal{L}=L^E$ de las imágenes nítidas y borrosas de un referencial E.
- Se presenta una interpretación de las extensiones $Int_{(w,w)}$, $Cl_{(w,w)}$, $Fr_{(w,w)}$, etc..., de las aplicaciones usuales: Int (interior), Cl (clausura), Fr (frontera), etc..., que aparecen en Topología.
- Para los morfismos iniciales $g:((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ') \rightarrow (([0,1], \leq, min, max, 0, 1), ')$, $x'=1-x$ $\forall x\in[0,1]$, se estudia las extensiones del tipo: $\hat{g}_{(w,0)}:((\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, W, W^c), ') \rightarrow (([0,1], \leq, min, max, 0, 1), ')$ para un $w\in\mathcal{L}$ cualquiera. En particular, para $\mathcal{L}=P(E)$ se incluye en este caso funciones de probabilidad $g(A)=Pro(A)$ $\forall A\in P(E)$.

RESUMEN

Introducción: El orden de actividad en retículos distributivos y su interpretación.

En primer lugar, en el marco de las álgebras $((\mathcal{L}_i, \leq_i, \cdot_i, +_i, 0_i, 1_i), '^i)$ $i=1,2$, determinadas por retículos distributivos con negaciones fuertes, se propone la extensión de relaciones entre dos de ellas $R \subseteq \mathcal{L}_1 X \mathcal{L}_2$, a otras $\hat{R}_{(w1,w2)} \subseteq \mathcal{L}_1 X \mathcal{L}_2$ entre los mismos retículos, pero considerados ahora en el marco de las álgebras $((\mathcal{L}_i, \sqsubseteq^{w_i}, \sqcap^{w_i}, \sqcup^{w_i}, W_i, W_i^c), '^i)$ $i=1,2$; isomorfas a las anteriores y determinadas por los órdenes de activad $(\sqsubseteq^{w_i})_{i=1,2}$: $(x \sqsubseteq^{w_i} y) \Leftrightarrow [(y \cdot_i w_i) \leq_i x \leq_i (y +_i w_i)]$ asociados a elementos complementados $W_i \in \mathcal{L}_i$ tales que $w_i'^i = w_i^c$.

Después y como motivo principal en este trabajo, se aplica la extensión anterior en el caso particular en el que la relación R es una función g, obteniendo ahora nuevos morfismos $\hat{g}_{(w1,w2)}: ((\mathcal{L}_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, W_1, W_1^c), '^1) \to ((\mathcal{L}_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, W_2, W_2^c), '^2)$ a partir de otros $g: ((\mathcal{L}_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '^1) \to ((\mathcal{L}_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '^2)$ en las mismas circunstancias que en el caso general de relaciones $R \subseteq \mathcal{L}_1 X \mathcal{L}_2$.

Posteriormente, se prueba que esta extensión es coherente, ya que las nuevas aplicaciones $\hat{g}_{(w1,w2)}: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$, verifican propiedades análogas a las que cumplen las iniciales $g: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$, (tales como isotonía, homomorfismo para las leyes SUP e INF de los retículos, etc...).

También se prueba esa coherencia analizando la relación entre la extensión $(g \circ h)_{(w1,w3)}$ de la composición $(g \circ h)$ de dos de esos morfismos de partida, con la composición $\hat{g}_{(w1,w2)} \circ \hat{h}_{(w2,w3)}$ de sus extensiones respectivas.

Por último, en esta línea de justificación de las definiciones, se prueba que las "intersecciones y uniones generalizadas": $\sqcap^{w_i}$ y $\sqcup^{w_i}$ son las extensiones de las de partida: $(\cdot_i)$ y $(+_i)$.

En segundo lugar, se ilustra la aplicación de este proceso de extensión de morfismos en los siguientes campos:

- Obtención de filtros en Morfología Matemática sobre retículos distributivos $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, W, W^c)$ con una negación fuerte y w tal que $w'=w^c$. En particular, se trata los casos $\mathcal{L}=P(E)$ y $\mathcal{L}=L^E$ de las imágenes nítidas y borrosas de un referencial E.
- Se presenta una interpretación de las extensiones $Int_{(w,w)}$, $Cl_{(w,w)}$, $Fr_{(w,w)}$, etc..., de las aplicaciones usuales: Int (interior), Cl (clausura), Fr (frontera), etc..., que aparecen en Topología.
- Para los morfismos iniciales $g: ((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ') \to (([0,1], \leq, min, max, 0, 1), ')$, $x'=1-x$ $\forall x \in [0,1]$, se estudia las extensiones del tipo: $\hat{g}_{(w,0)}: ((\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, W, W^c), ') \to (([0,1], \leq, min, max, 0, 1), ')$ para un $w \in \mathcal{L}$ cualquiera. En particular, para $\mathcal{L}=P(E)$ se incluye en este caso funciones de probabilidad $g(A)=Pro(A)$ $\forall A \in P(E)$.

Finalmente, se apunta cual sería la utilidad de la teoría aquí introducida, con un esbozo de como podría incorporarse en un ejemplo de un sistema de gestión de datos basado en subconjuntos.

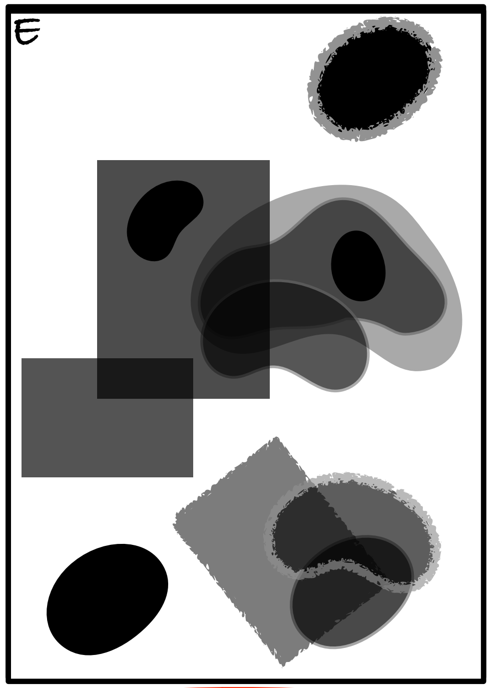
Antecedentes: interpretación de familias $(\sqsubseteq^W)_{W \in K}$ de órdenes de actividad como inclusiones alternativas en retículos del tipo $\mathcal{P}(E)$ o L^E

Introducción:

Dos representaciones usuales de las imágenes:

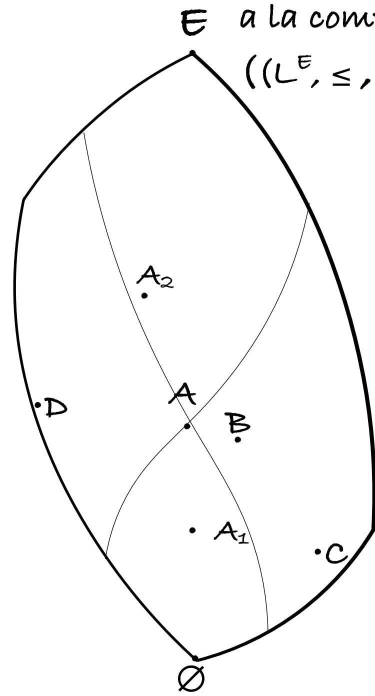
Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos

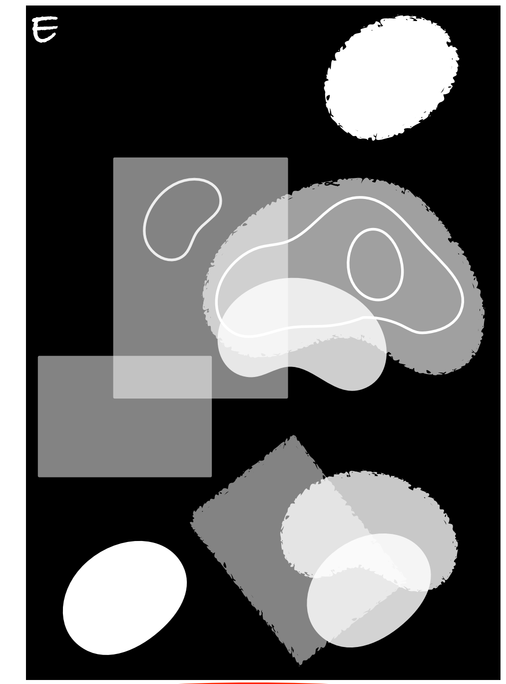
$\emptyset \leq E,\ A \leq E,\ B \leq E, \ldots ,\ E \leq E$



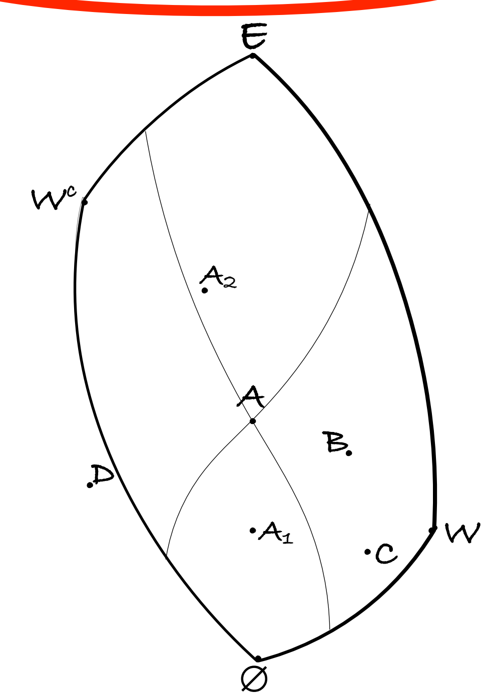
Por ejemplo:
Subconjuntos borrosos

Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$





o Imágenes digitalizadas

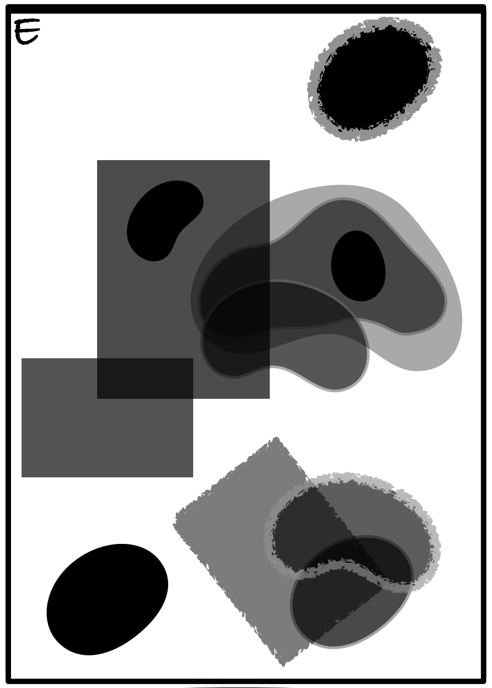


Introducción:

Dos representaciones usuales de las imágenes:

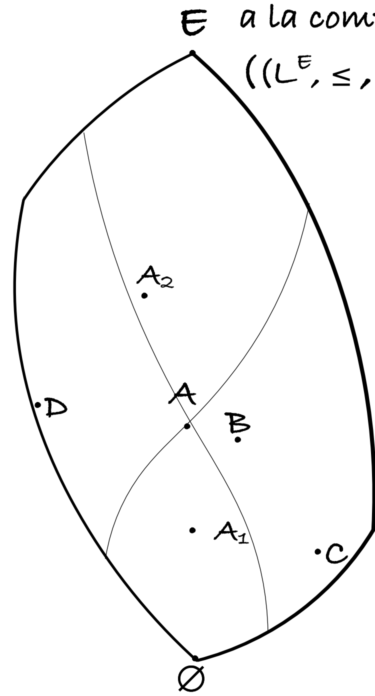
Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos

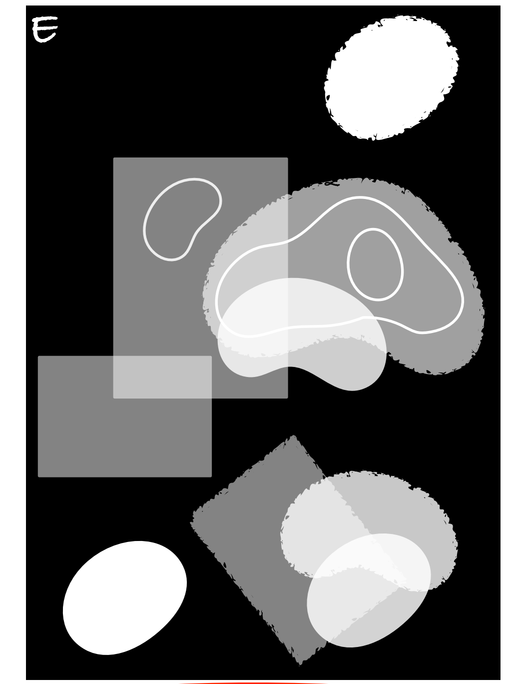
$\emptyset \le E,\ A \le E,\ B \le E, \ldots,\ E \le E$



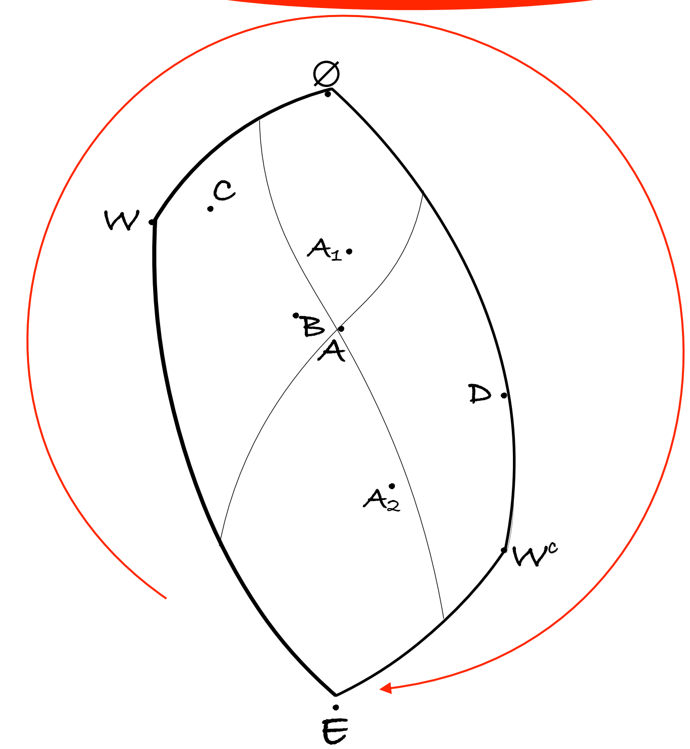
Por ejemplo:
Subconjuntos borrosos

Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \le, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$





o Imágenes digitalizadas

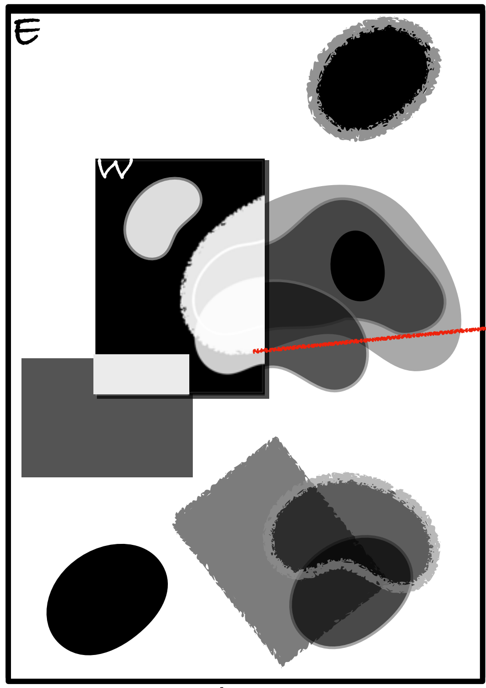


Sistema algebraico:
Retículo distributivo dual con la misma negación fuerte
$((L^E, \ge, +, \cdot, E, \emptyset), ', ^c)$

Introducción:

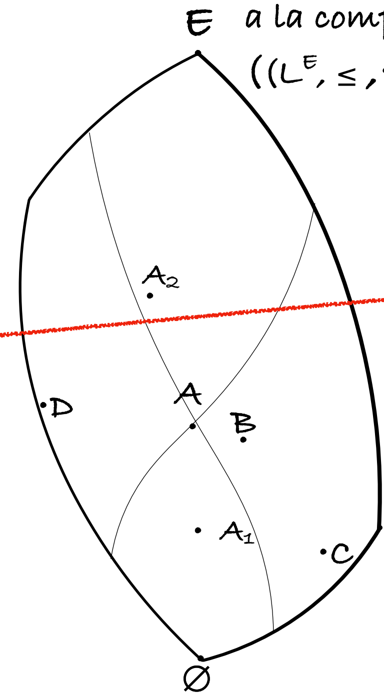
Dos representaciones usuales de las imágenes:

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos
$\emptyset \leq E$, $A \leq E$, $B \leq E, \ldots, E \leq E$

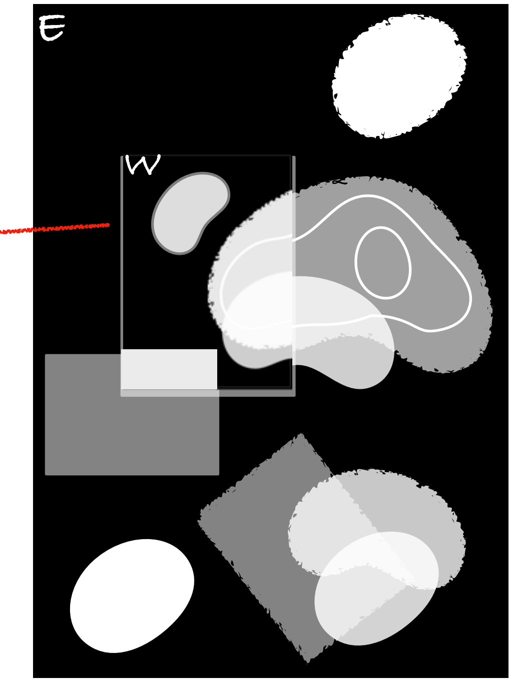


Por ejemplo:
Subconjuntos borrosos.
mezclados con
imágenes digitalizadas

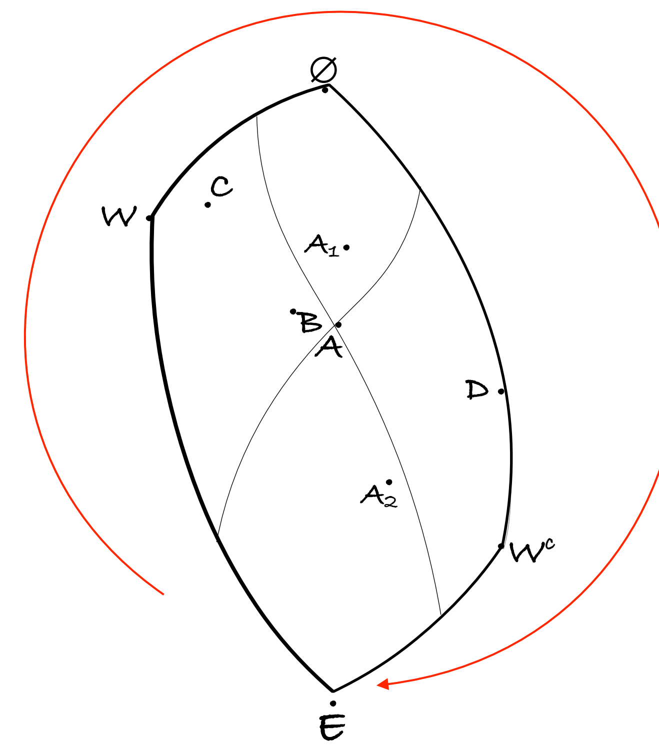
Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$



Se generaliza y otras nuevas representaciones aparecen:
W subconjunto nítido ($W' = W^c$),
distinguido por alguna razón.



o Imágenes digitalizadas



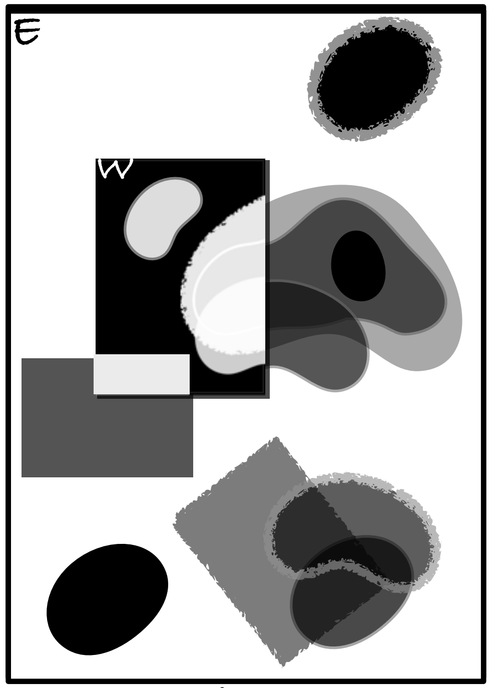
Sistema algebraico:
Retículo distributivo dual con la misma negación fuerte
$((L^E, \geq, +, \cdot, E, \emptyset), ', ^c)$

Introducción:

Dos representaciones usuales de las imágenes:

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos

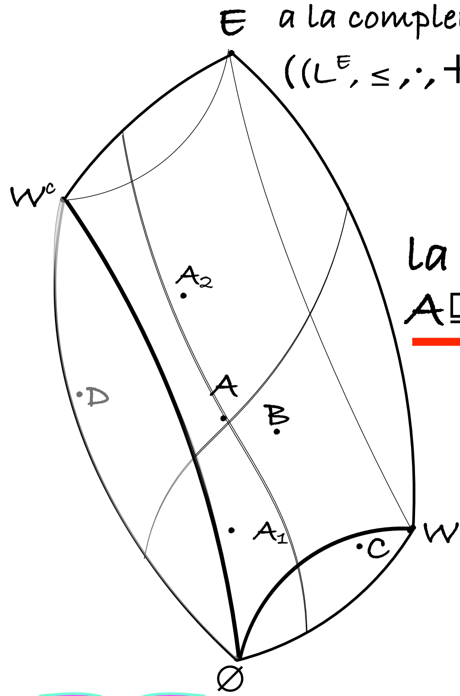
$\varnothing \leq E,\ A \leq E,\ B \leq E, \ldots,\ E \leq E$



Por ejemplo:
Subconjuntos borrosos

mezclados con imágenes digitalizadas

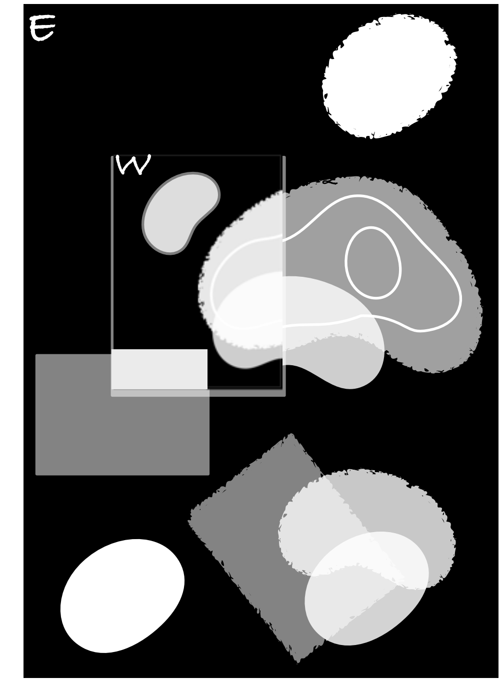
Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E), ', ^c)$



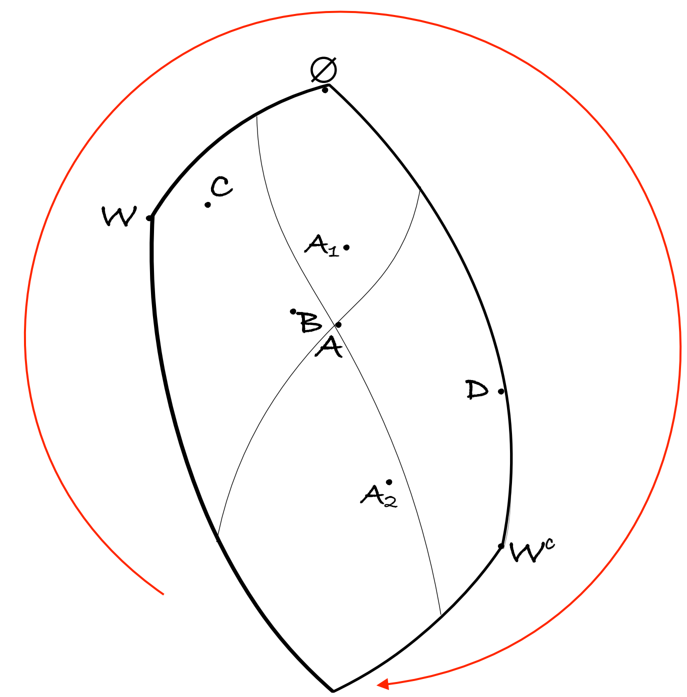
$\varphi_W(S) = S \Delta W$

Se generaliza y otras nuevas representaciones aparecen:
W subconjunto nítido ($W' = W^c$), distinguido por alguna razón.

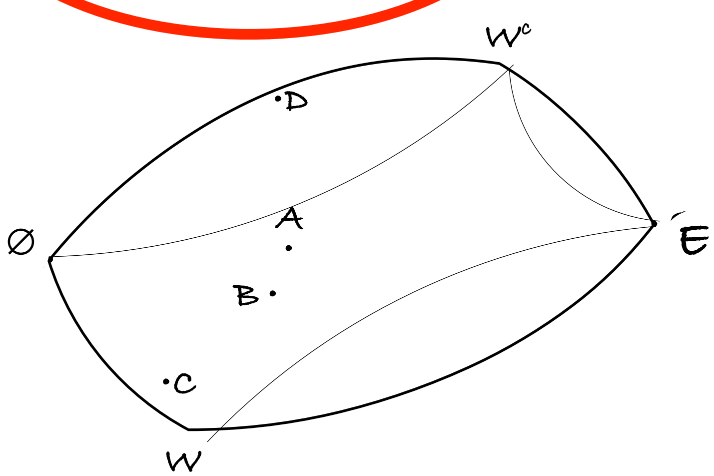
la nueva "inclusión" asociada al nítido W:
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W) \Leftrightarrow (A \triangle W \leq B \triangle W)$.



o Imágenes digitalizadas



Sistema algebraico:
Retículo distributivo dual con la misma negación fuerte
$((L^E, \geq, +, \cdot, E, \varnothing), ', ^c)$



"Perspectiva"

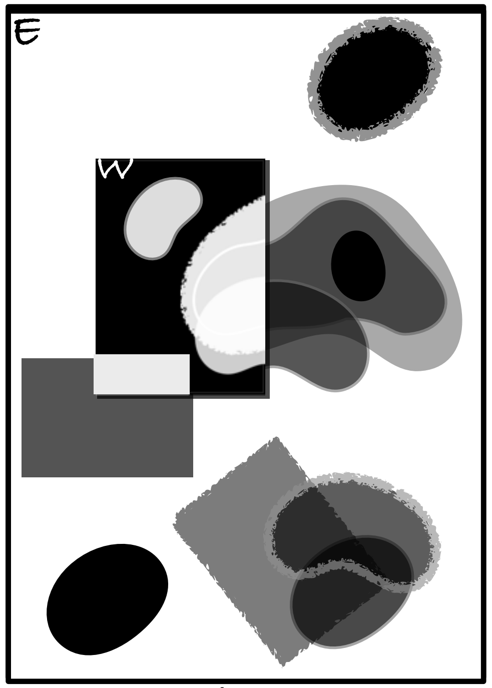
Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $\boxed{A \longrightarrow \varphi_W(A) = A \Delta W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)}$

Introducción:

Dos representaciones usuales de las imágenes:

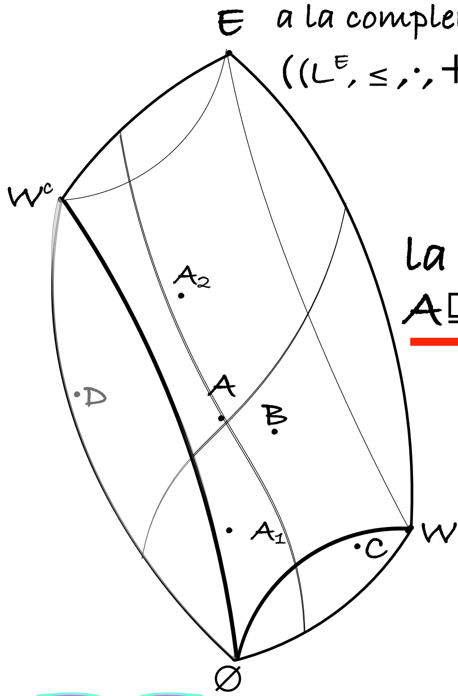
Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos

$\emptyset \le E,\ A \le E,\ B \le E, \dots,\ E \le E$



Por ejemplo:
Subconjuntos borrosos.
mezclados con
imágenes digitalizadas

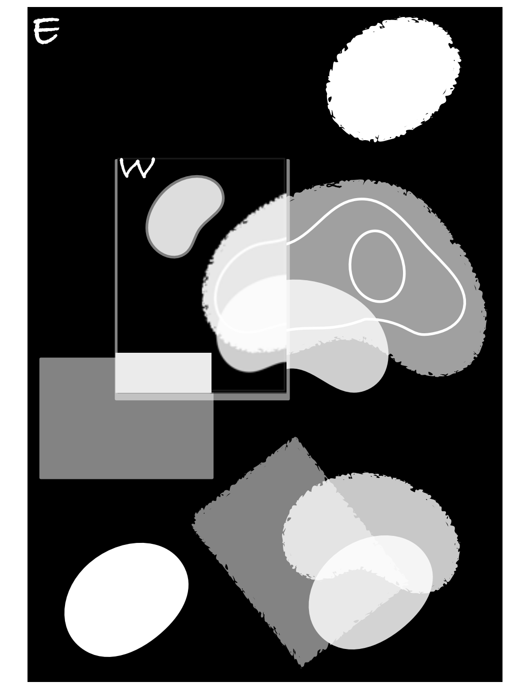
Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \le, \cdot, +, \emptyset, E), ', {}^c)$



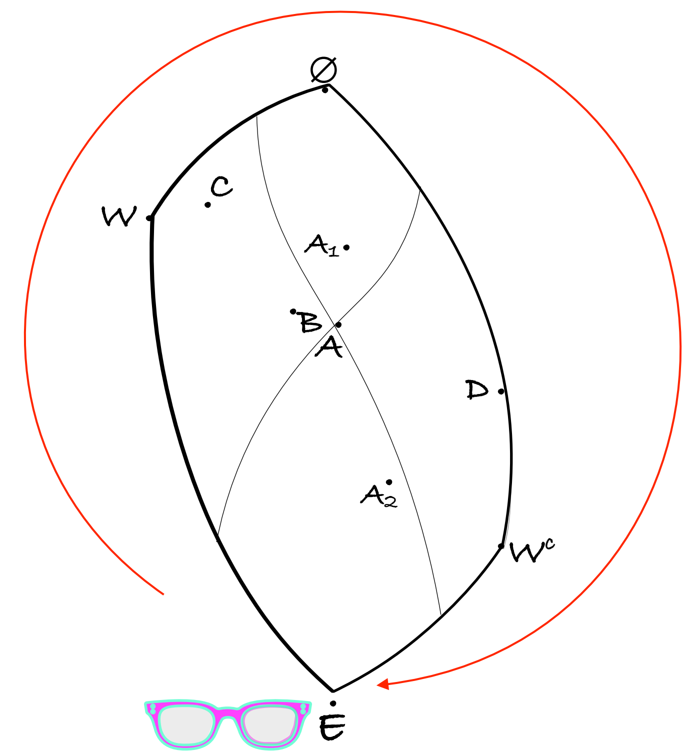
$\varphi_W(S) = S \Delta W$

Se generaliza y otras nuevas representaciones aparecen:
W subconjunto nítido ($W' = W^c$),
distinguido por alguna razón.

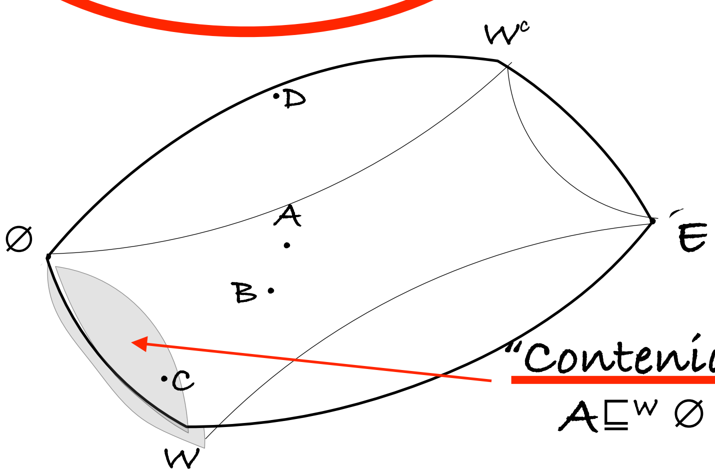
la nueva "inclusión" asociada al nítido W:
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cdot W \le A \le B + W) \Leftrightarrow (A \triangle W \le B \triangle W)$.



o Imágenes digitalizadas



Sistema algebraico:
Retículo distributivo dual con la misma negación fuerte
$((L^E, \ge, +, \cdot, E, \emptyset), ', {}^c)$



"Contenido" del vacío $\emptyset$ asociado a W:
$A \sqsubseteq^W \emptyset \Leftrightarrow (A \le W) \Leftrightarrow (A \triangle W \le W)$.

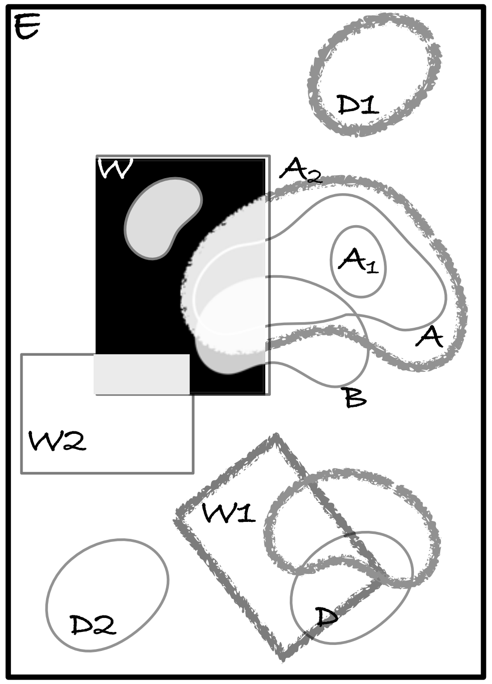
"Perspectiva"

Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', {}^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $\boxed{A \longrightarrow \varphi_W(A) = A \Delta W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)}$

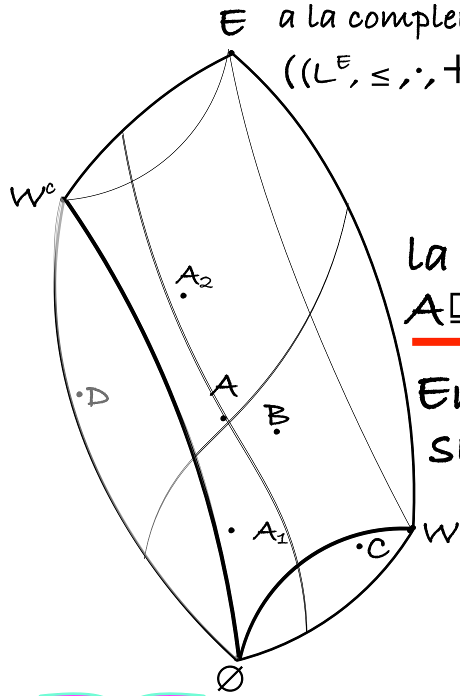
Introducción:

Dos representaciones usuales de las imágenes:

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos
$\emptyset \leq E,\ A \leq E,\ B \leq E, \ldots,\ E \leq E$

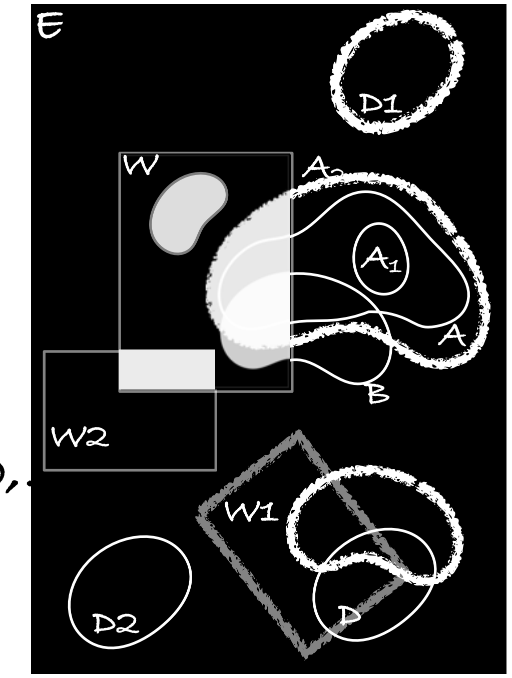


Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$



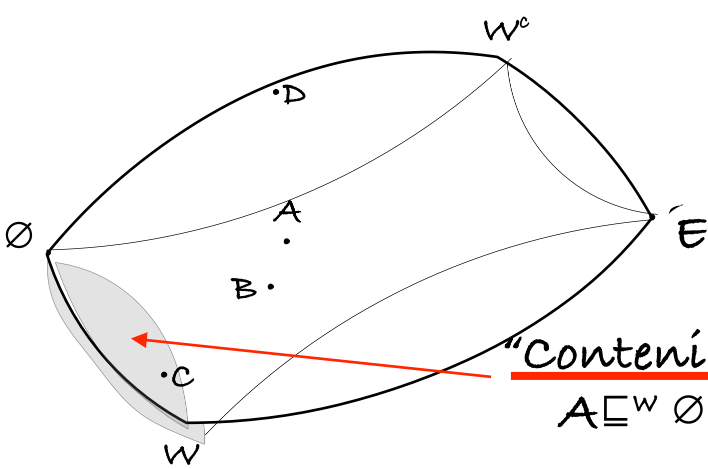
$\varphi_W(S) = S \Delta W$

Se generaliza y otras nuevas representaciones aparecen:
W subconjunto nítido ($W' = W^c$), distinguido por alguna razón.



la nueva "inclusión" asociada al nítido W:
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W) \Leftrightarrow (A \triangle W \leq B \triangle W)$.

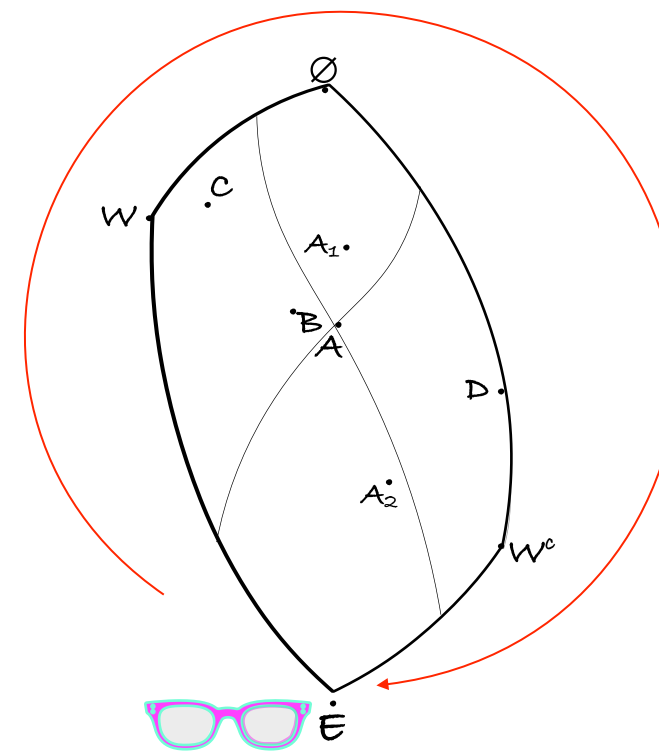
En las aplicaciones, W suele representar un subconjunto irrelevante, perjudicial, peligroso,...



"Contenido" del vacío ∅ asociado a W:
$A \sqsubseteq^W \emptyset \Leftrightarrow (A \leq W) \Leftrightarrow (A \triangle W \leq W)$.

"Perspectiva"

Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $\boxed{A \longrightarrow \varphi_W(A) = A \Delta W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)}$



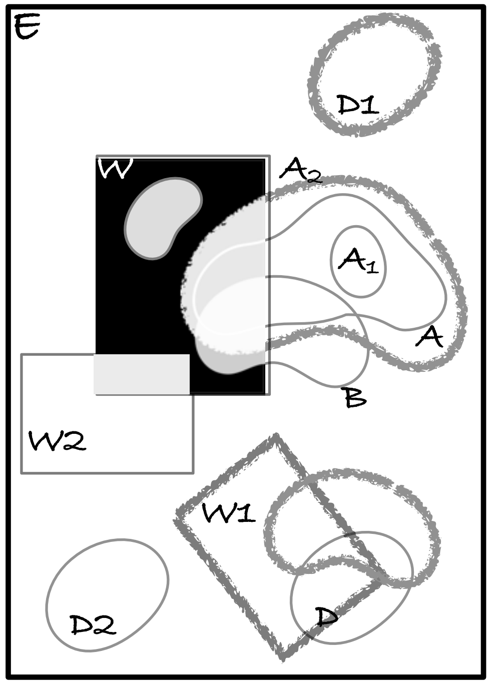
Sistema algebraico:
Retículo distributivo dual con la misma negación fuerte
$((L^E, \geq, +, \cdot, E, \emptyset), ', ^c)$

Introducción:

Dos representaciones usuales de las imágenes:

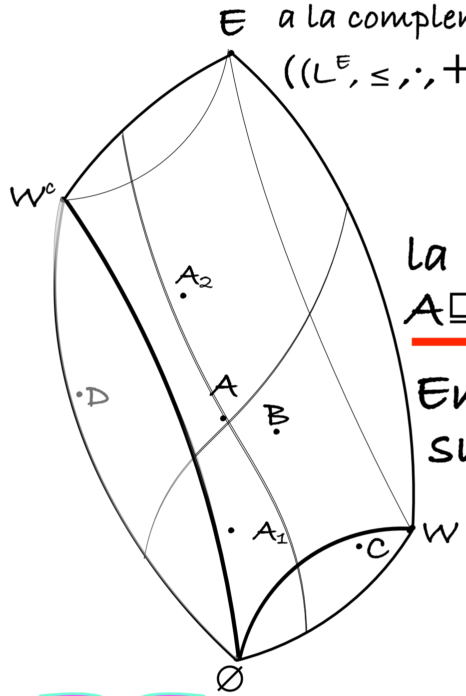
Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos

$\emptyset \leq E$, $A \leq E$, $B \leq E$, … , $E \leq E$

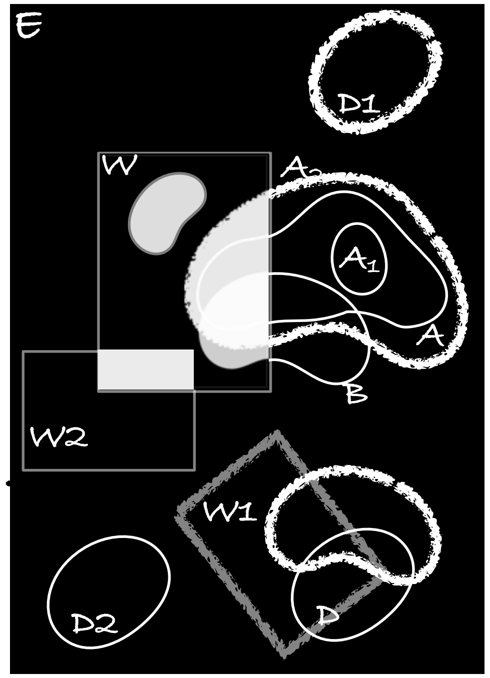


Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación

$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', {}^c)$



Se generaliza y otras nuevas representaciones aparecen:
W subconjunto nítido ($W' = W^c$), distinguido por alguna razón.



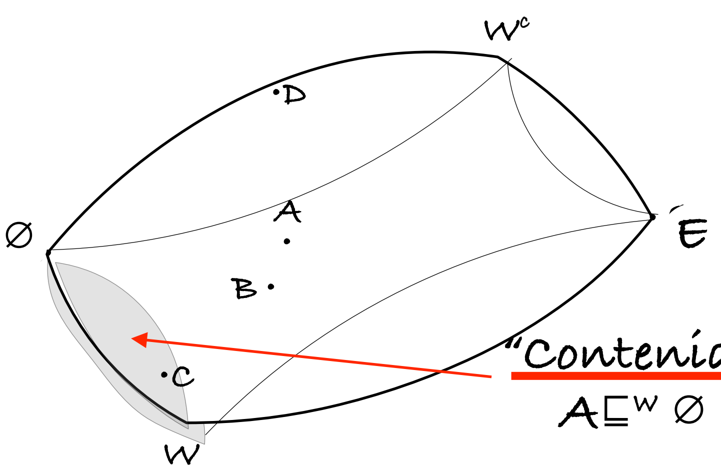
la nueva "inclusión" asociada al nítido W:

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W) \Leftrightarrow (A \triangle W \leq B \triangle W)$.

En las aplicaciones, W suele representar un subconjunto irrelevante, perjudicial, peligroso,…

aunque también uno valioso, interesante,…

$\varphi_W(S) = S\Delta$

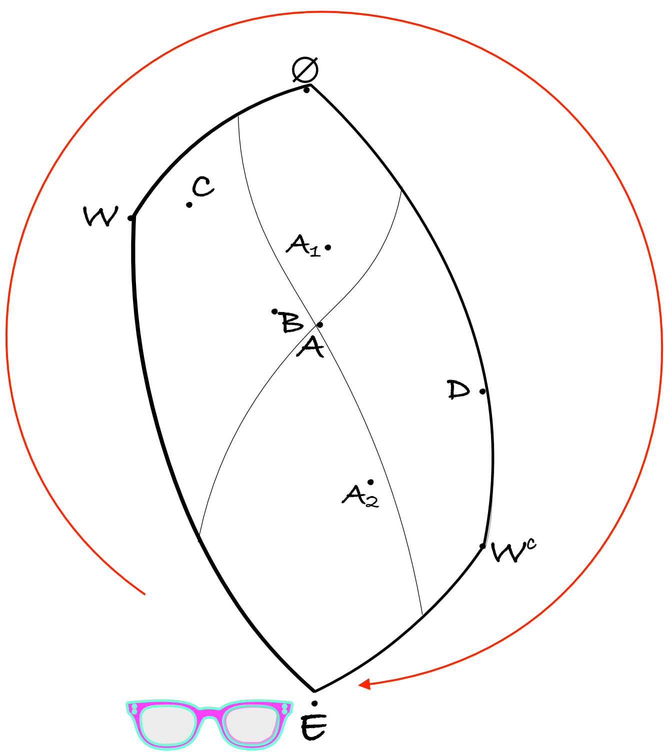


"Contenido" del vacío $\emptyset$ asociado a W:

$A \sqsubseteq^W \emptyset \Leftrightarrow (A \leq W) \Leftrightarrow (A \triangle W \leq W)$.

"Perspectiva"

Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', {}^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $A \longrightarrow \varphi_W(A) = A \triangle W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)$



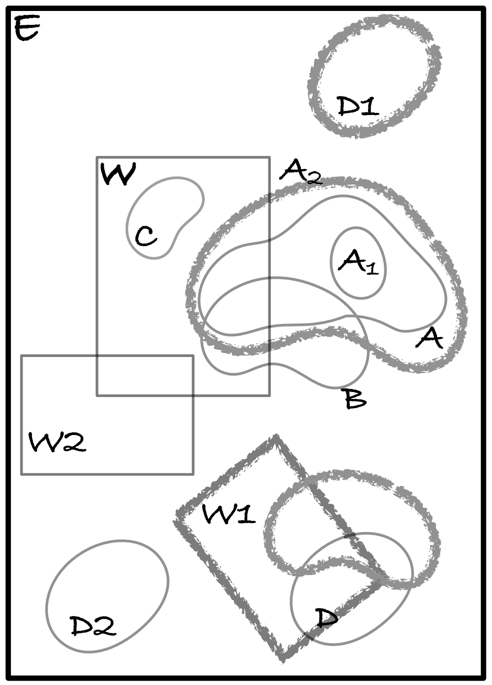
Sistema algebraico:
Retículo distributivo dual con la misma negación fuerte
$((L^E, \geq, +, \cdot, E, \emptyset), ', {}^c)$

Introducción:

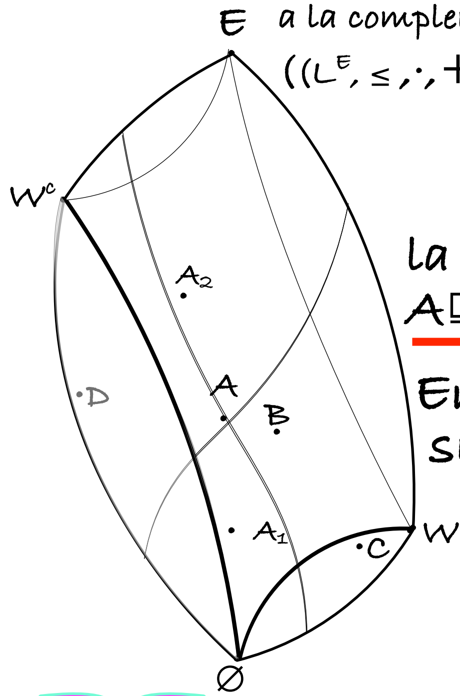
Dos representaciones usuales de las imágenes:

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos

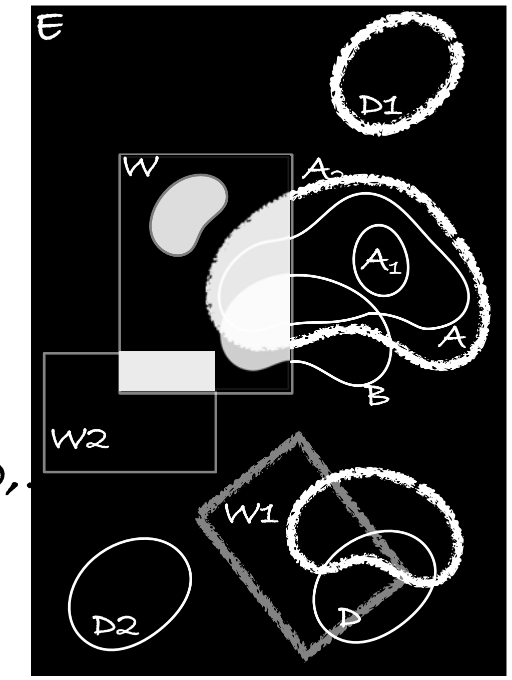
$\emptyset \leq E$, $A \leq E$, $B \leq E$, … , $E \leq E$



Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', {}^c)$



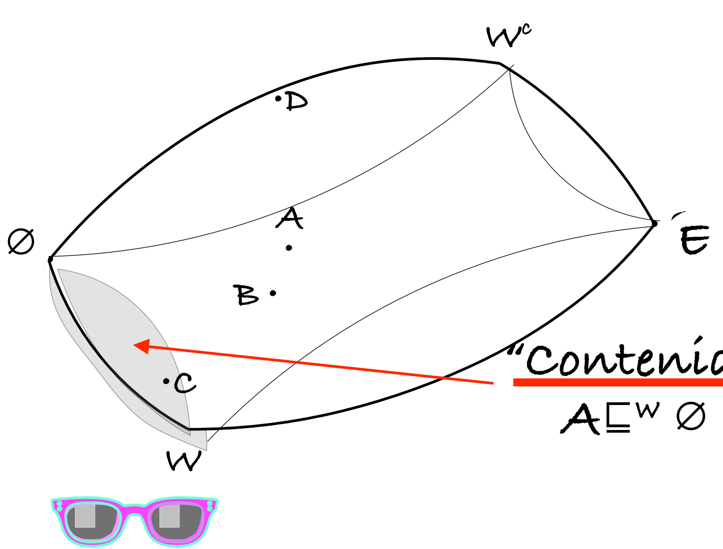
Se generaliza y otras nuevas representaciones aparecen:
W subconjunto nítido ($W' = W^c$), distinguido por alguna razón.



la nueva "inclusión" asociada al nítido W:
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W) \Leftrightarrow (A \triangle W \leq B \triangle W)$.

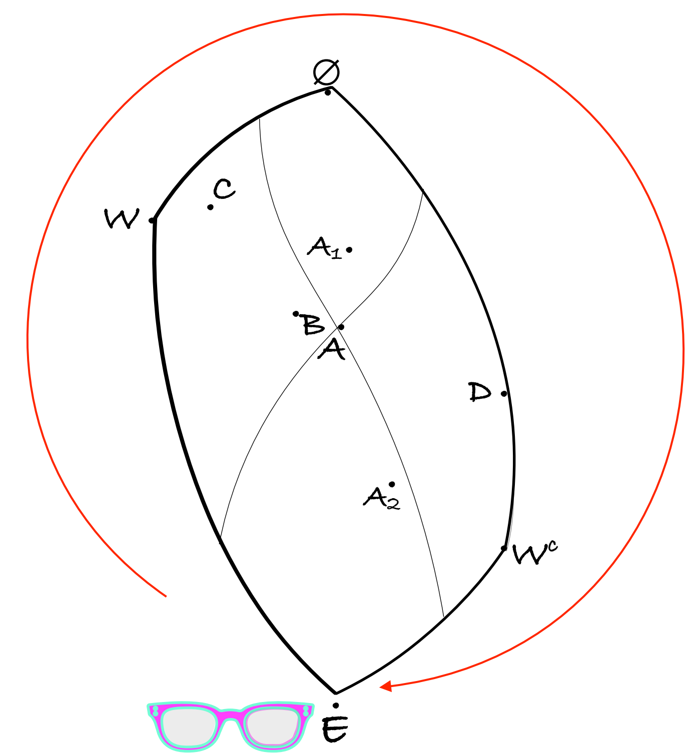
En las aplicaciones, W suele representar un subconjunto irrelevante, perjudicial, peligroso,… aunque también uno valioso, interesante,…

$\varphi_W(S) = S\Delta$



"Perspectiva"

"Contenido" del vacío $\emptyset$ asociado a W:
$A \sqsubseteq^W \emptyset \Leftrightarrow (A \leq W) \Leftrightarrow (A \triangle W \leq W)$.



Sistema algebraico:
Retículo distributivo dual con la misma negación fuerte
$((L^E, \geq, +, \cdot, E, \emptyset), ', {}^c)$

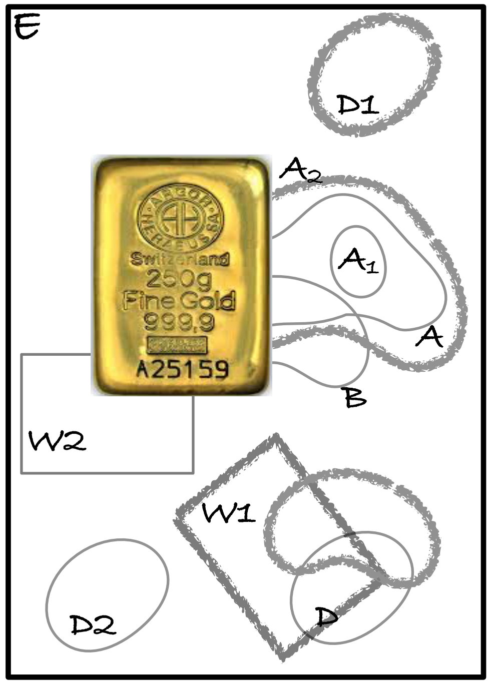
Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', {}^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $\boxed{A \longrightarrow \varphi_W(A) = A \triangle W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)}$

Introducción:

Dos representaciones usuales de las imágenes:

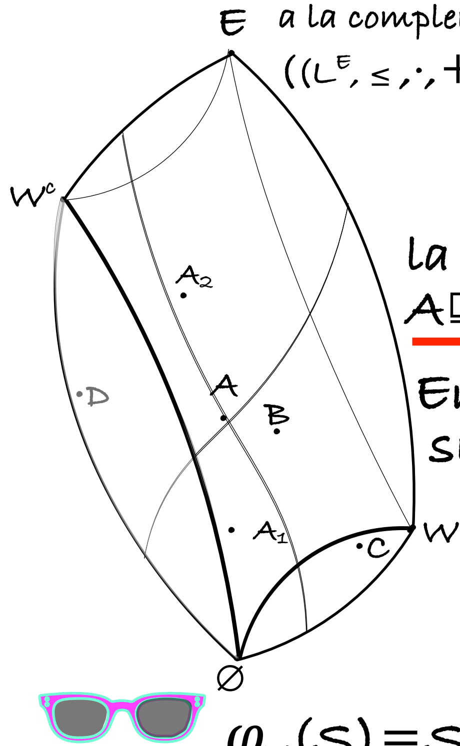
Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos

$\varnothing \leq E$, $A \leq E$, $B \leq E$, … , $E \leq E$



Sistema algebraico: Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación

$((L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E), ', ^c)$



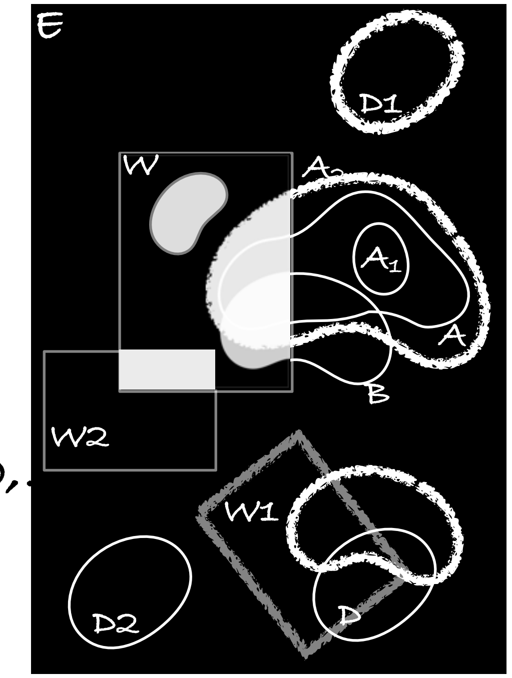
$\varphi_W(S) = S \Delta W$

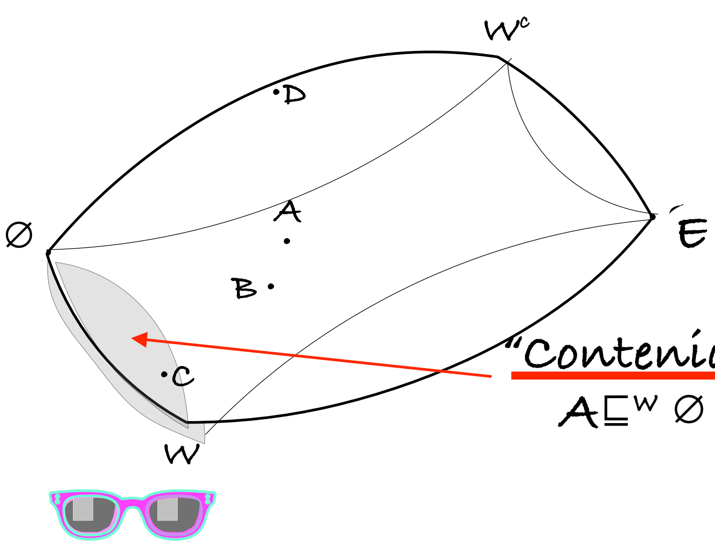
Se generaliza y otras nuevas representaciones aparecen: W subconjunto nítido ($W' = W^c$), distinguido por alguna razón.

la nueva "inclusión" asociada al nítido W:

$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W) \Leftrightarrow (A \triangle W \leq B \triangle W)$.

En las aplicaciones, W suele representar un subconjunto irrelevante, perjudicial, peligroso,… aunque también uno valioso, interesante,…



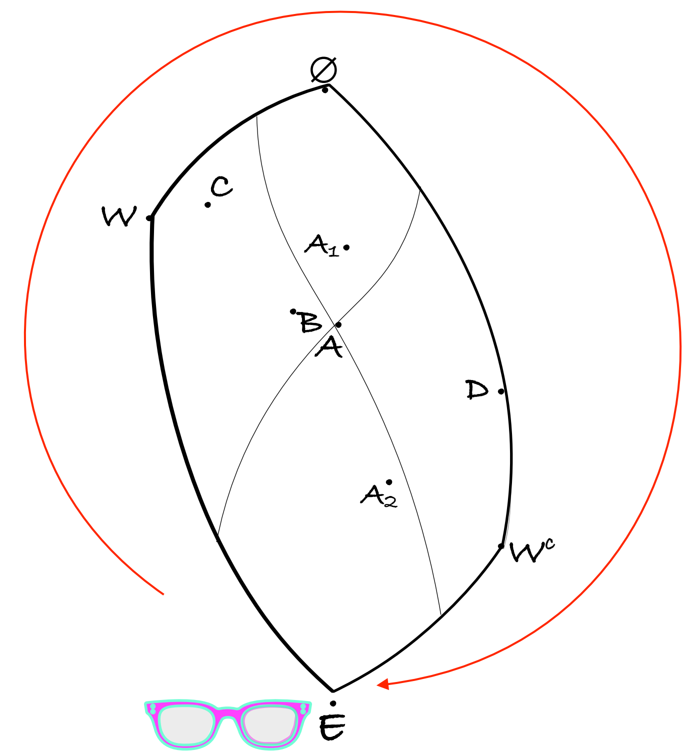


"Contenido" del vacío $\varnothing$ asociado a W:

$A \sqsubseteq^W \varnothing \Leftrightarrow (A \leq W) \Leftrightarrow (A \triangle W \leq W)$.

"Perspectiva"

Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $A \longrightarrow \varphi_W(A) = A \Delta W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)$

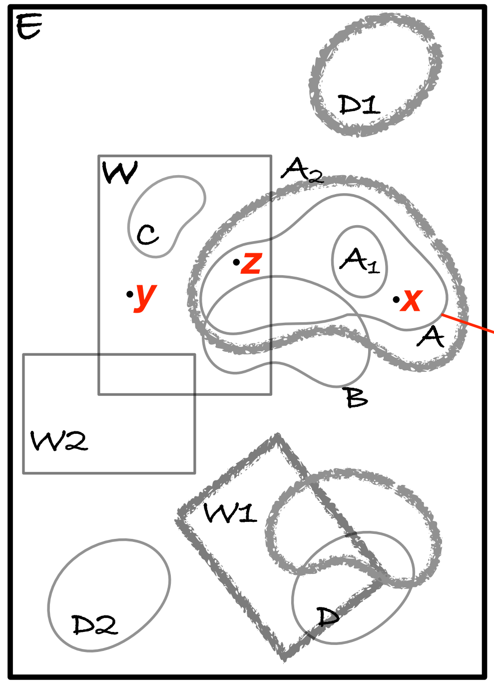


Sistema algebraico: Retículo distributivo dual con la misma negación fuerte

$((L^E, \geq, +, \cdot, E, \varnothing), ', ^c)$

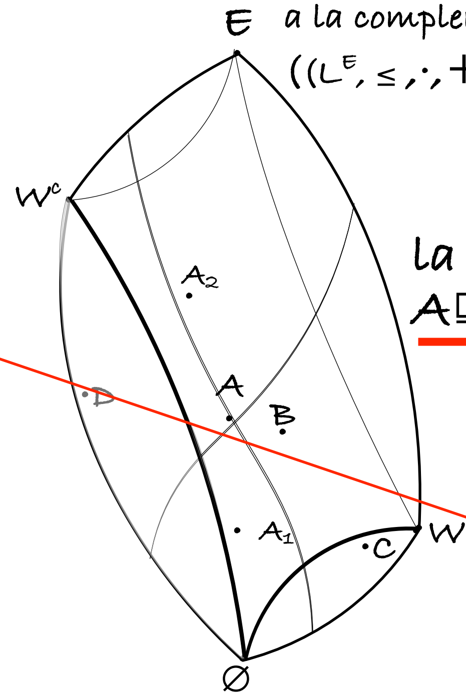
Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos

$\varnothing \leq E,\ A \leq E,\ B \leq E, \ldots,\ E \leq E$



Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación

$((L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E), ', ^c)$



la nueva "inclusión" asociada al nítido W:

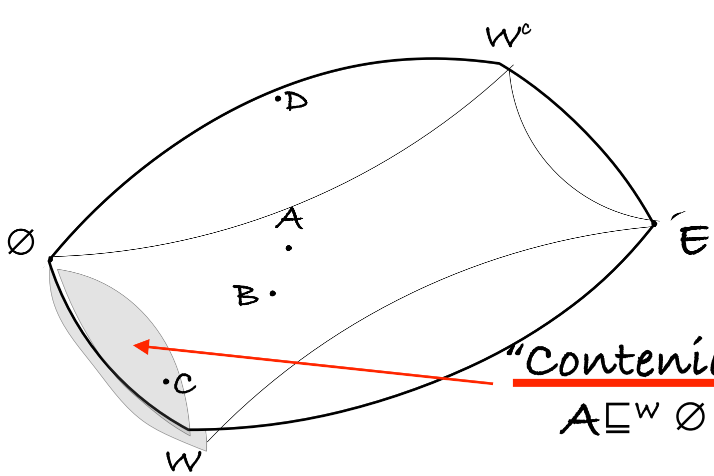
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W) \Leftrightarrow (A \triangle W \leq B \triangle W).$

$\varphi_W(S) = S \Delta W$

$x \in^W A,\ y \in^W A,\ z \notin^W A$

Se introduce una relación $\in^W \subseteq E X L^E$ que verifica propiedades de "pertenencia":

$(x \in^W A) \Leftrightarrow (x \in (A \triangle W))$

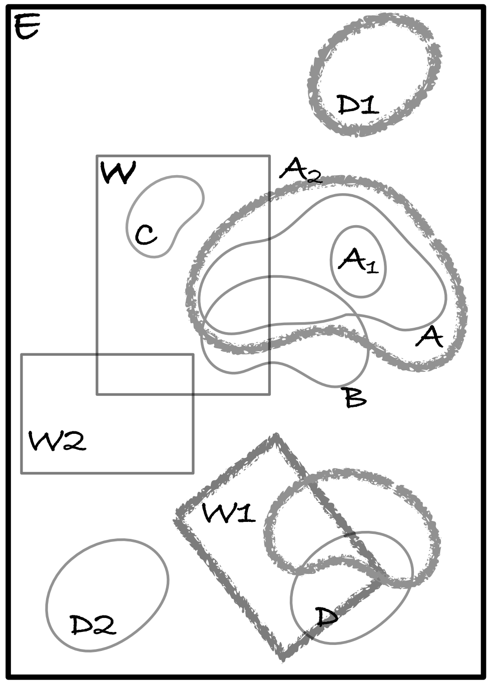


"Contenido" del vacío ∅ asociado a W:

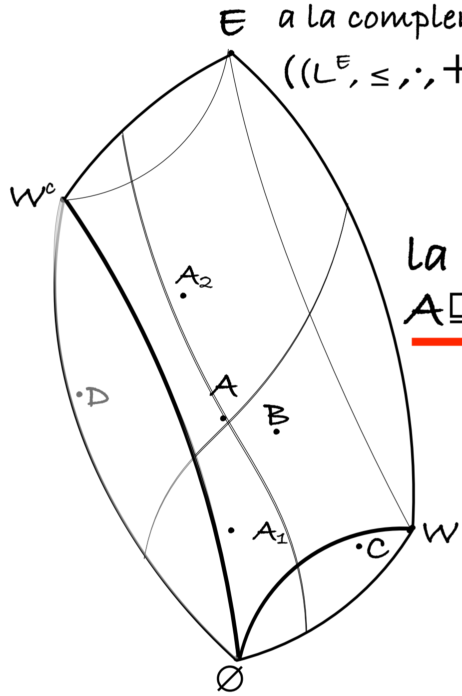
$A \sqsubseteq^W \varnothing \Leftrightarrow (A \leq W) \Leftrightarrow (A \triangle W \leq W).$

Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $\boxed{A \longrightarrow \varphi_W(A) = A \Delta W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)}$

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos
$\emptyset \leq E,\ A \leq E,\ B \leq E, \dots ,\ E \leq E$

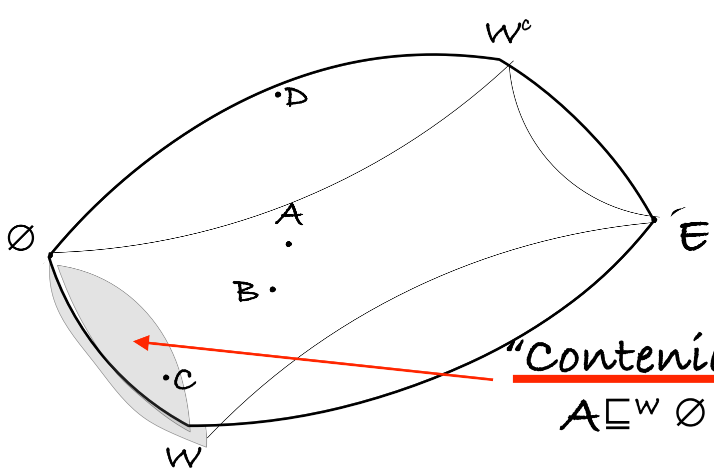


Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', {}^c)$



la nueva "inclusión" asociada al nítido W:
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cdot W \leq A \leq B + W) \Leftrightarrow (A \triangle W \leq B \triangle W).$

$\varphi_W(S) = S \Delta W$



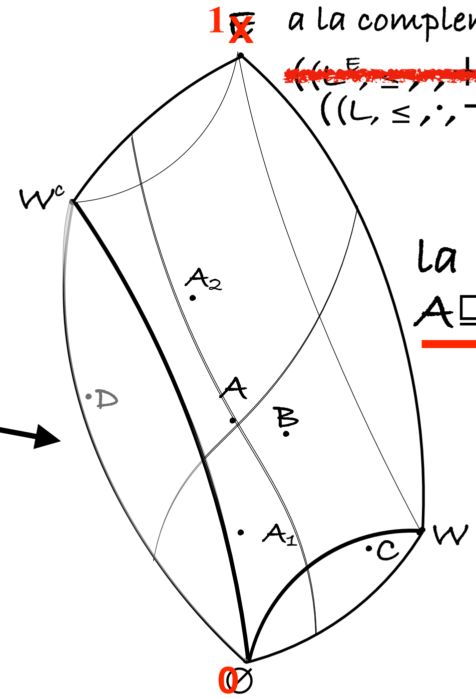
"Contenido" del vacío $\emptyset$ asociado a W:
$A \sqsubseteq^W \emptyset \Leftrightarrow (A \leq W) \Leftrightarrow (A \triangle W \leq W).$

Finalmente, estos resultados son válidos si consideramos sistemas algebraicos no necesariamente ligados a subconjuntos borrosos o nítidos de un referencial E

Sistema algebraico:
Retículo distributivo con
negación fuerte que contiene
a la complementación

$\cancel{((L^E, \subseteq, \cap, +, \emptyset, E), ', ^c)}$
$((L, \le, \cdot, +, 0, 1), ', ^c)$

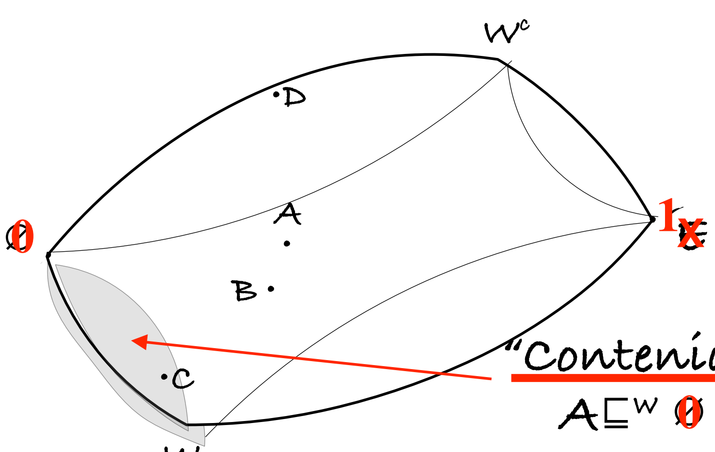
Retículo distributivo cualquiera con una negación fuerte



la nueva "inclusión" asociada al nítido W:
$A \sqsubseteq^W B \Leftrightarrow (B \cdot W \le A \le B + W) \Leftrightarrow (A \triangle W \le B \triangle W)$.

$\varphi_W(S) = S \Delta W$

Retículo distributivo imagen isomorfa del anterior y con la misma negación fuerte



$((L, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$

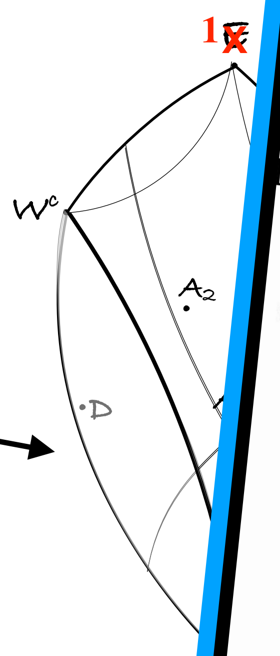
elemento 0
"Contenido" del ~~vacío ∅~~ asociado a W:
$A \sqsubseteq^W 0 \Leftrightarrow (A \le W) \Leftrightarrow (A \triangle W \le W)$.

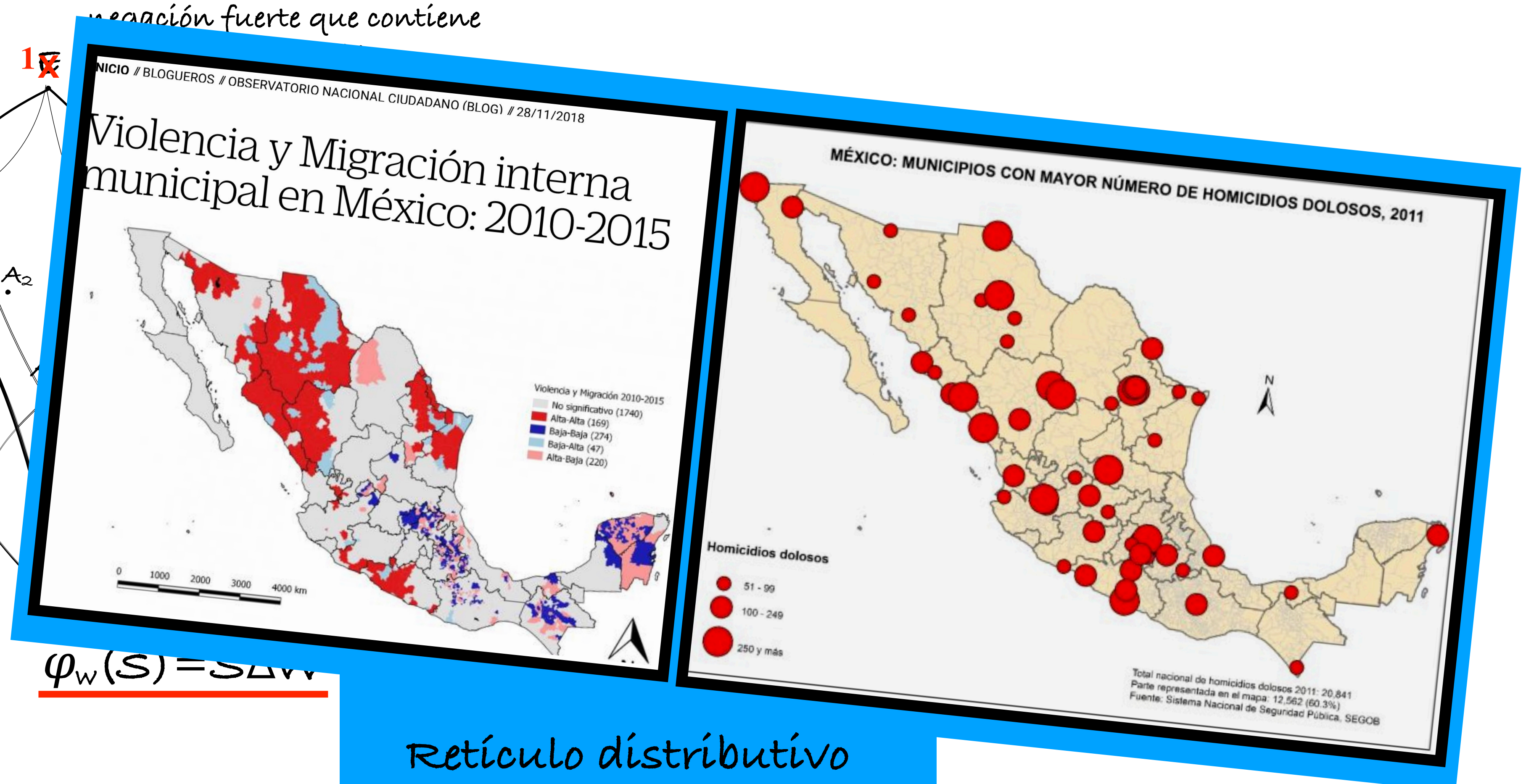
Finalmente, estos resultados son válidos si consideramos sistemas algebraicos no necesariamente ligados a subconjuntos borrosos o nítidos de un referencial E

Aplicaciones: Mapas de riesgo, contenido del vacío, subconjuntos señalados, …

Sistema algebraico:
Retículo distributivo con
negación fuerte que contiene

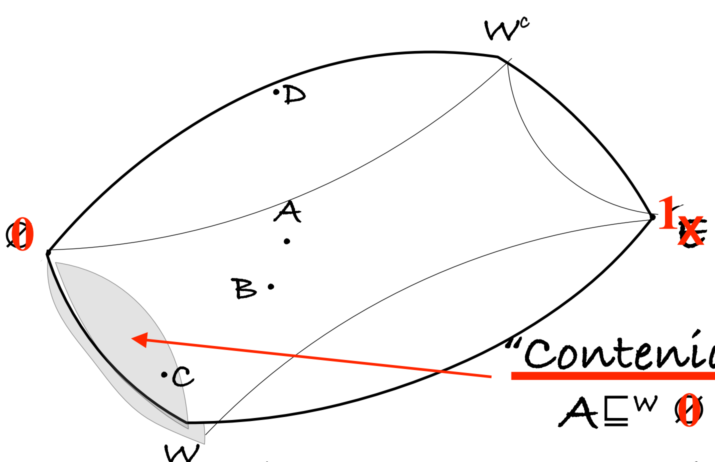
Retículo distributivo cualquiera con una negación fuerte





$\varphi_W(S)=S\triangle W$

Retículo distributivo imagen isomorfa del anterior y con la misma negación fuerte



elemento 0

"Contenido" del ~~vacío ∅~~ asociado a W:

$A \sqsubseteq^W \mathbf{0} \Leftrightarrow (A \le W) \Leftrightarrow (A \triangle W \le W)$.

$((L, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), {}', {}^c)$

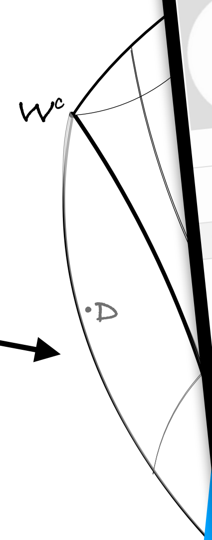
Finalmente, estos resultados son válidos si consideramos sistemas algebraicos no necesariamente ligados a subconjuntos borrosos o nítidos de un referencial E

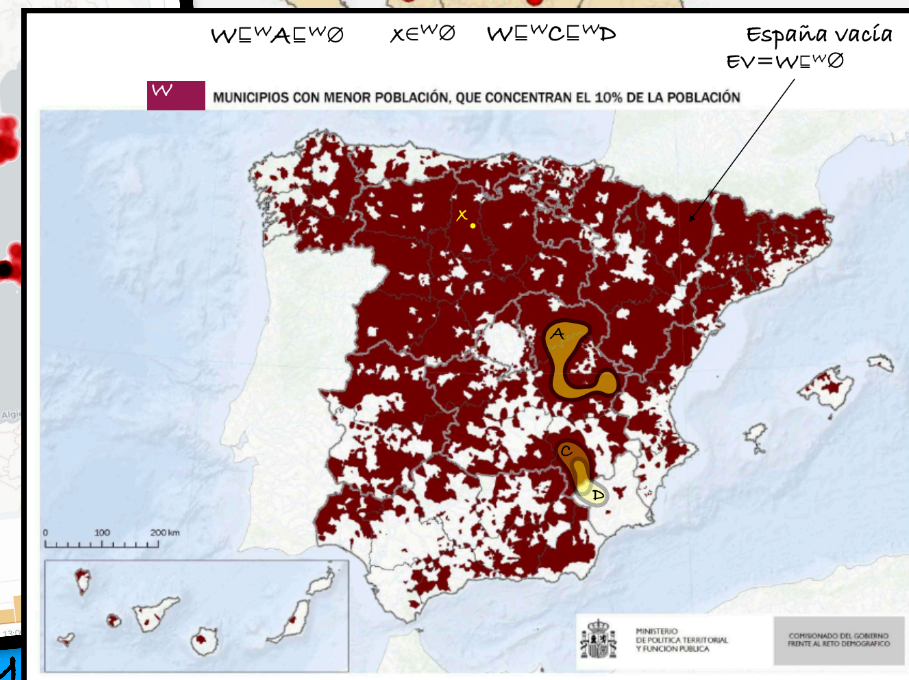
Aplicaciones: Mapas de riesgo, contenido del vacío, subconjuntos señalados, ...

Sistema algebraico:

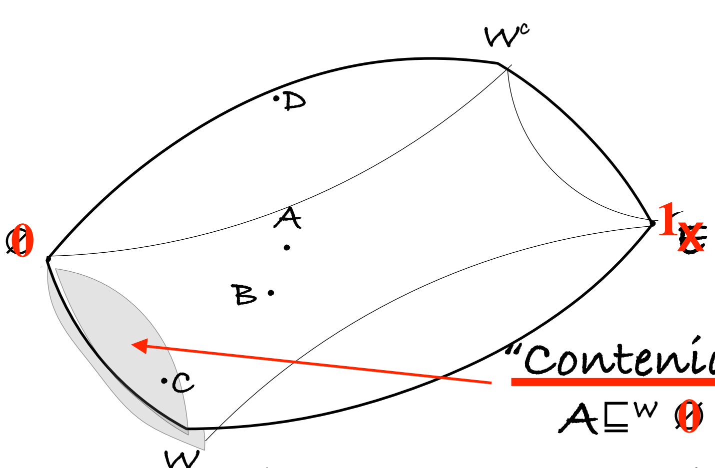
Retícul...

Retículo distributivo cualquiera con una negación fuerte





...anterior y negación fuerte



elemento 0

“Contenido”del ~~vacío ∅~~ asociado a W:

$A \sqsubseteq^W \mathbf{0} \Leftrightarrow (A \le W) \Leftrightarrow (A \triangle W \le W)$.

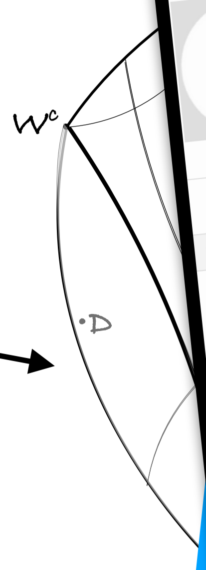
$((L, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$

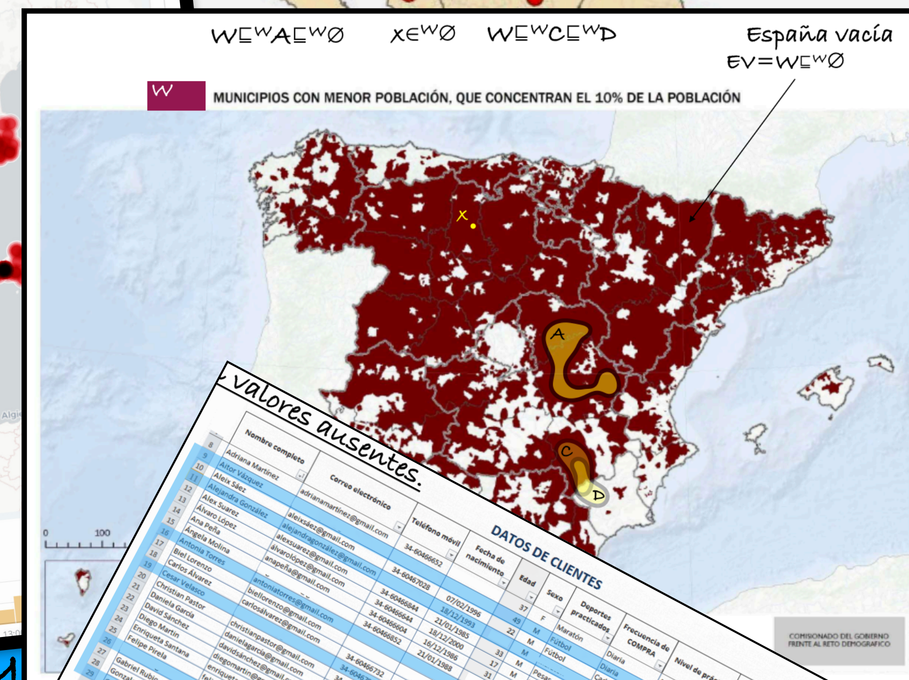
Finalmente, estos resultados son válidos si consideramos sistemas algebraicos no necesariamente ligados a subconjuntos borrosos o nítidos de un referencial E

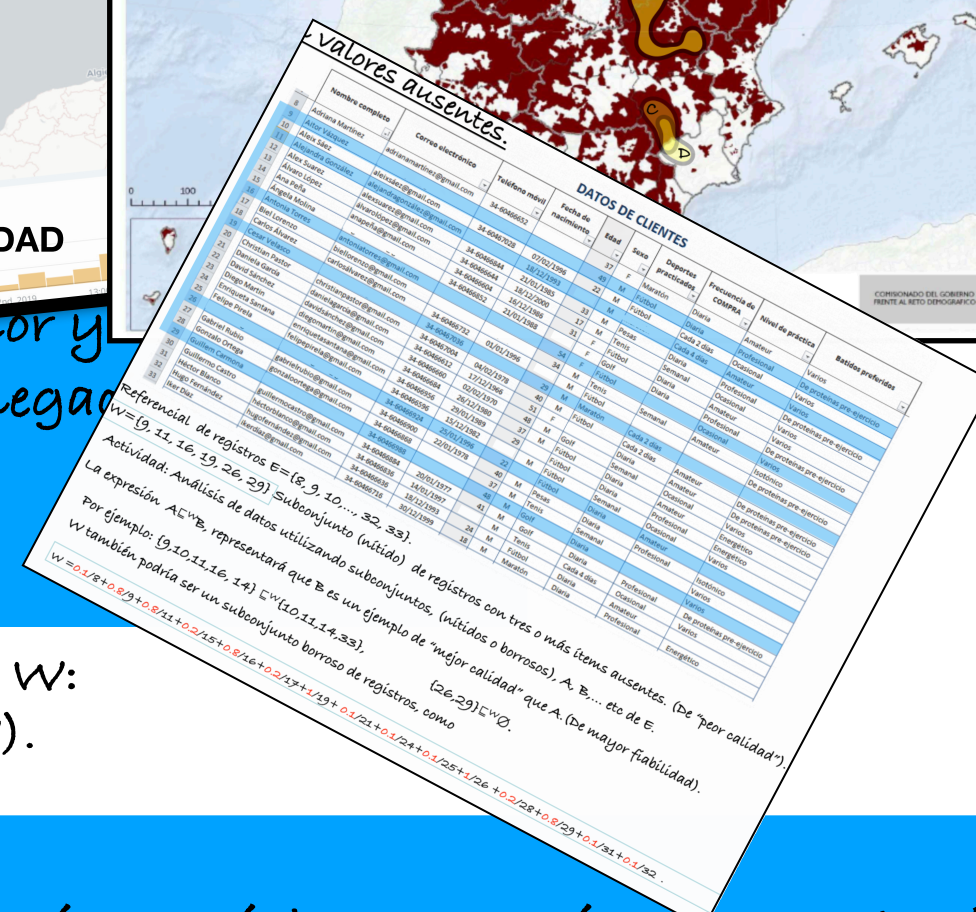
Sistema algebraico:
Retícul…

Aplicaciones: Mapas de riesgo, contenido del vacío, subconjuntos señalados, …

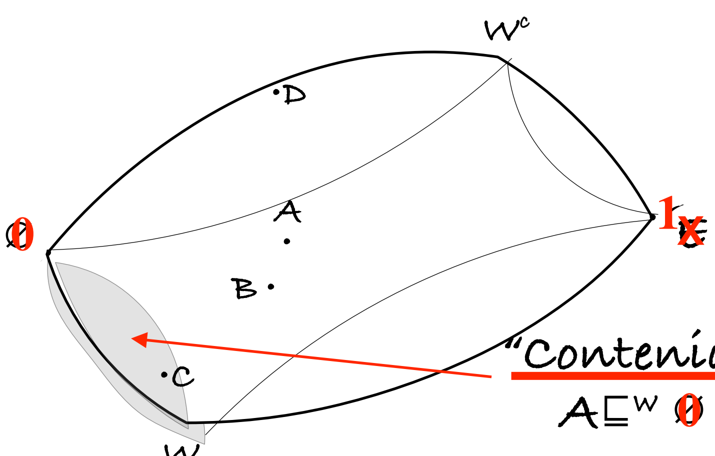
Retículo distributivo cualquiera con una negación fuerte







… anterior y … negac…



elemento 0

"Contenido" del ~~vacío ∅~~ asociado a W:

$A \sqsubseteq^W 0 \Leftrightarrow (A \leq W) \Leftrightarrow (A \triangle W \leq W)$.

$((L, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$

Finalmente, estos resultados son válidos si consideramos sistemas algebraicos no necesariamente ligados a subconjuntos borrosos o nítidos de un referencial E

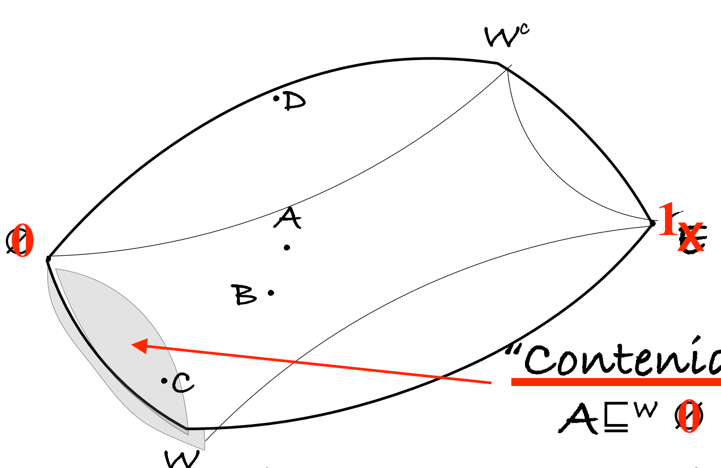
Aplicaciones: Mapas de riesgo, contenido del vacío, subconjuntos señalados, ...

Sistema algebraico:

Retículo distributivo cualquiera con una negación fuerte

anterior y negac

etc...



elemento 0

"Contenido" del ~~vacío $\emptyset$~~ asociado a W:

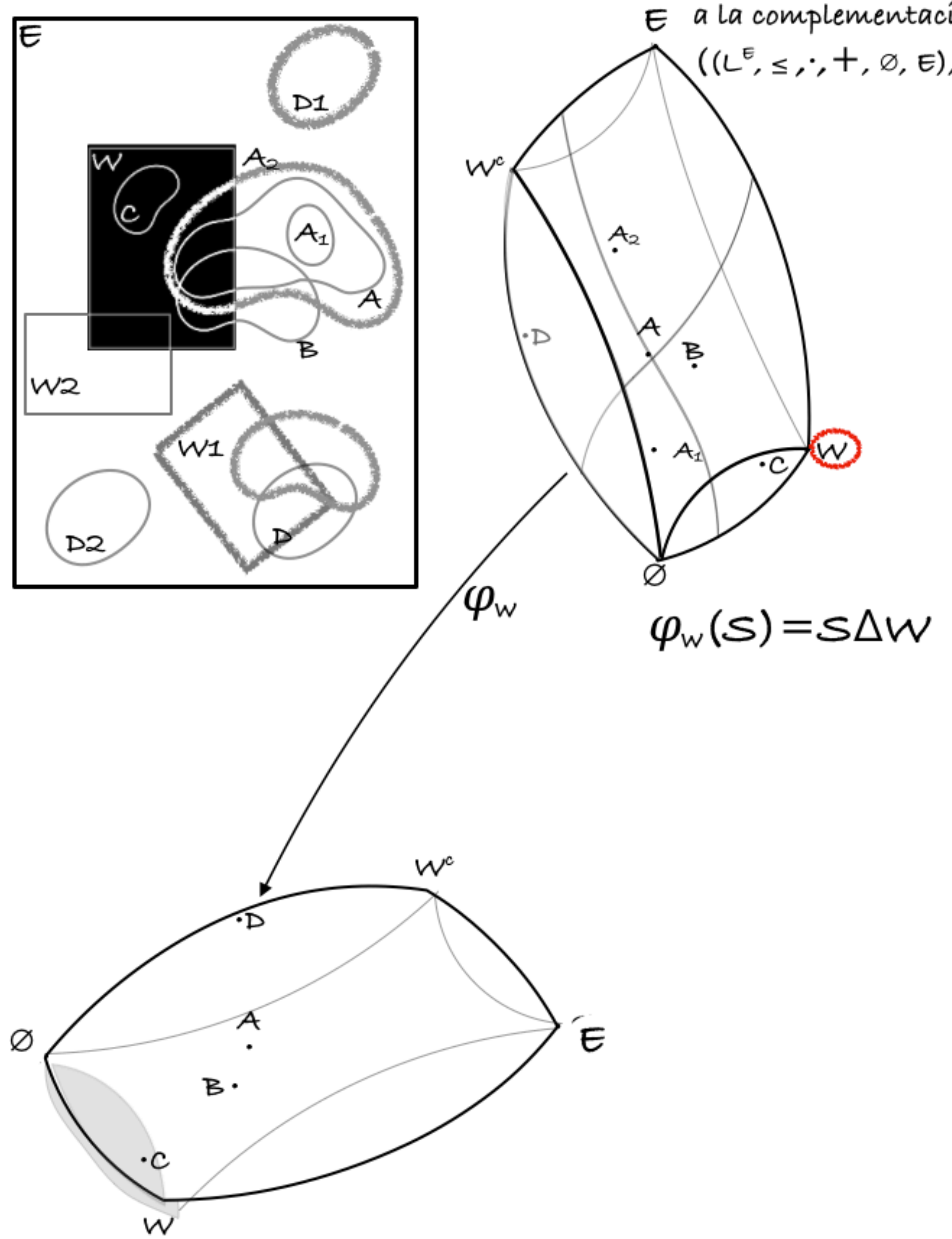
$A \sqsubseteq^W \emptyset \Leftrightarrow (A \leq W) \Leftrightarrow (A \triangle W \leq W)$.

$((L, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), {}', {}^c)$

Finalmente, estos resultados son válidos si consideramos sistemas algebraicos no necesariamente ligados a subconjuntos borrosos o nítidos de un referencial E

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos
$\varnothing \leq E,\ A \leq E,\ B \leq E, \ldots,\ E \leq E$

Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E), ', ^c)$



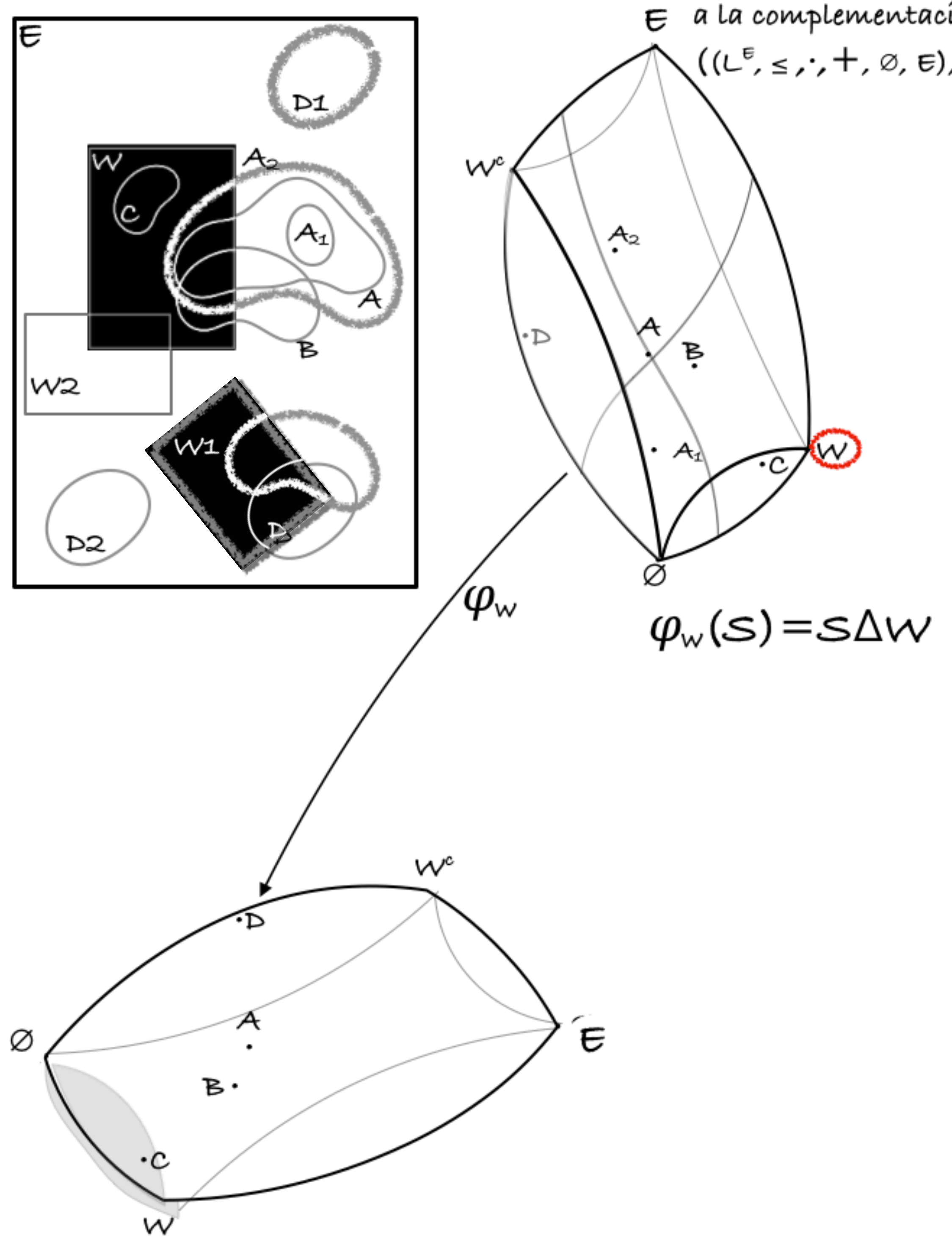
Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $\boxed{A \longrightarrow \varphi_W(A) = A \Delta W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)}$

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos

$\emptyset \leq E$, $A \leq E$, $B \leq E, \ldots$, $E \leq E$

Sistema algebraico: Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación $((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$

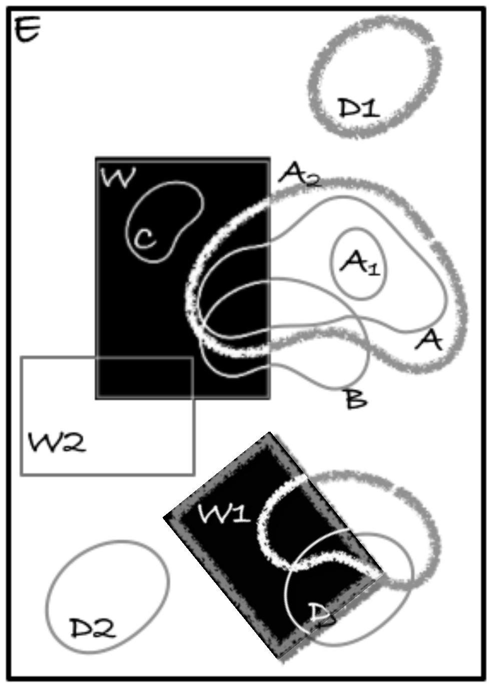
Pero, ¿y si W_1 es un borroso propio (no nítido)?



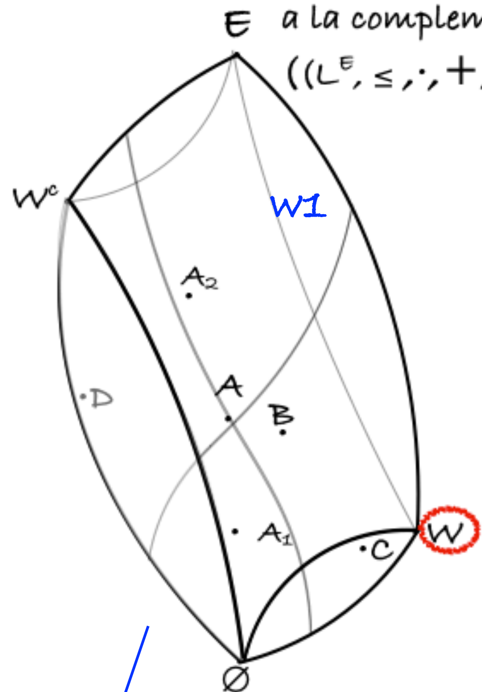
Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $\boxed{A \longrightarrow \varphi_W(A) = A \Delta W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)}$

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos

$\varnothing \le E,\ A \le E,\ B \le E, \ldots,\ E \le E$



Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \le, \cdot, +, \varnothing, E), ', ^c)$

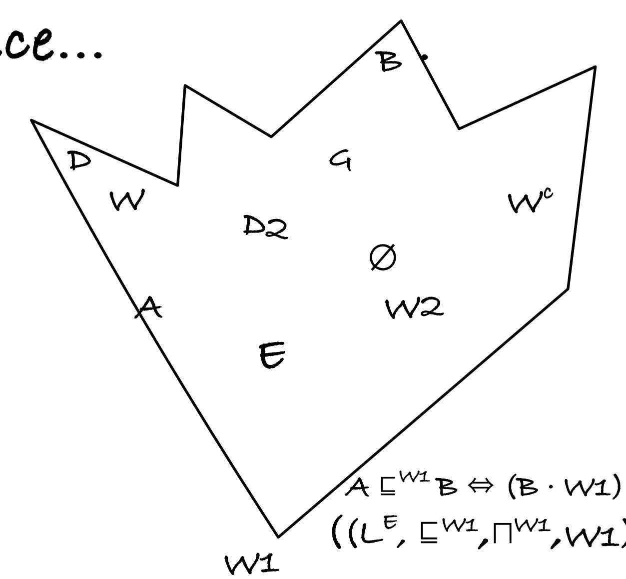


Pero, ¿y si W_1 es un borroso propio (no nítido)?

Entonces...

$\cancel{\varphi_W(C) = C \triangle W}$

El resultado se empobrece...

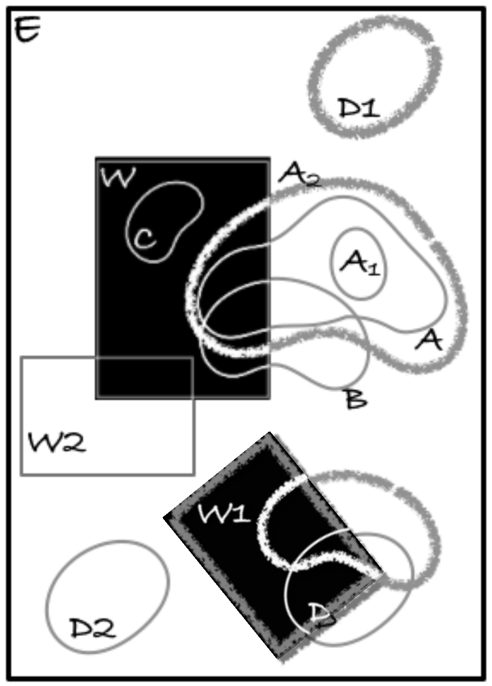


$A \sqsubseteq^{W1} B \Leftrightarrow (B \cdot W1) \le A \le (B + W1)$,
$((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1)$

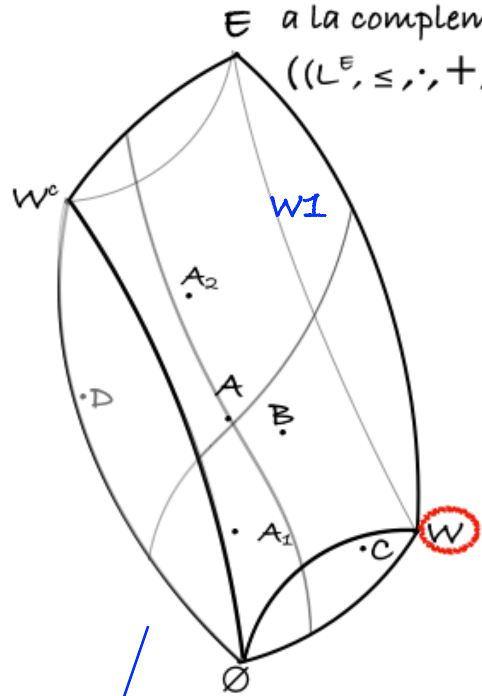
~~Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $X \to \varphi_W(X) = X \triangle W^c = (X' \cdot W) + (X \cdot W^c)$~~

Sistemas algebraico $((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1))$, que es un inf-semiretículos.

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos
$\emptyset \leq E$, $A \leq E$, $B \leq E, \ldots, E \leq E$

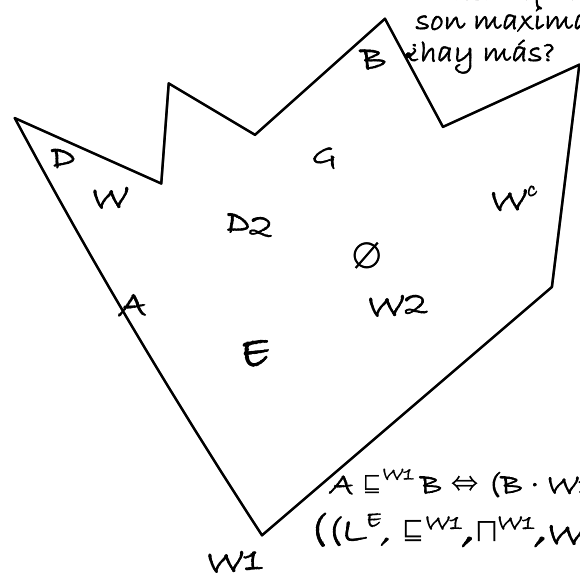


Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$



~~$\varphi_W(C) = C \triangle W$~~

Los elementos z tales que
$z = w1 \rightarrow q = q - w1$ para algún q,
son maximales, pero
¿hay más?



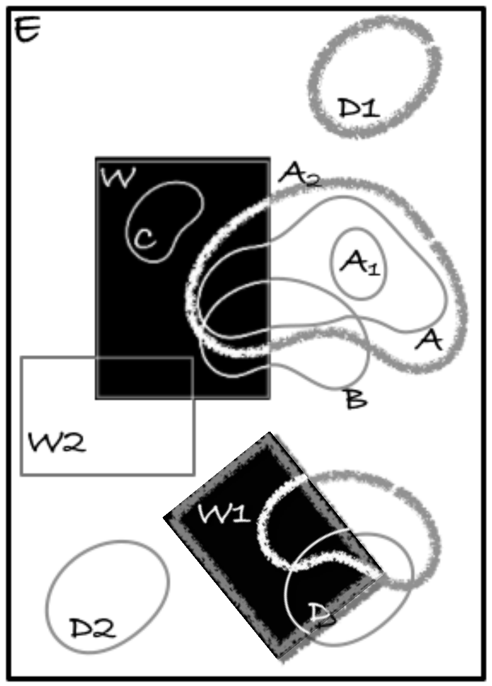
$A \sqsubseteq^{W1} B \Leftrightarrow (B \cdot W1) \leq A \leq (B + W1)$,
$((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1)$

~~Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $X \rightarrow \varphi_W(X) = X \triangle W = (X' \cdot W) + (X \cdot W^c)$~~

Sistemas algebraico $((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1))$, que es un inf-semiretículos.

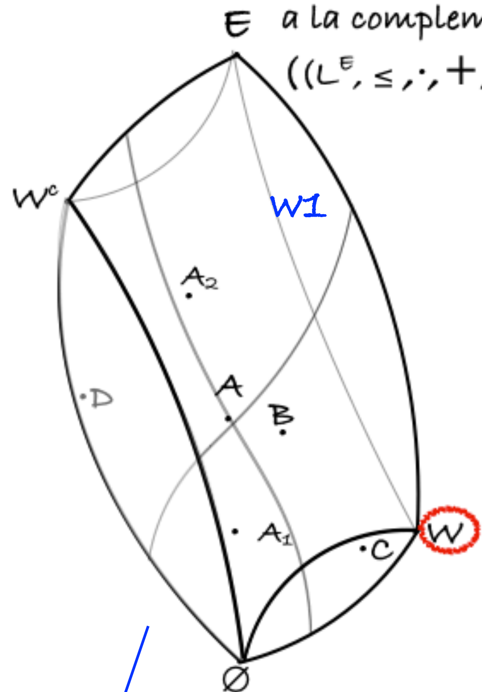
Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos

$\emptyset \leq E,\ A \leq E,\ B \leq E, \ldots,\ E \leq E$



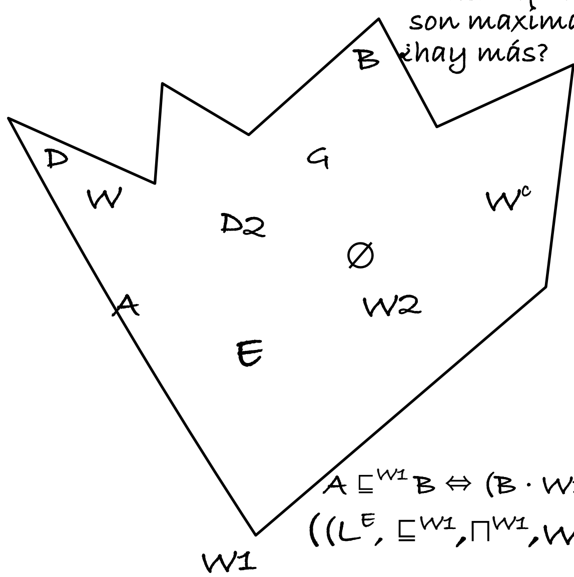
Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación

$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', {}^c)$



~~$\varphi_W(C) = C\triangle W$~~

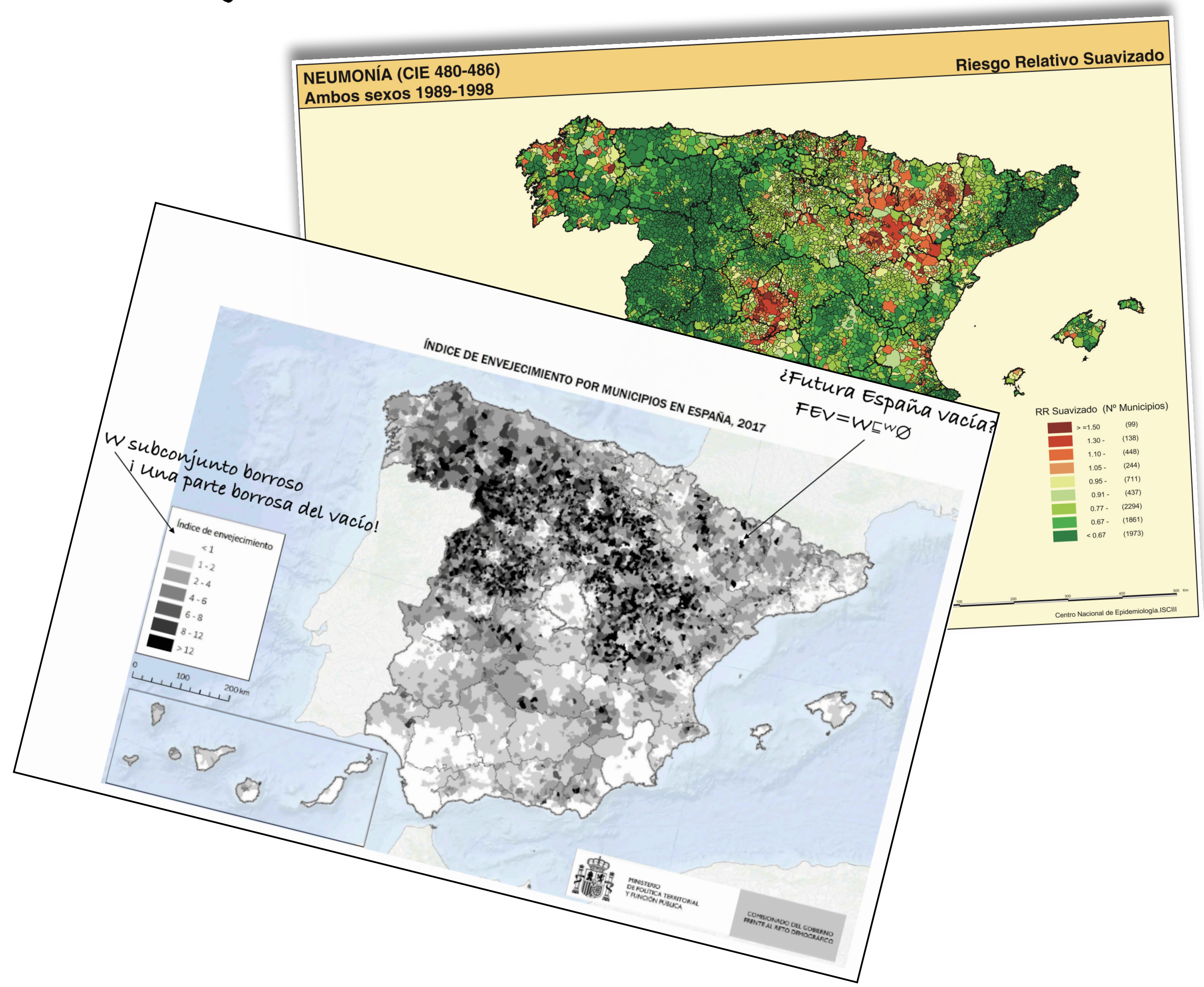
Los elementos z tales que $z = w1 \rightarrow q = q - w1$ para algún q, son maximales, pero ¿hay más?



$A \sqsubseteq^{W1} B \Leftrightarrow (B \cdot W1) \leq A \leq (B + W1)$,

$((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1)$

Aplicaciones: Mapas de riesgo, contenido del vacío, subconjuntos señalados, ...Todos ellos con "matices"

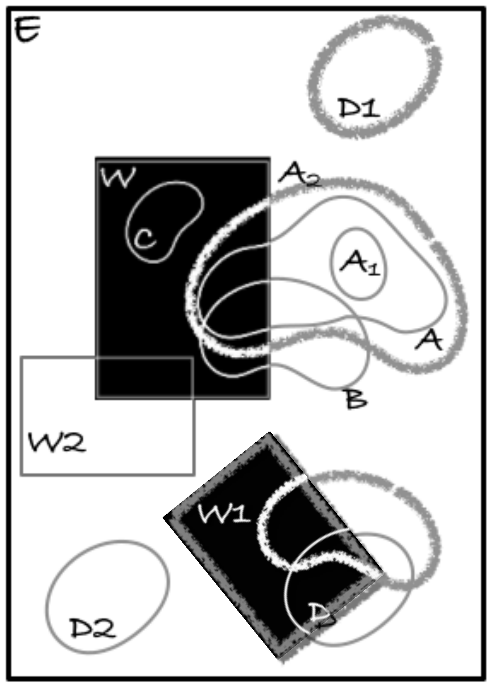


~~Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', {}^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $\varphi_W(A) = A\triangle W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)$~~

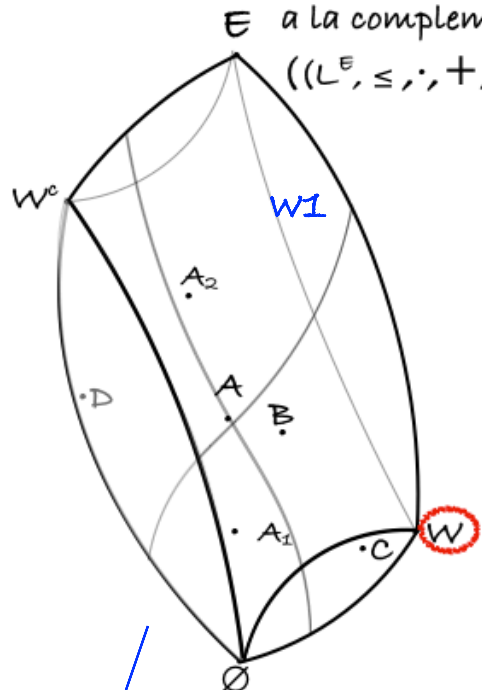
Sistemas algebraico $((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1))$, que es un inf-semiretículos.

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos

$\emptyset \leq E,\ A \leq E,\ B \leq E, \ldots,\ E \leq E$

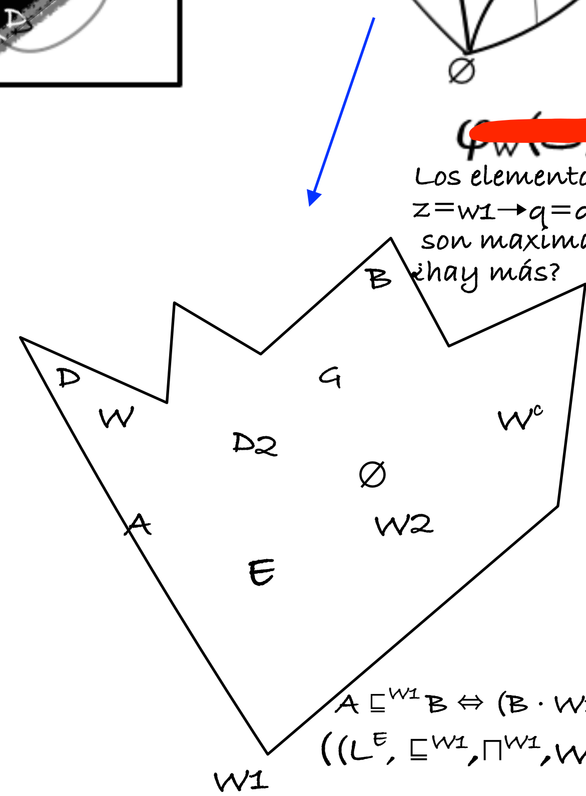


Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$



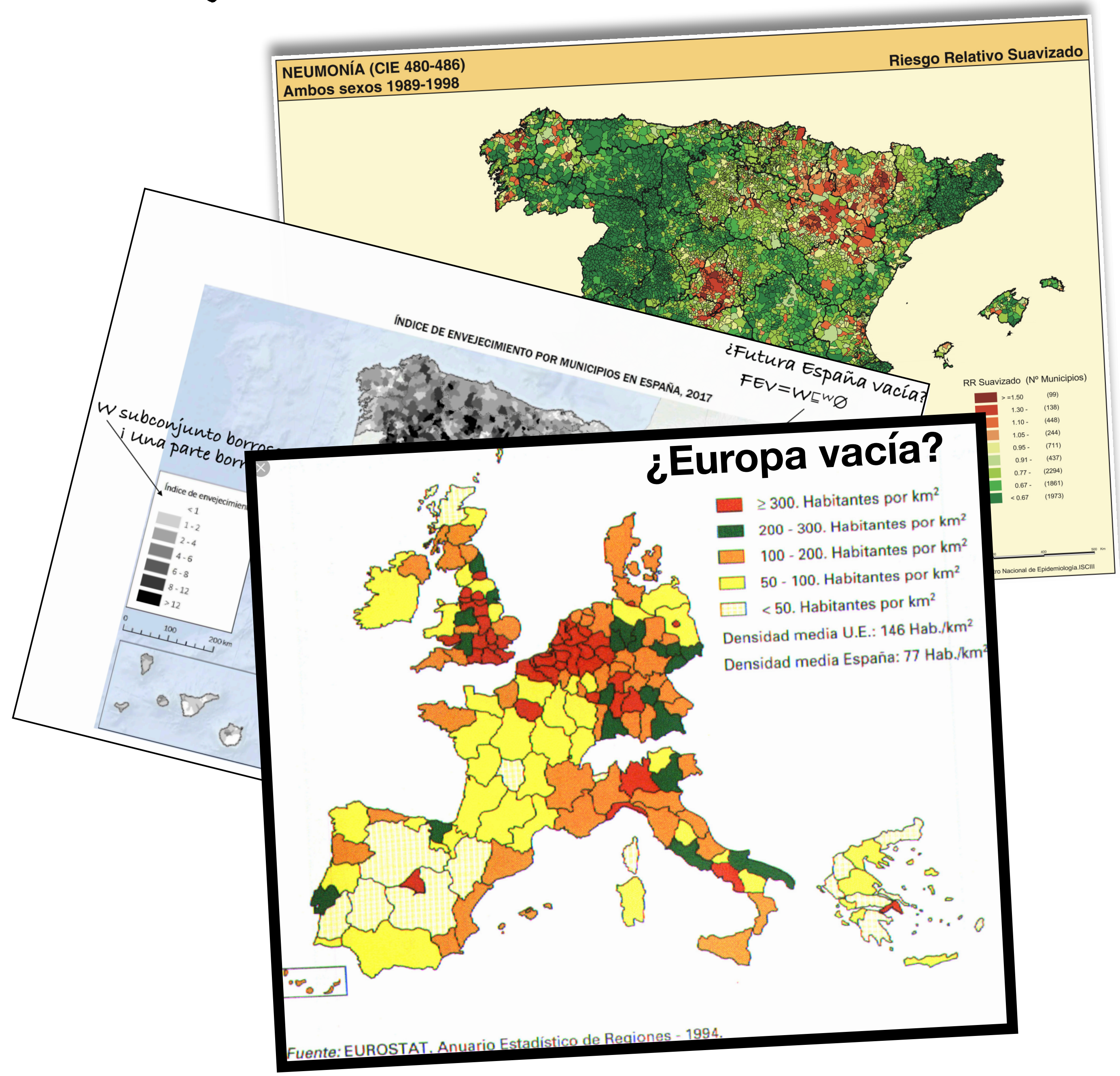
$\cancel{\varphi_W(C) = C \triangle W}$

Los elementos z tales que
z=w1→q=q−w1 para algún q,
son maximales, pero
¿hay más?



$A \sqsubseteq^{W1} B \Leftrightarrow (B \cdot W1) \leq A \leq (B + W1)$,
$((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1)$

Aplicaciones: Mapas de riesgo, contenido del vacío, subconjuntos señalados, ...Todos ellos con "matices"

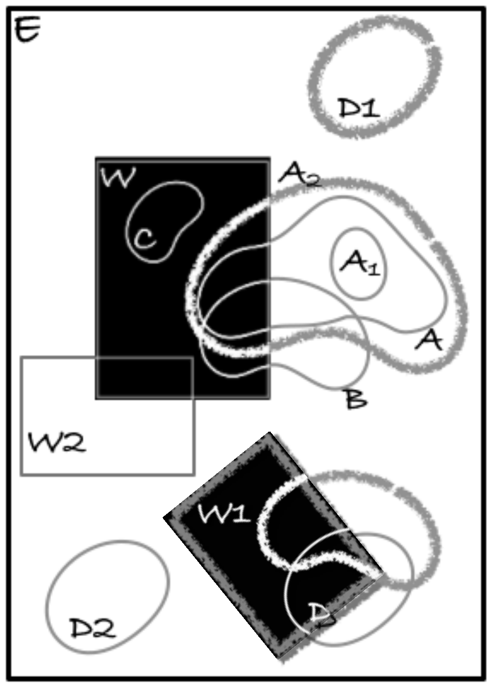


~~Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $X \to \varphi_W(X) = X \triangle W = (X' \cdot W) + (X \cdot W^c)$~~

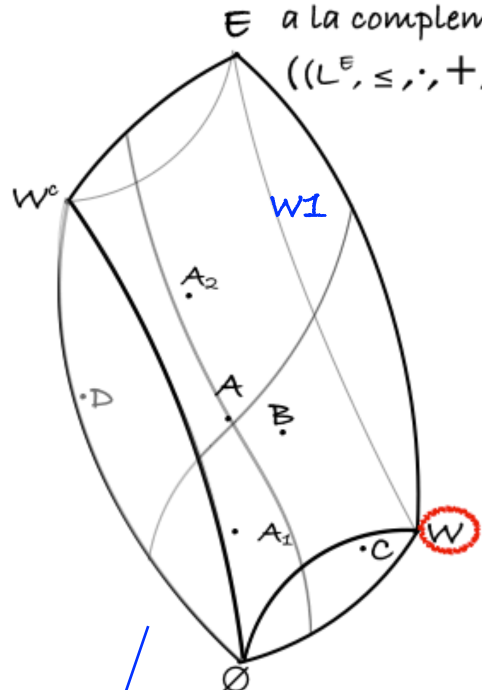
Sistemas algebraico $((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1))$, que es un inf-semiretículos.

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos

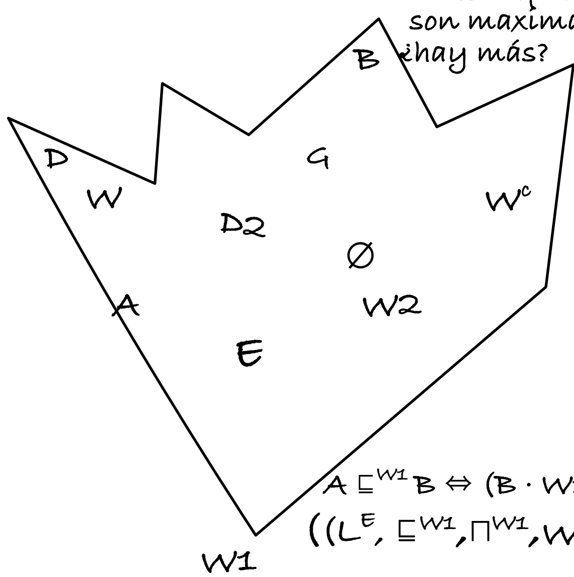
$\emptyset \leq E$, $A \leq E$, $B \leq E$, … , $E \leq E$



Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^{\circ})$



Los elementos z tales que $z = w1 \rightarrow q = q - w1$ para algún q, son maximales, pero ¿hay más?

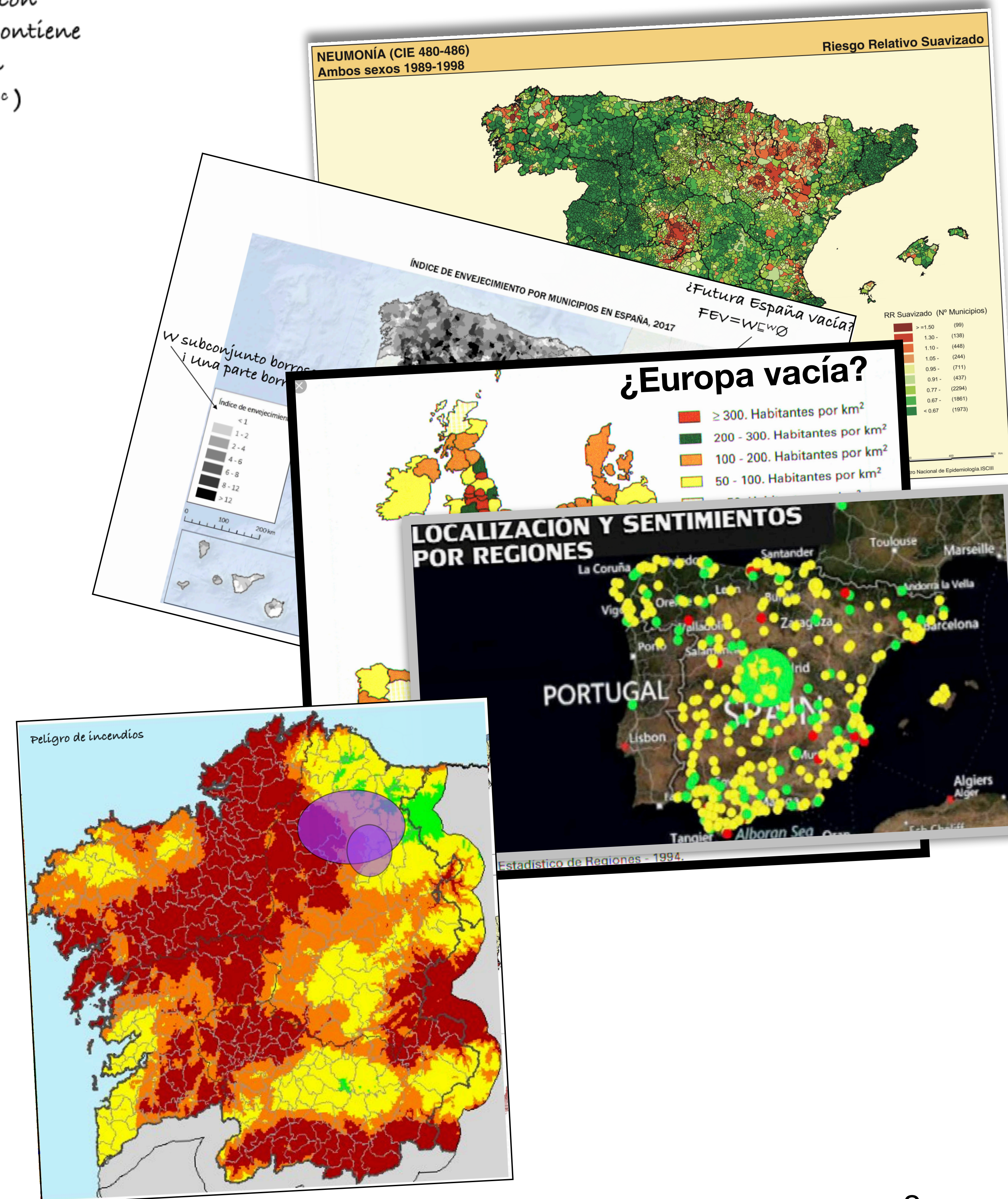


$A \sqsubseteq^{W1} B \Leftrightarrow (B \cdot W1) \leq A \leq (B + W1)$, $((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1)$

~~Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^{\circ})$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $X \rightarrow \varphi_W(X) = X \Delta W = (X' \cdot W) + (X \cdot W^c)$~~

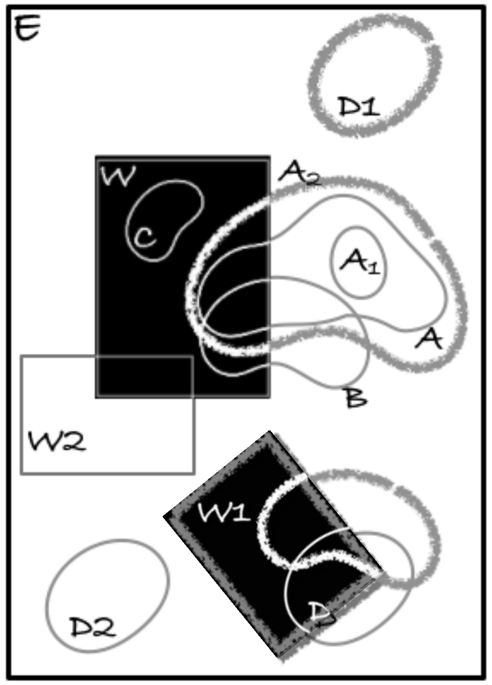
Sistemas algebraico $((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1))$, que es un inf-semiretículos.

Aplicaciones: Mapas de riesgo, contenido del vacío, subconjuntos señalados, …Todos ellos con "matices"



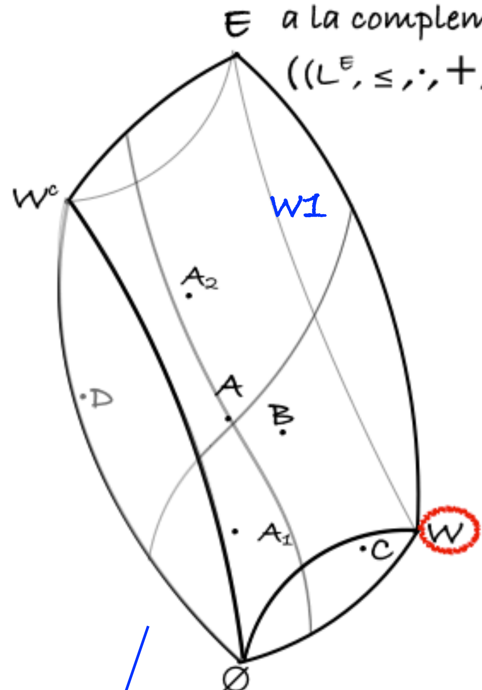
Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos

$\emptyset \leq E,\ A \leq E,\ B \leq E, \ldots,\ E \leq E$



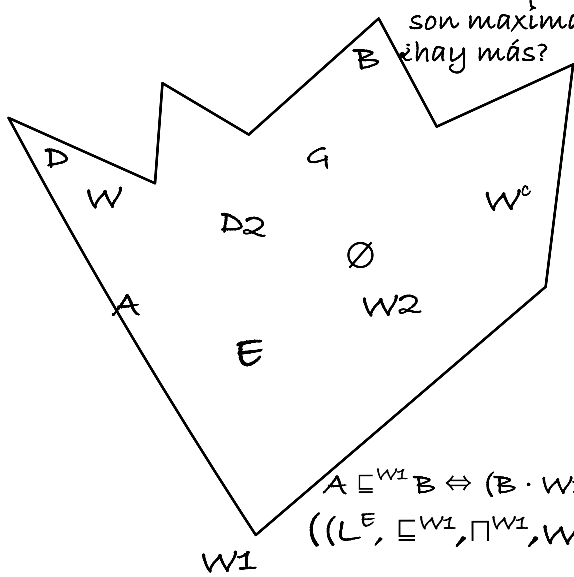
Sistema algebraico: Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación

$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$



~~$\varphi_W(C) \sqsubseteq W$~~

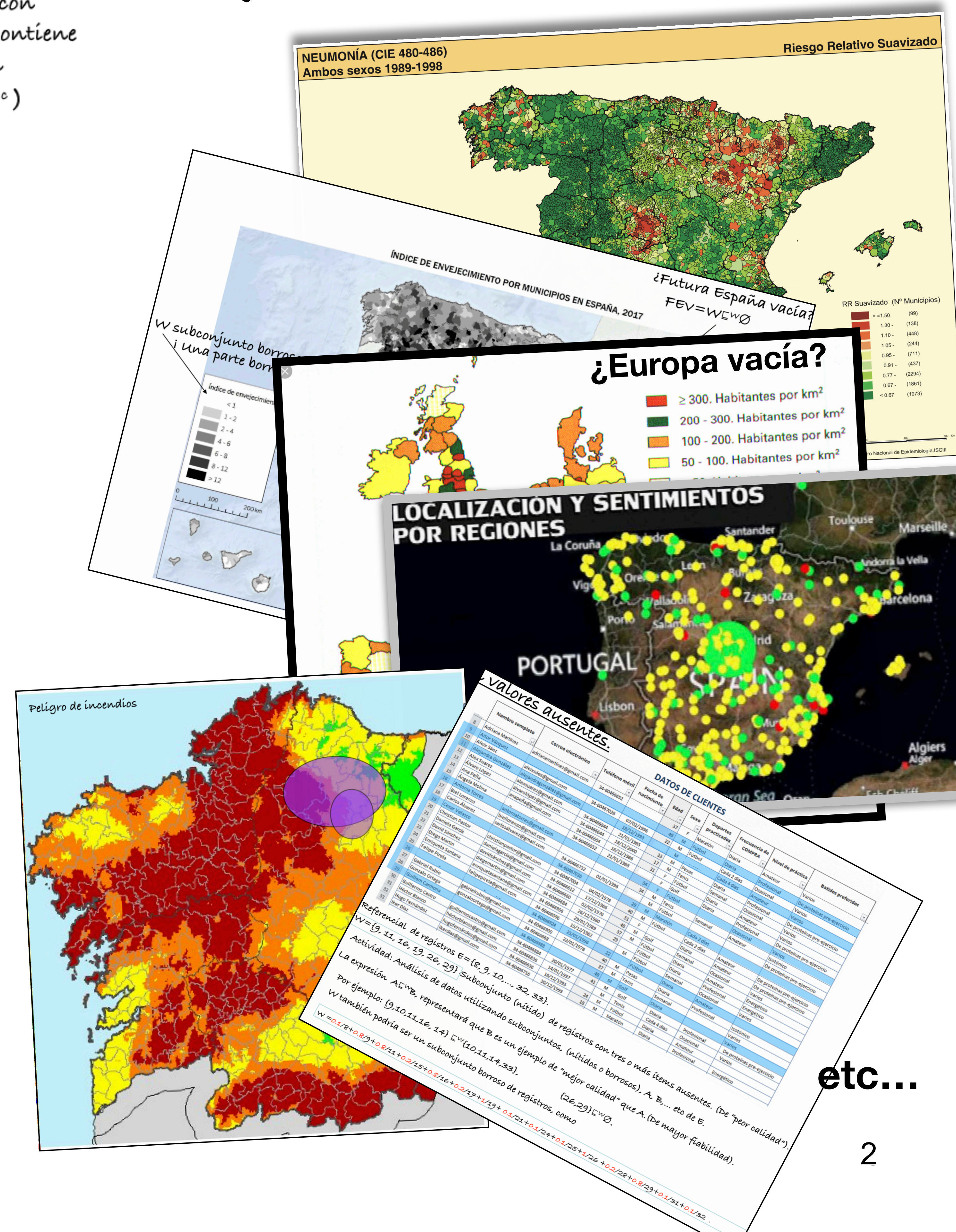
Los elementos z tales que $z = w1 \to q = q - w1$ para algún q, son maximales, pero ¿hay más?



$A \sqsubseteq^{W1} B \Leftrightarrow (B \cdot W1) \leq A \leq (B + W1)$,

$((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1)$

Aplicaciones: Mapas de riesgo, contenido del vacío, subconjuntos señalados, …Todos ellos con "matices"



etc…

~~Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo~~

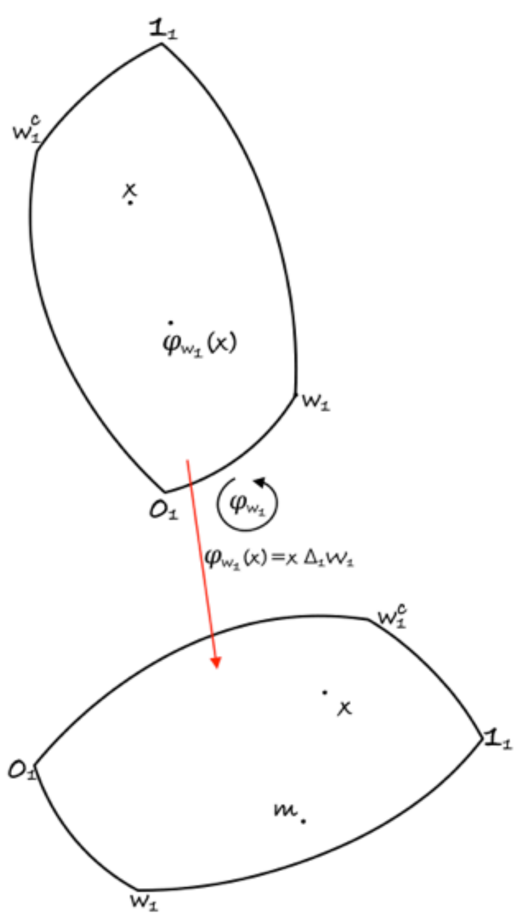
Sistemas algebraico $((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1))$, que es un inf-semiretículos.

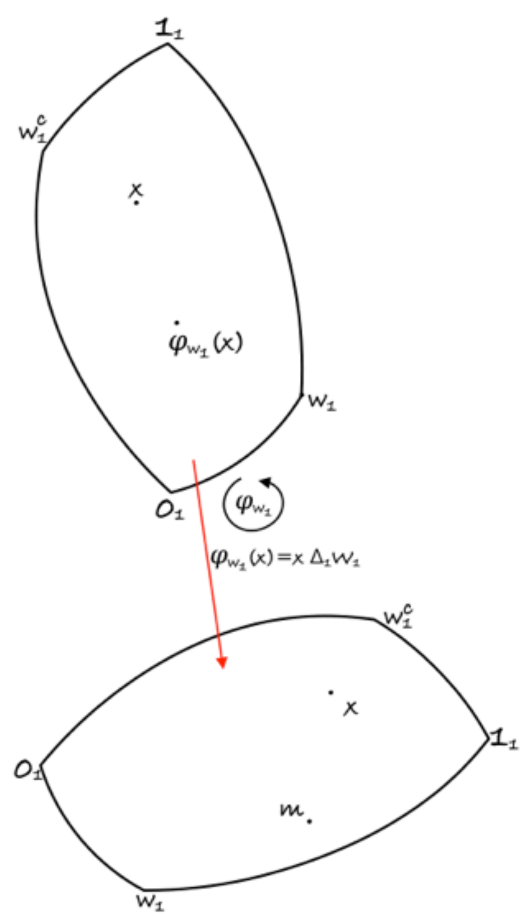
¿ Cómo se contempla los morfismos g: ($\boldsymbol{L^E}$, ≤)→($\boldsymbol{L^F}$, ≤) al introducir "perspectivas" (w,v)$\in \boldsymbol{L^E} \times \boldsymbol{L^F}$?

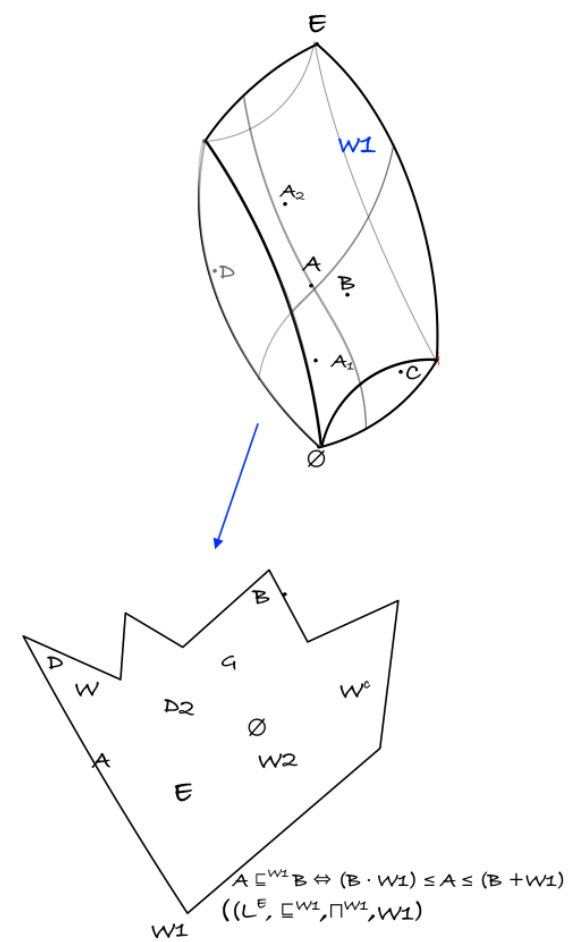
$$(\boldsymbol{L^E}, \sqsubseteq^{w}) \qquad (\boldsymbol{L^F}, \sqsubseteq^{v})$$

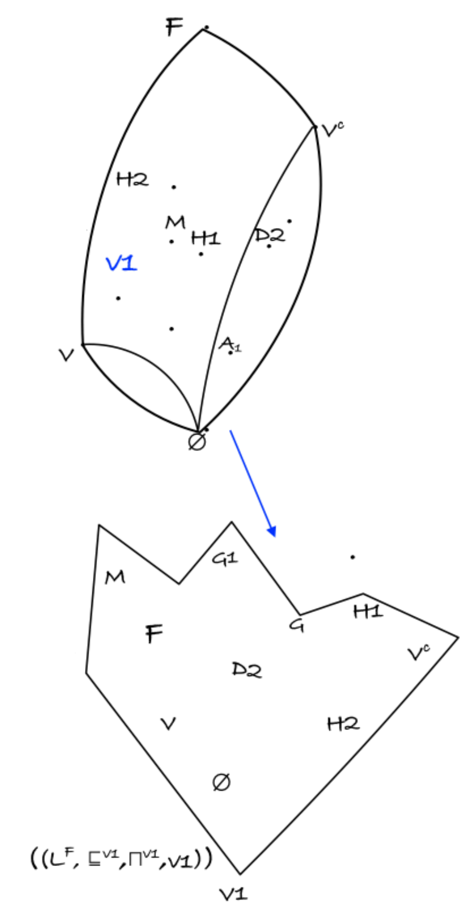
¿ Cómo se contempla los morfismos g: $(L^E, \leq) \rightarrow (L^F, \leq)$ al introducir "perspectivas" $(w,v) \in L^E \times L^F$?

$(L^E, \sqsubseteq^W)$ $\quad$ $(L^F, \sqsubseteq^V)$



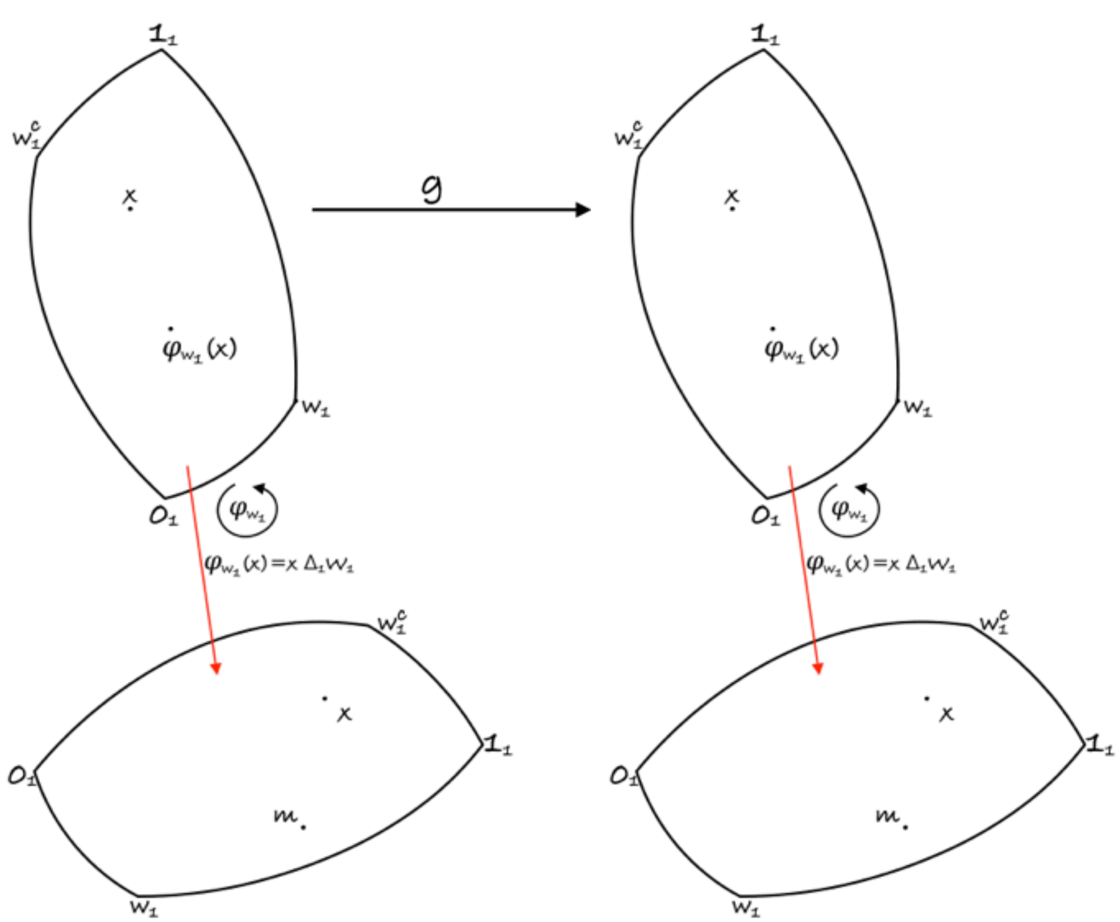


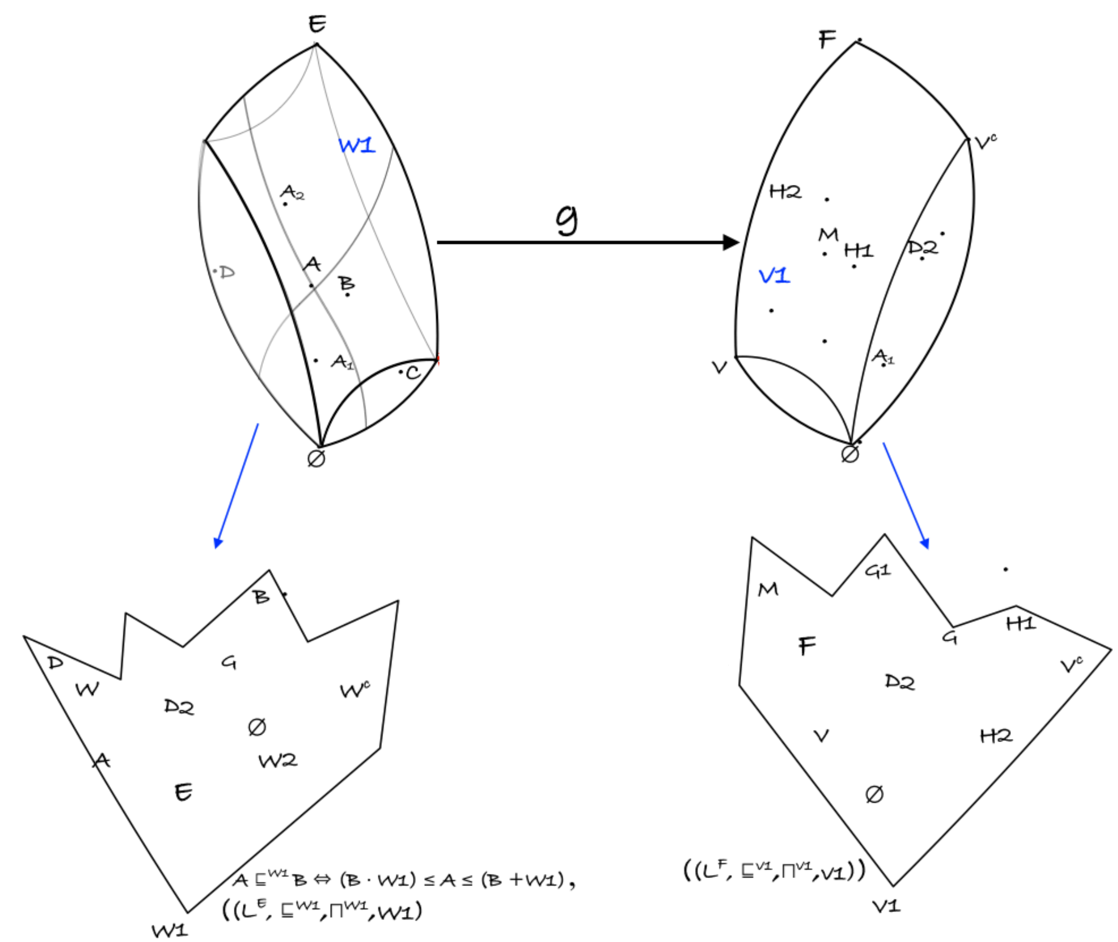




¿ Cómo se contempla los morfismos g: $(L^E, \leq) \rightarrow (L^F, \leq)$ al introducir “perspectivas” $(w,v) \in L^E \times L^F$?

$(L^E, \sqsubseteq^W)$ $(L^F, \sqsubseteq^V)$

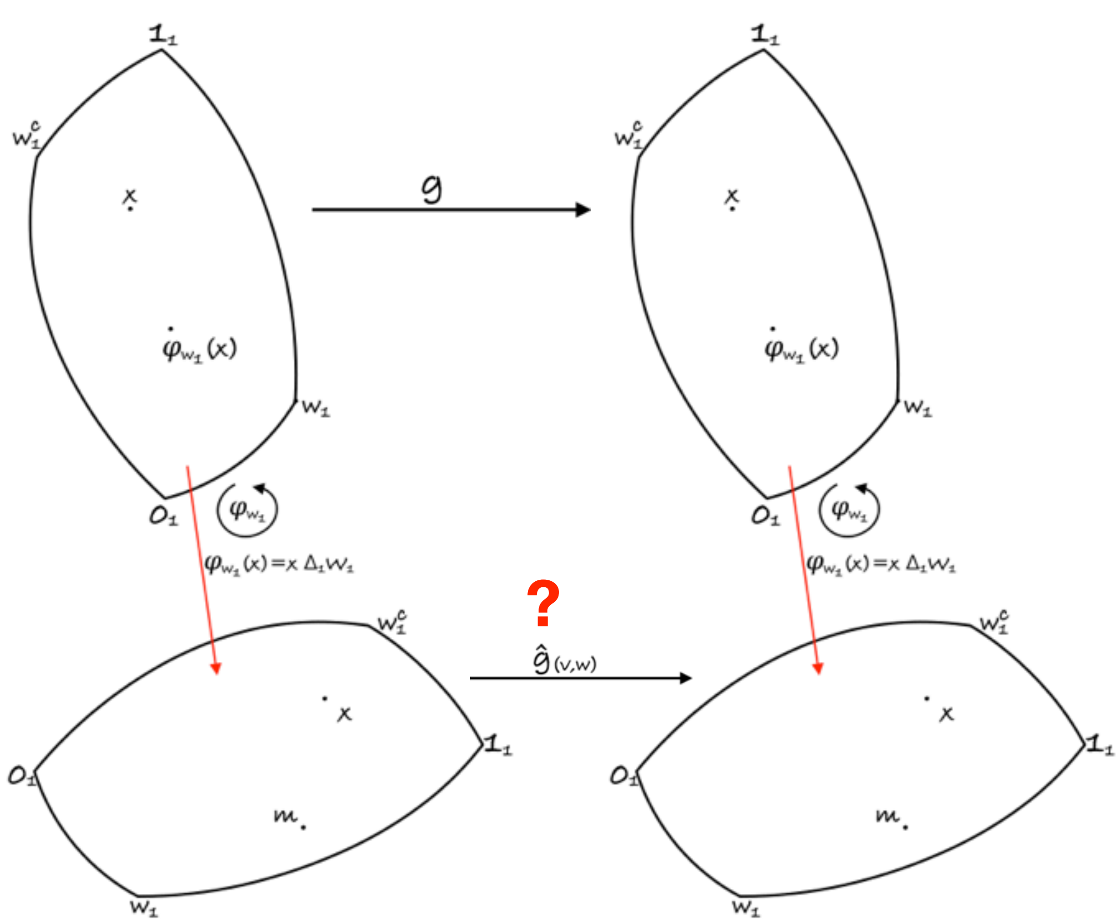


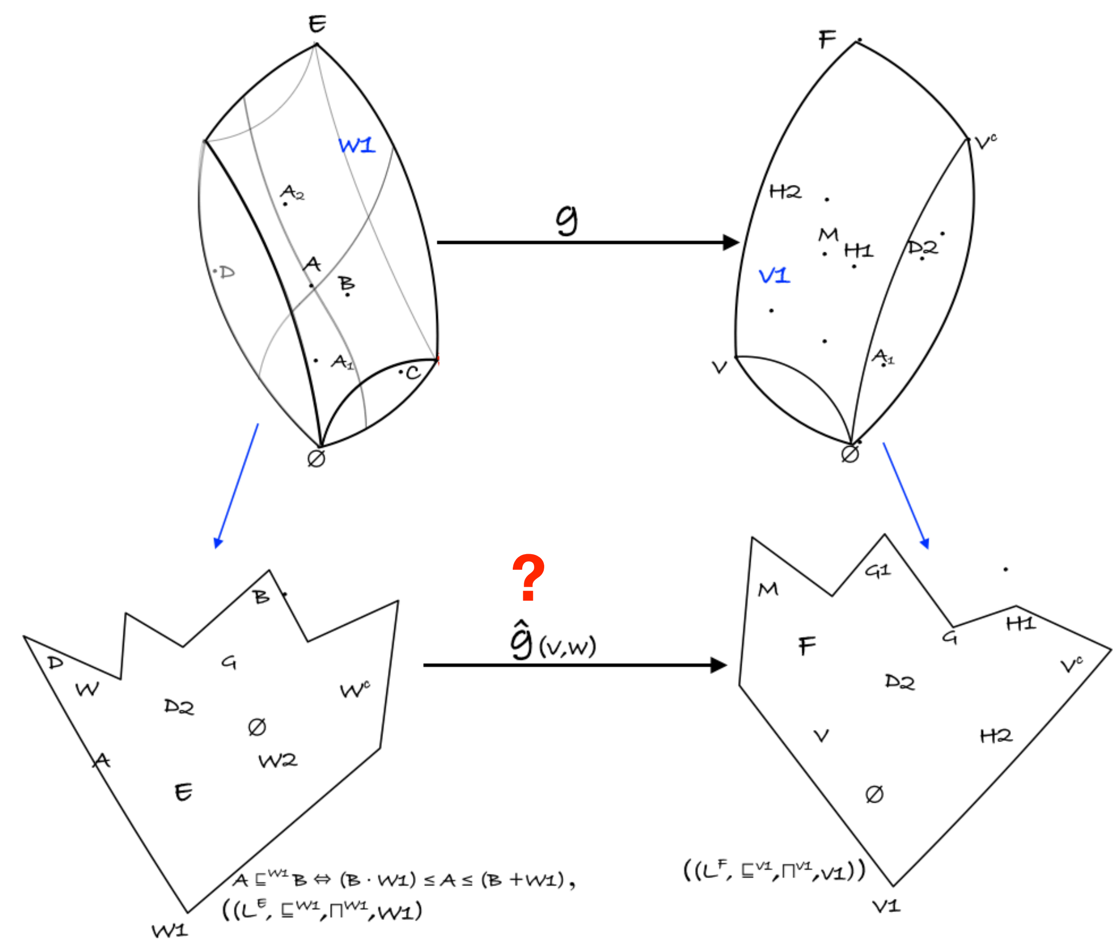


¿ Cómo se contempla los morfismos g: $(L^E, \leq) \to (L^F, \leq)$ al introducir "perspectivas" $(w,v) \in L^E X L^F$?

?

$\hat{g}_{(w,v)}: (L^E, \sqsubseteq^W) \to (L^F, \sqsubseteq^V)$

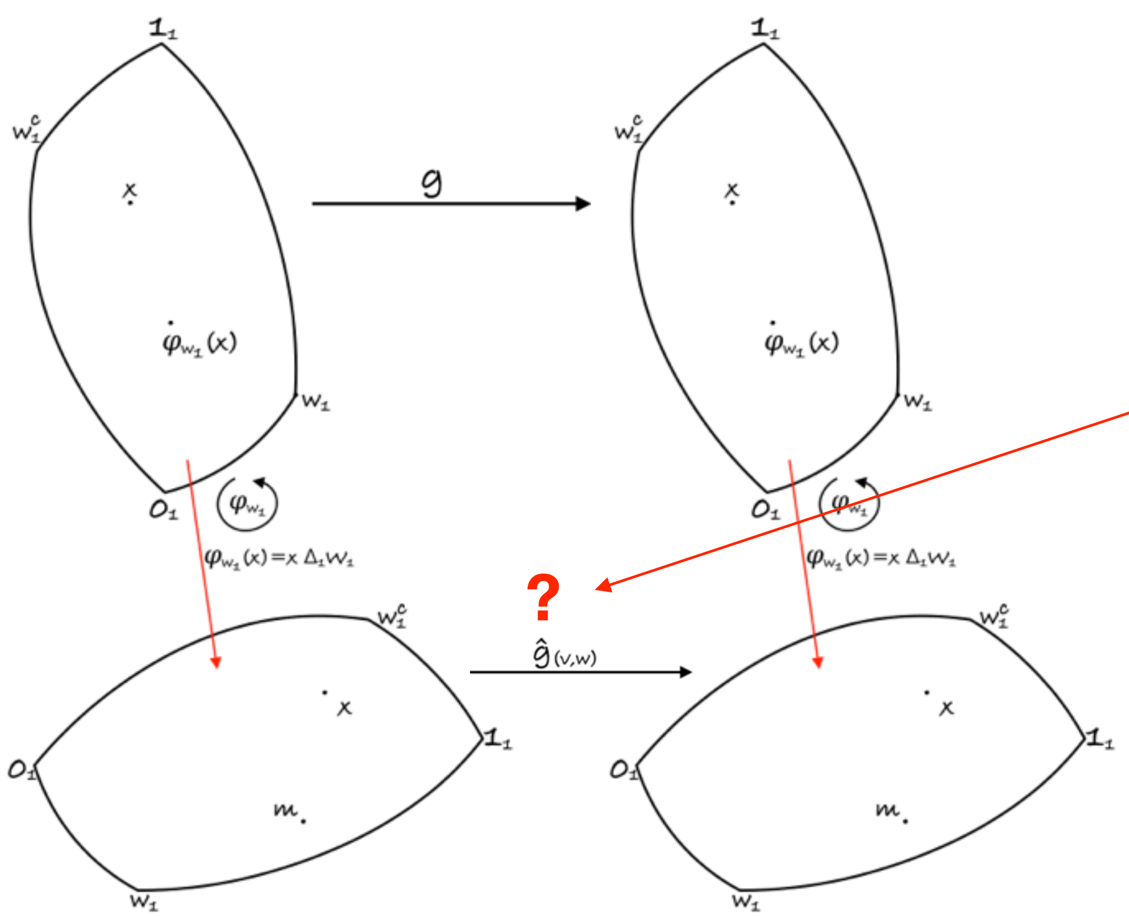




¿ Cómo se contempla los morfismos g: $(L^E, \leq) \rightarrow (L^F, \leq)$ al introducir "perspectivas" $(w,v) \in L^E \times L^F$?

?

$\hat{g}_{(w,v)}: (L^E, \sqsubseteq^W) \rightarrow (L^F, \sqsubseteq^V)$



Objetivo principal de este trabajo

Relación $\hat{R}_{\hat{W}}$ entre los retículos $(L_1, \sqsubseteq^{W_1})$ y $(L_2, \sqsubseteq^{W_2})$ obtenida de otra R entre los retículos $(L_1, \leq_1)$ y $(L_2, \leq_2)$.

<u>Nota</u>. Si en un retículo $(L,\leq,\cdot,+,0,1)$, acotado y distributivo con una negación fuerte $':L\to L$, el elemento $w\in L$ tiene complemento w^c tal que $w'=w^c$, entonces:

$$(x\sqsubseteq^{w}y)\Leftrightarrow \varphi_w(x)\leq\varphi_w(y),$$

siendo $\varphi_w(z)=z\triangle w=z'\cdot w+z\cdot w^c\quad\forall z\in L.$

(Interpretación: $\sqsubseteq^{w}$ es una "extensión": $(\widehat{\leq})_w$ de la relación $\leq$)

Álgebras determinadas por retículos distributivos con una negación fuerte, un nítido fijo y un operador diferencia:

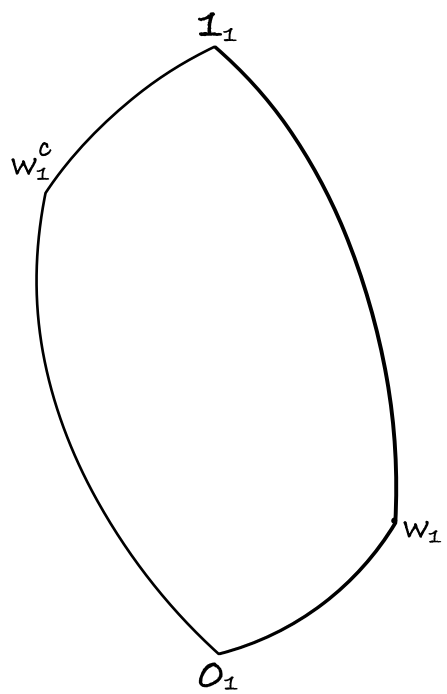
$$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '^{1}, w_1, \Delta_1)$$

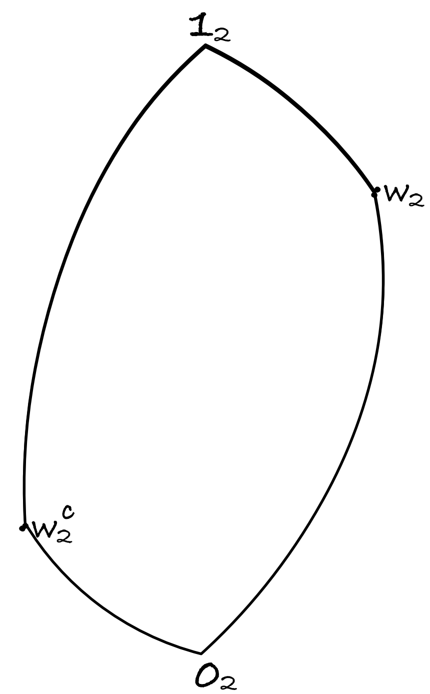
Para $i \in \{1,2\}$

$w_i \in N(L_i)$, es decir, t.q. tiene complemento y $(w_i)'^{i} = (w_i)^c$

$z_i \, \Delta_i \, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall z_i \in L_i$

$$(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '^{2}, w_2, \Delta_2)$$





Álgebras determinadas por retículos distributivos con una negación fuerte, un nítido fijo y un operador diferencia:

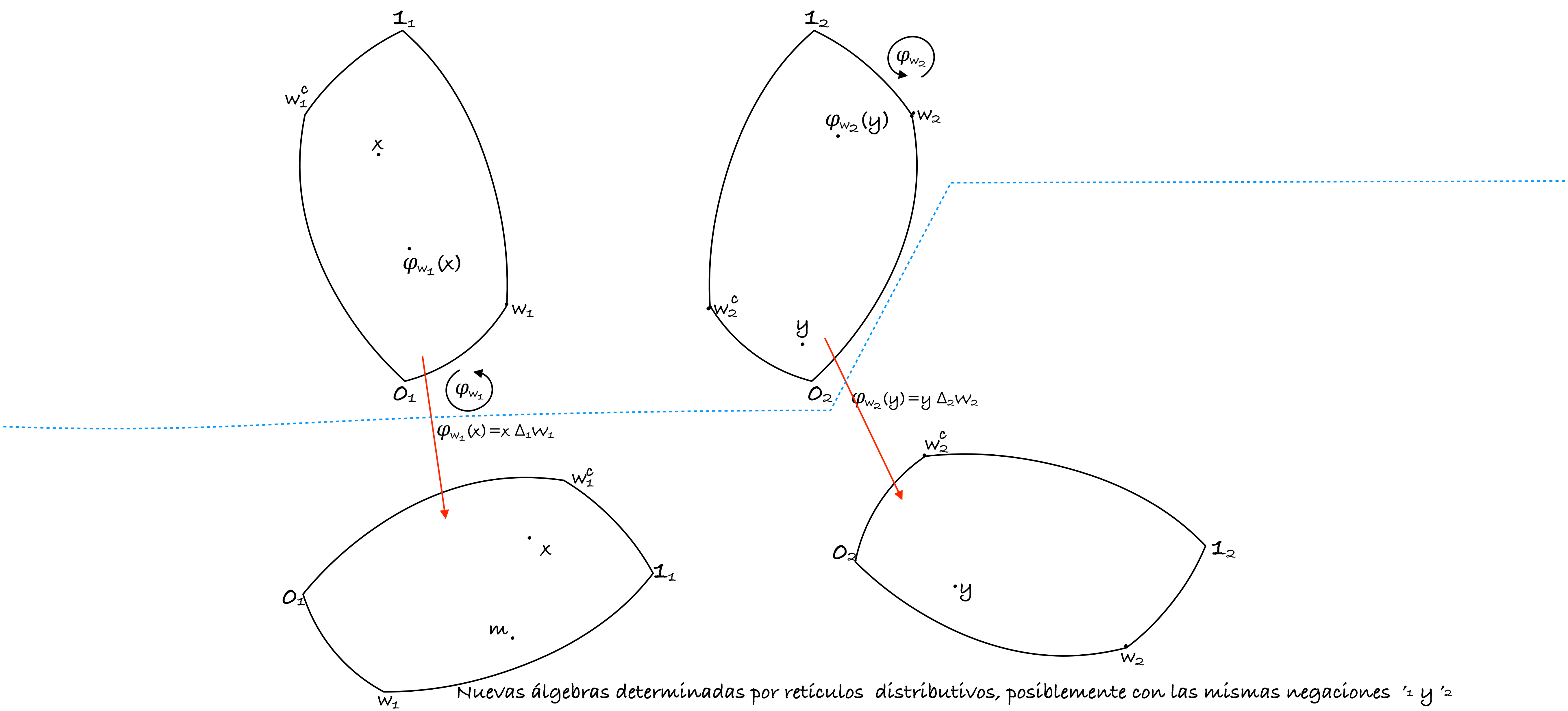
$$(L_1, \leq_1 , \cdot_1 , +_1 , 0_1 , 1_1), '_1 , w_1 , \Delta_1)$$

Para $i \in \{1,2\}$

$w_i \in N(L_i)$, es decir, t.q. tiene complemento y $(w_i)'_i = (w_i)^c$

$z_i \, \Delta_i \, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall z_i \in L_i$

$$(L_2, \leq_2 , \cdot_2 , +_2 , 0_2 , 1_2), '_2 , w_2 , \Delta_2)$$



Nuevas álgebras determinadas por retículos distributivos, posiblemente con las mismas negaciones $'_1$ y $'_2$

$((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1)$ $\qquad$ $((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$

Álgebras determinadas por retículos distributivos con una negación fuerte, un nítido fijo y un operador diferencia:

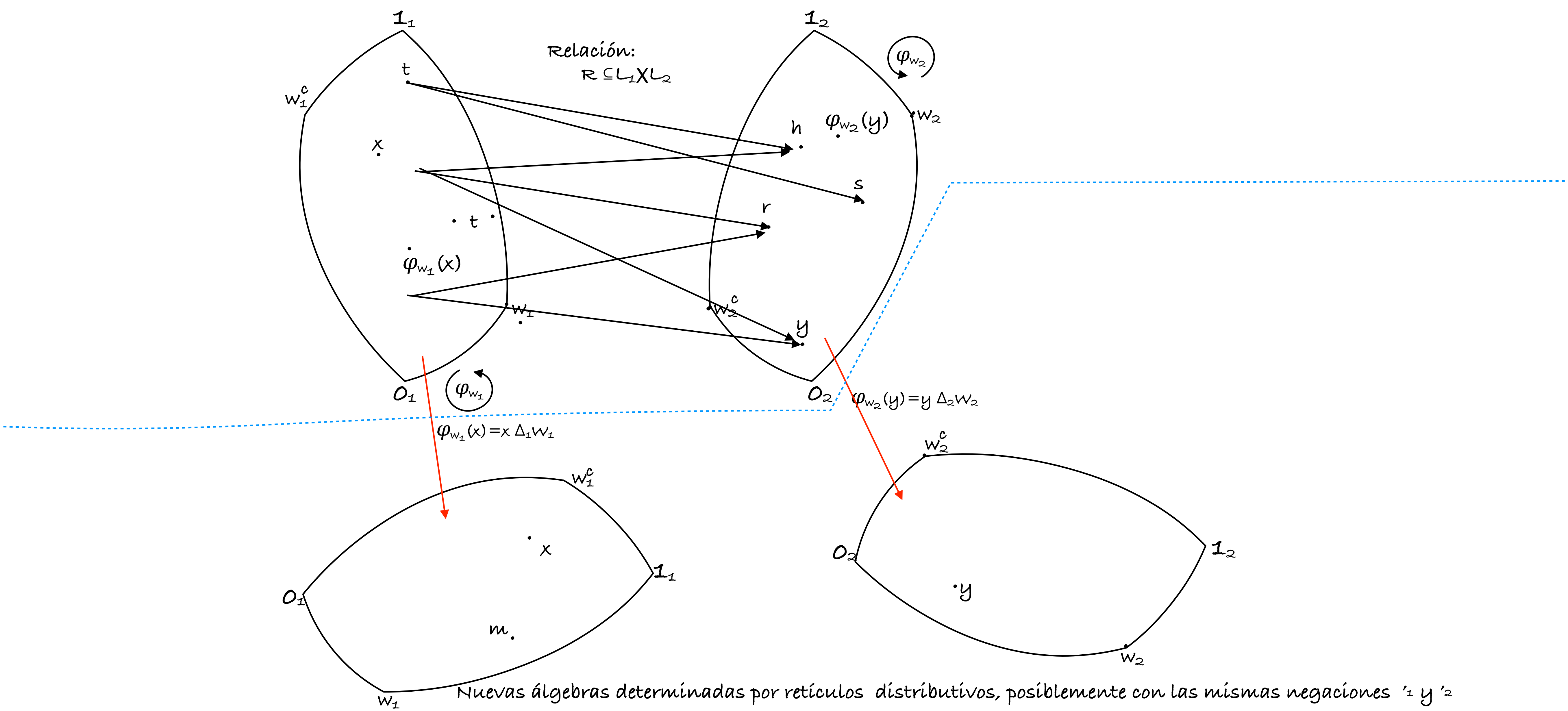
$$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$$

Para $i \in \{1,2\}$

$w_i \in N(L_i)$, es decir, t.q. tiene complemento y $(w_i)'^{i} = (w_i)^c$

$z_i \, \Delta_i \, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall z_i \in L_i$

$$(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$$



Nuevas álgebras determinadas por retículos distributivos, posiblemente con las mismas negaciones $'_1$ y $'_2$

$((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1)$ $\qquad$ $((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$

Álgebras determinadas por retículos distributivos con una negación fuerte, un nítido fijo y un operador diferencia:

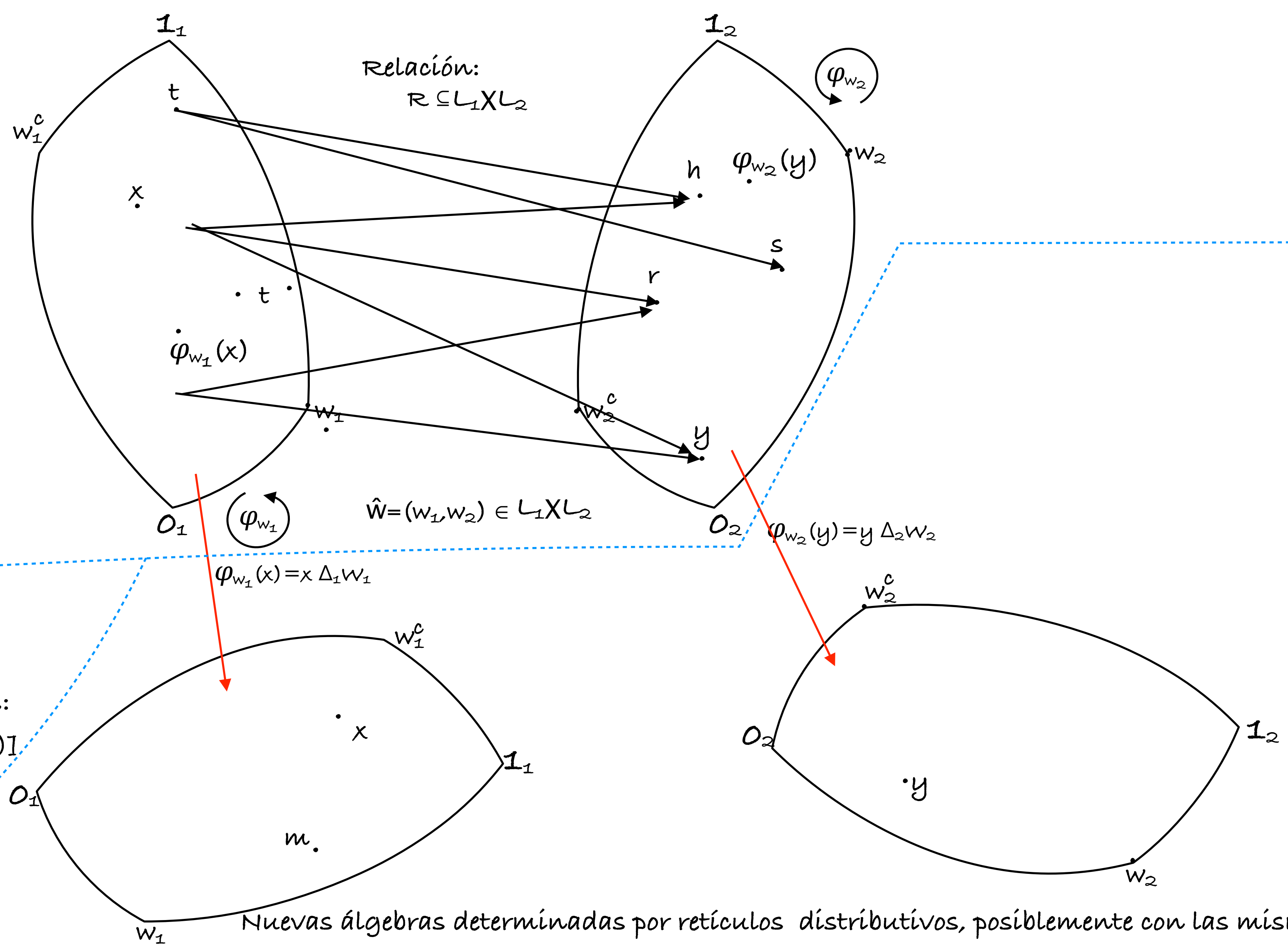
$$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '^1, w_1, \Delta_1)$$

Para $i \in \{1,2\}$

$w_i \in N(L_i)$, es decir, t.q. tiene complemento y $(w_i)'^i = (w_i)^c$

$z_i \, \Delta_i \, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall z_i \in L_i$

$$(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '^2, w_2, \Delta_2)$$



Relación binaria $R \subseteq L_1 X L_2$:

$xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R$

Su extensión $\hat{R}_{\hat{W}} \subseteq L_1 X L_2$ es:

$x(\hat{R}_{\hat{W}})y \Leftrightarrow [(\varphi_{w_1}(x)) \; R \; (\varphi_{w_2}(y))]$

Nuevas álgebras determinadas por retículos distributivos, posiblemente con las mismas negaciones $'^1$ y $'^2$

$((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '^1)$ $\qquad$ $((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '^2)$

$(x \sqsubseteq^W y) \Leftrightarrow \varphi_w(x) \leq \varphi_w(y)$

Álgebras determinadas por retículos distributivos con una negación fuerte, un nítido fijo y un operador diferencia:

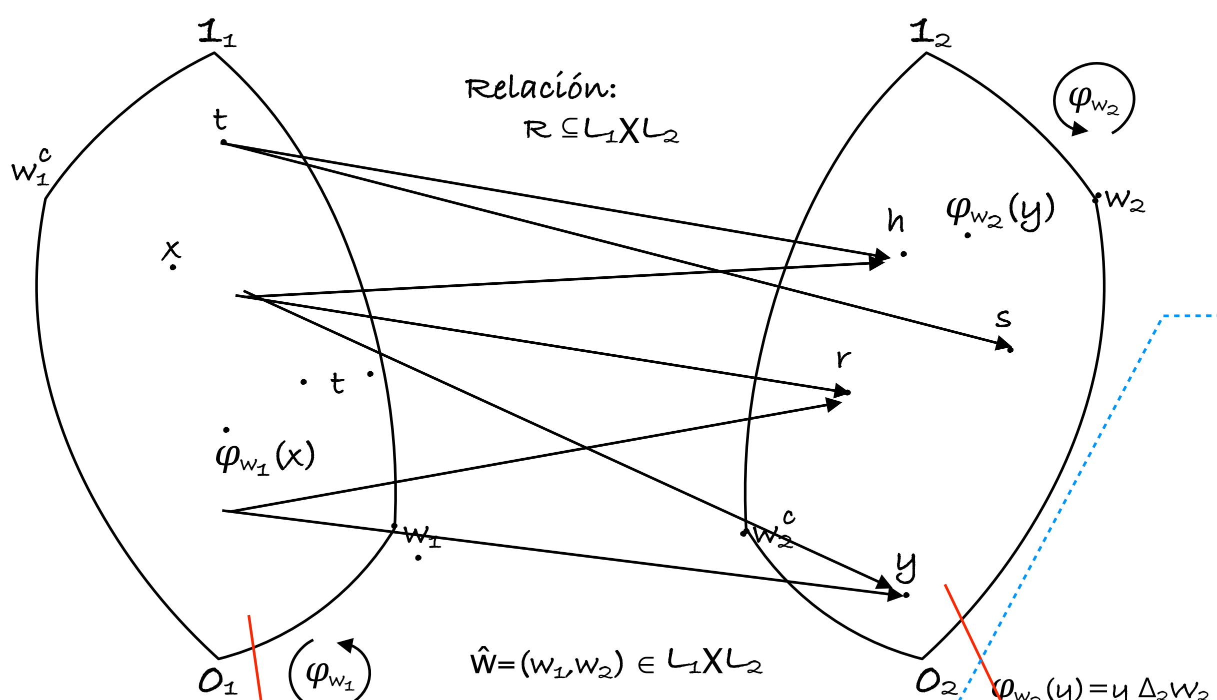
$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$

Para $i \in \{1,2\}$

$w_i \in N(L_i)$, es decir, t.q. tiene complemento y $(w_i)'^i = (w_i)^c$

$z_i \, \Delta_i \, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall \, z_i \in L_i$

$(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$



$\hat{w} = (w_1, w_2) \in L_1 X L_2$

$\varphi_{w_2}(y) = y \, \Delta_2 w_2$

$\varphi_{w_1}(x) = x \, \Delta_1 w_1$

$\hat{R}_{\hat{w}} \subseteq L_1 X L_2$

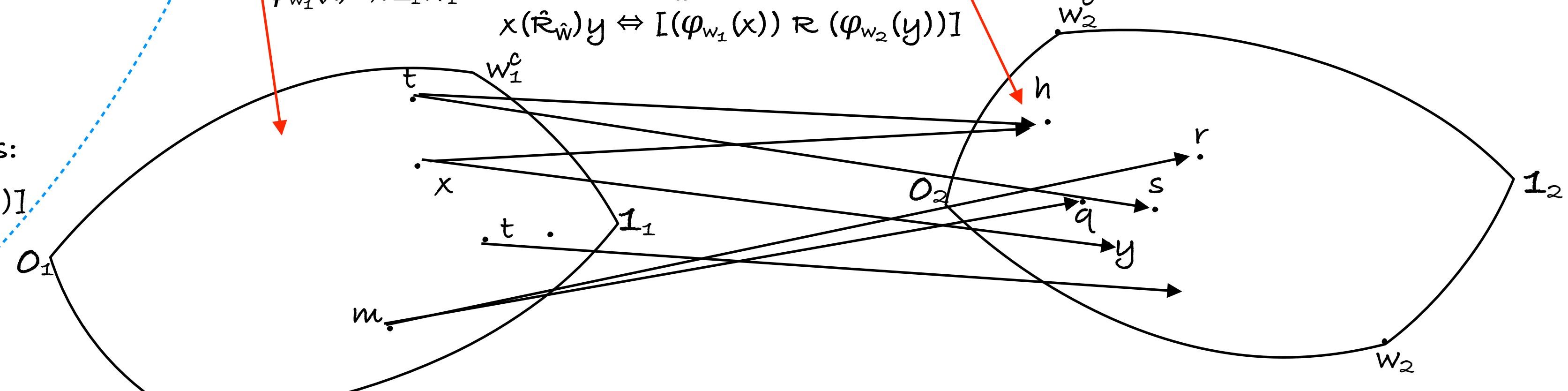
$x (\hat{R}_{\hat{w}}) y \Leftrightarrow [(\varphi_{w_1}(x)) \; R \; (\varphi_{w_2}(y))]$

Relación binaria $R \subseteq L_1 X L_2$:

$xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R$

Su <u>extensión</u> $\hat{R}_{\hat{w}} \subseteq L_1 X L_2$ es:

$x (\hat{R}_{\hat{w}}) y \Leftrightarrow [(\varphi_{w_1}(x)) \; R \; (\varphi_{w_2}(y))]$



w_1

Nuevas álgebras determinadas por retículos distributivos, posiblemente con las mismas negaciones $'_1$ y $'_2$

$((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1)$

$((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$

Álgebras determinadas por retículos distributivos con una negación fuerte, un nítido fijo y un operador diferencia:

$$(L_1, \le_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$$

Para $i \in \{1,2\}$

$w_i \in N(L_i)$, es decir, t.q. tiene complemento y $(w_i$

$z_i \, \Delta_i \, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall z_i \in L_i$

$$(L_2, \le_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$$

$$\hat{R}_{\hat{W}} \subseteq L_1 X L_2$$

$$x(\hat{R}_{\hat{W}})y \Leftrightarrow [(\varphi_{w_1}(x)) \, R \, (\varphi_{w_2}(y))]$$

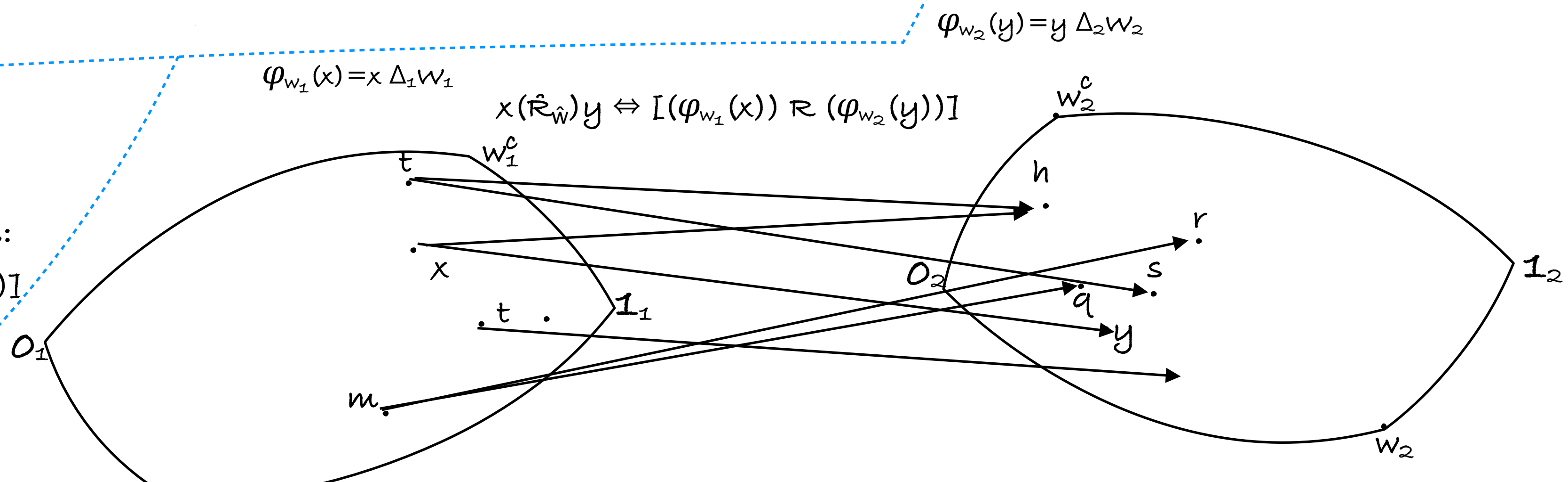
$$\Leftrightarrow [(x \Delta w_1) \, R \, (y \Delta w_2)]$$

Relación binaria $R \subseteq L_1 X L_2$:

$xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R$

Su <u>extensión</u> $\hat{R}_{\hat{W}} \subseteq L_1 X L_2$ es:

$x(\hat{R}_{\hat{W}})y \Leftrightarrow [(\varphi_{w_1}(x)) \, R \, (\varphi_{w_2}(y))]$



w_1

Nuevas álgebras determinadas por retículos distributivos, posiblemente con las mismas negaciones $'_1$ y $'_2$

$((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1)$

$((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$

Álgebras determinadas por retículos distributivos con una negación fuerte, un nítido fijo y un operador diferencia:

$$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$$

Para $i \in \{1,2\}$

$w_i \in N(L_i)$, es decir, t.q. tiene complemento y $(w_i$

$z_i \,\Delta_i\, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall\, z_i \in L_i$

$$(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$$

$$\hat{R}_{\hat{W}} \subseteq L_1 X L_2$$

$$x(\hat{R}_{\hat{W}})y \Leftrightarrow [(\varphi_{w_1}(x))\ R\ (\varphi_{w_2}(y))]$$
$$\Leftrightarrow [(x \triangle w_1)\ R\ (y \triangle w_2)]$$

si $\hat{W}_{ij} = (w_i, w_j)$, se verifica:

$$(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})^{op} = (\widehat{R^{op}})_{\hat{W}_{21}} \;\forall (w_1, w_2) \in N(L_1) X N(L_2)$$

$\varphi_{w_2}(y) = y\, \Delta_2 w_2$

$\varphi_{w_1}(x) = x\, \Delta_1 w_1$

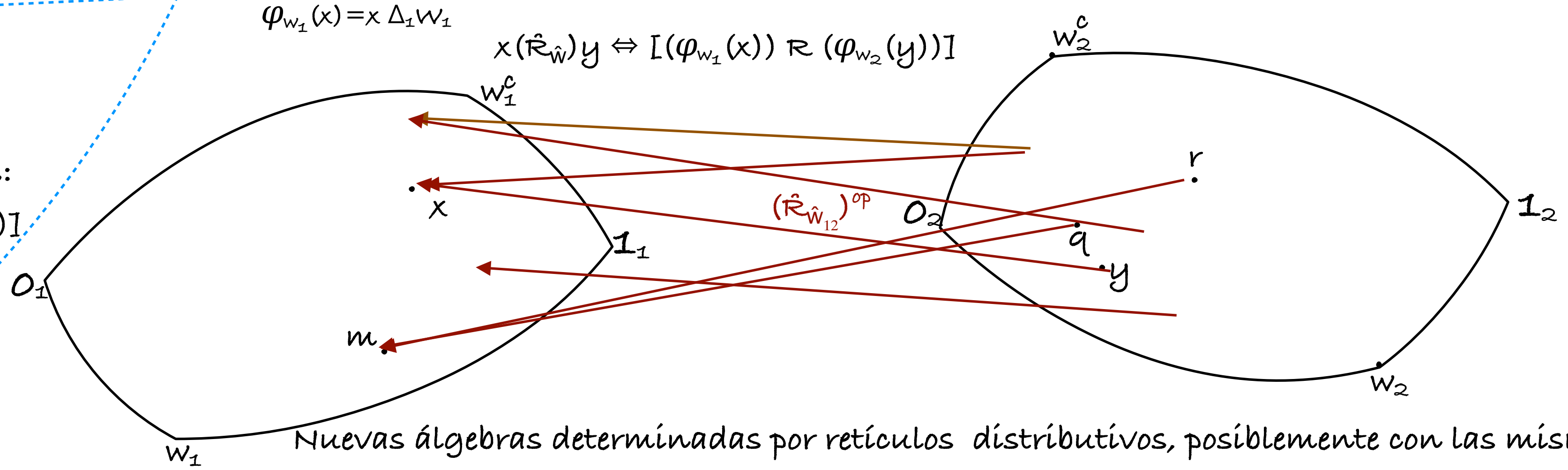
$x(\hat{R}_{\hat{W}})y \Leftrightarrow [(\varphi_{w_1}(x))\ R\ (\varphi_{w_2}(y))]$

Relación binaria $R \subseteq L_1 X L_2$:

$xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R$

Su extensión $\hat{R}_{\hat{W}} \subseteq L_1 X L_2$ es:

$x(\hat{R}_{\hat{W}})y \Leftrightarrow [(\varphi_{w_1}(x))\ R\ (\varphi_{w_2}(y))]$



Nuevas álgebras determinadas por retículos distributivos, posiblemente con las mismas negaciones $'_1$ y $'_2$

$((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1)$ $\quad$ $((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$

Álgebras determinadas por retículos distributivos con una negación fuerte, un nítido fijo y un operador diferencia:

$$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$$

Para $i \in \{1,2\}$

$w_i \in N(L_i)$, es decir, t.q. tiene complemento y $(w_i$

$z_i \,\Delta_i\, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall\, z_i \in L_i$

$$(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$$

$$\hat{R}_{\hat{W}} \subseteq L_1 X L_2$$

$$x(\hat{R}_{\hat{W}})y \Leftrightarrow [(\varphi_{w_1}(x)) \,R\, (\varphi_{w_2}(y))]$$

$$\Leftrightarrow [(x \triangle w_1) \,R\, (y \triangle w_2)]$$

Si R y S son relaciones de L_1 en L_2 entonces, para todo $\hat{W}_{12} = (w_1, w_2) \in L_1 X L_2$:

$(R \subseteq S) \Rightarrow ((\hat{R}_{\hat{W}_{12}}) \subseteq (\hat{S}_{\hat{W}_{12}}))$,

$(\widehat{R \cap S})_{\hat{W}_{12}} = ((\hat{R}_{\hat{W}_{12}}) \cap (\hat{S}_{\hat{W}_{12}}))$, $(\widehat{R \cup S})_{\hat{W}_{12}} = ((\hat{R}_{\hat{W}_{12}}) \cup (\hat{S}_{\hat{W}_{12}}))$.

si $\hat{W}_{ij} = (w_i, w_j)$, se verifica:

$$(\hat{R}_{\hat{W}_{12}})^{op} = (\widehat{R^{op}})_{\hat{W}_{21}} \quad \forall (w_1, w_2) \in N(L_1) X N(L_2)$$

$\varphi_{w_2}(y) = y \,\Delta_2 w_2$

Relación binaria $R \subseteq L_1 X L_2$:

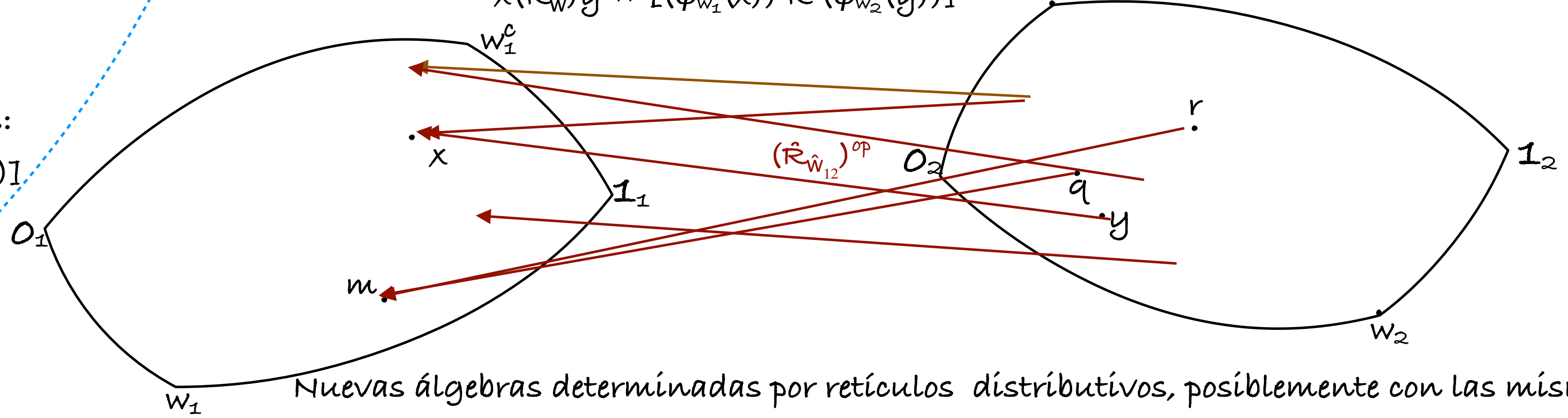
$xRy \Leftrightarrow (x, y) \in R$

Su extensión $\hat{R}_{\hat{W}} \subseteq L_1 X L_2$ es:

$x(\hat{R}_{\hat{W}})y \Leftrightarrow [(\varphi_{w_1}(x)) \,R\, (\varphi_{w_2}(y))]$

$\varphi_{w_1}(x) = x \,\Delta_1 w_1$

$x(\hat{R}_{\hat{W}})y \Leftrightarrow [(\varphi_{w_1}(x)) \,R\, (\varphi_{w_2}(y))]$



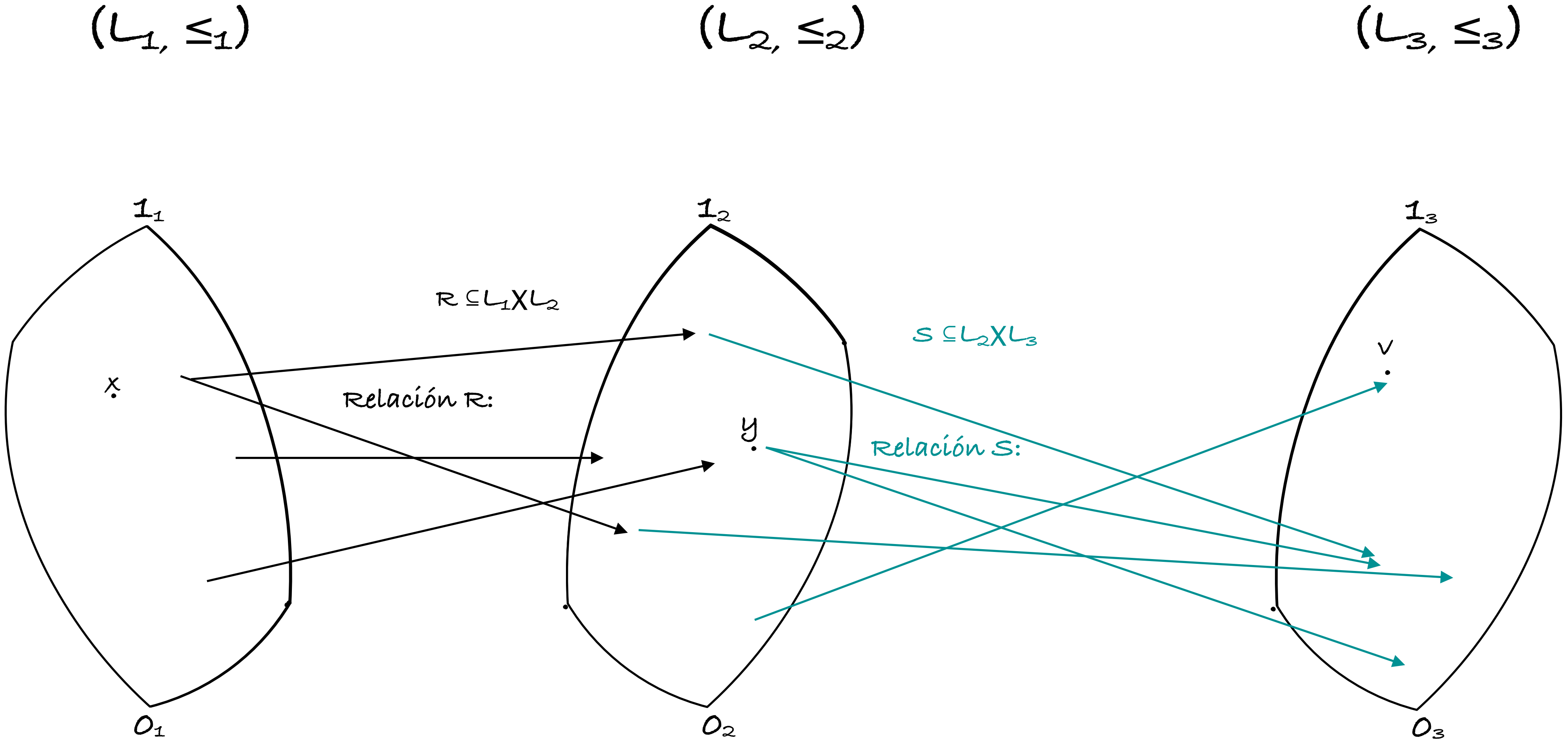
Nuevas álgebras determinadas por retículos distributivos, posiblemente con las mismas negaciones $'_1$ y $'_2$

$((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1)$ $\qquad$ $((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$

Composición $\hat{R}_{\hat{W}_{12}} \circ \hat{S}_{\hat{W}_{23}}$ de las extensiones en retículos $(L_1, \sqsubseteq^{W_i})$, de relaciones R y S entre retículos $(L_1, \leq_i)$.

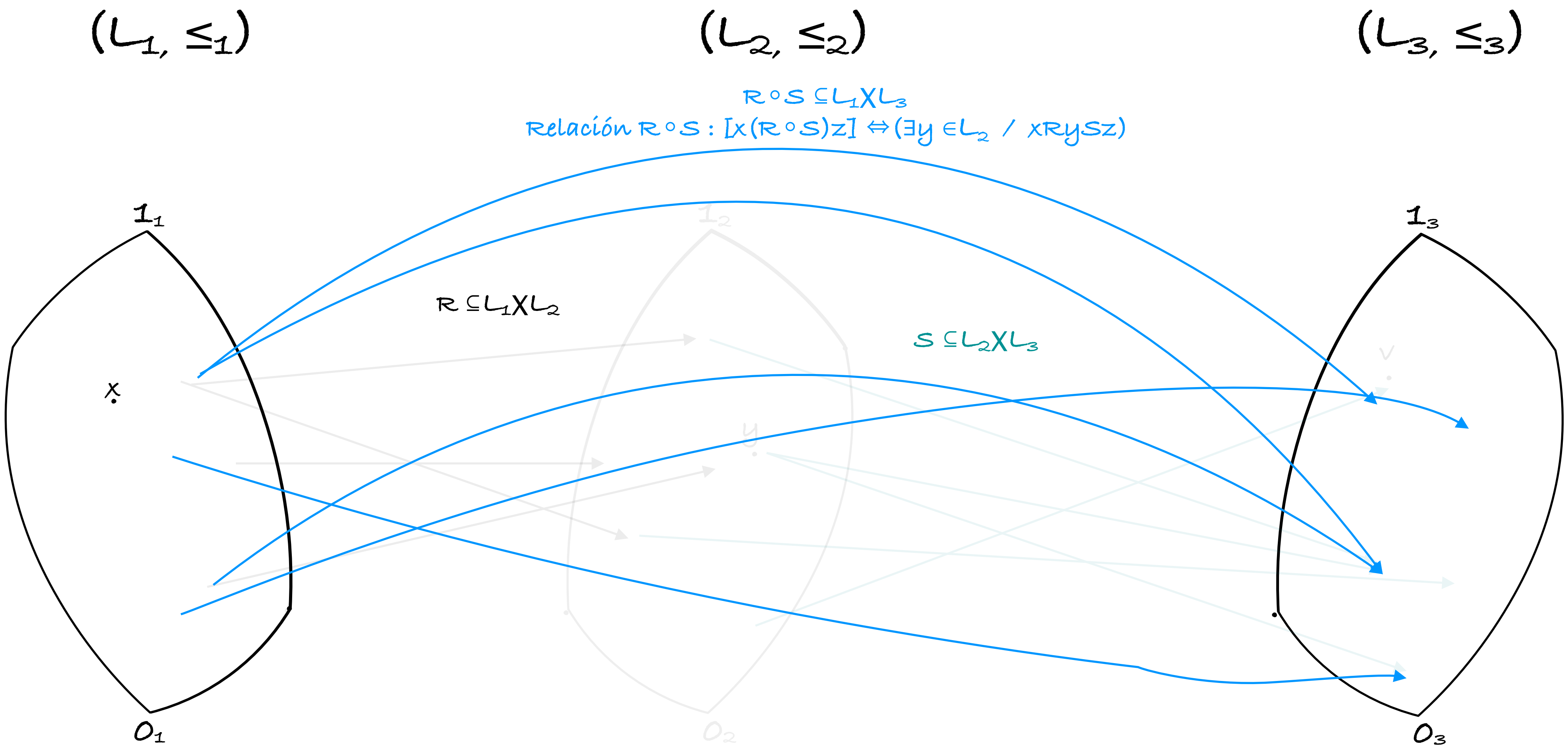
Álgebras de Heyting L_i completas con una negación fuerte $'_2$, un nítido fijo w_i y un operador diferencia Δ_i:

$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$ $(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$ $(L_3, \leq_3, \cdot_3, +_3, 0_3, 1_2), '_3, w_3, \Delta_3)$



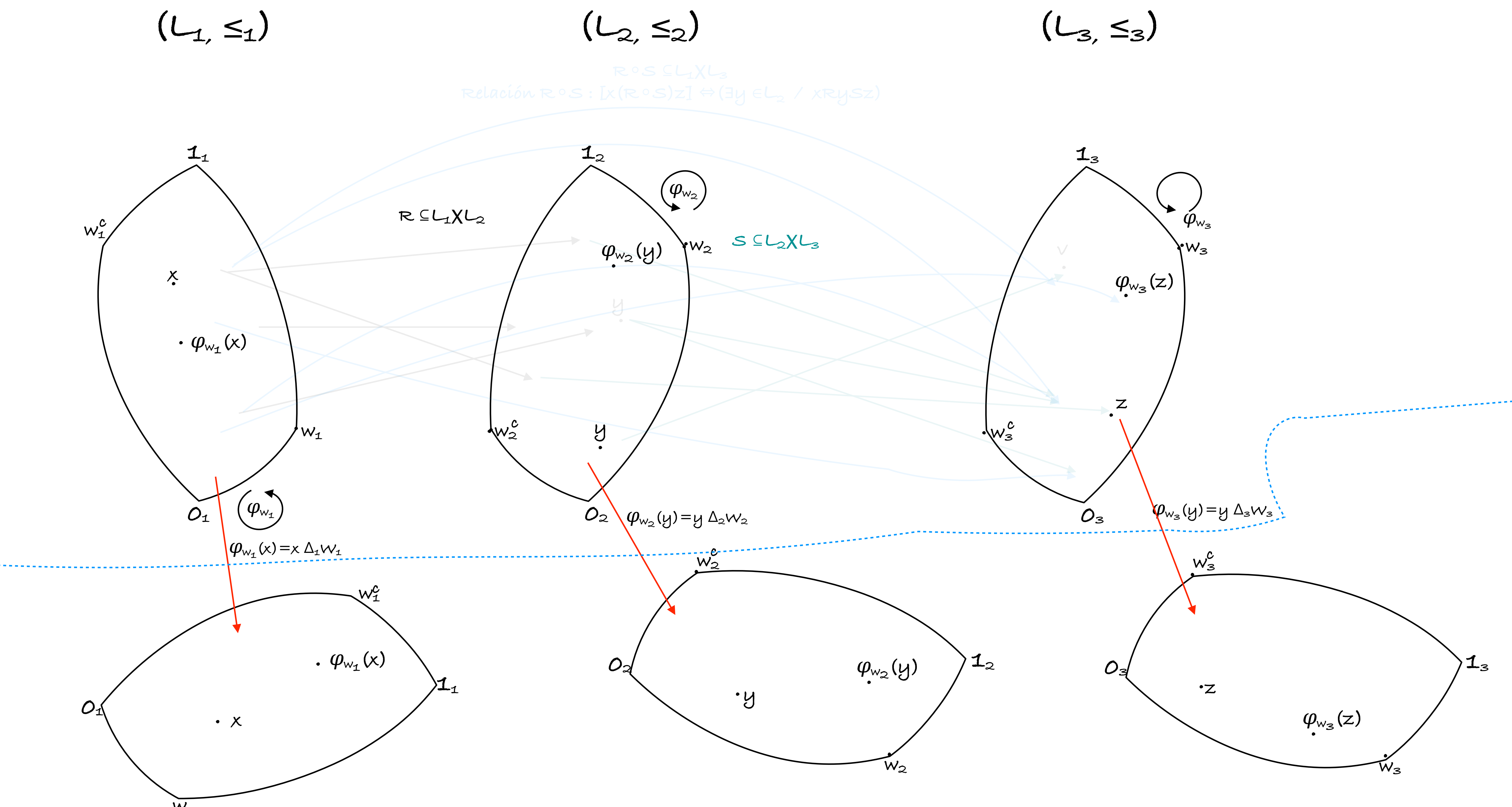
Álgebras de Heyting L_i completas con una negación fuerte $'_2$, un nítido fijo w_i y un operador diferencia Δ_i:

$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$ $(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$ $(L_3, \leq_3, \cdot_3, +_3, 0_3, 1_2), '_3, w_3, \Delta_3)$



Álgebras de Heyting L_i completas con una negación fuerte $'_2$, un nítido fijo w_i y un operador diferencia Δ_i:

$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$ $(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$ $(L_3, \leq_3, \cdot_3, +_3, 0_3, 1_2), '_3, w_3, \Delta_3)$

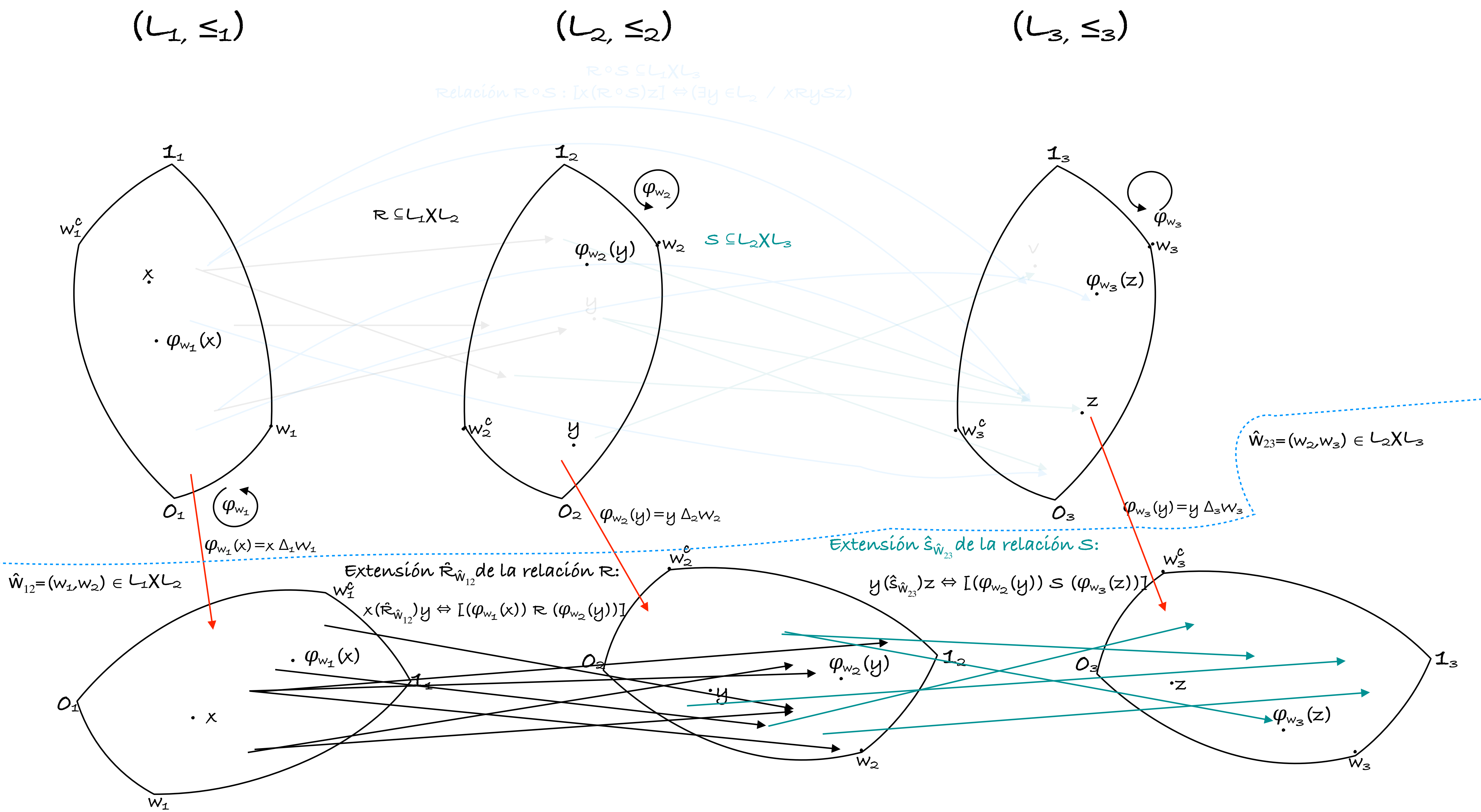


Nuevas álgebras de Heyting completas, posiblemente con las mismas negaciones $'_1$, $'_2$, $'_3$

$((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1)$ $((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$ $((L_3, \sqsubseteq^{w_3}, \sqcap^{w_3}, \sqcup^{w_3}, w_3, w_3^c), '_3)$

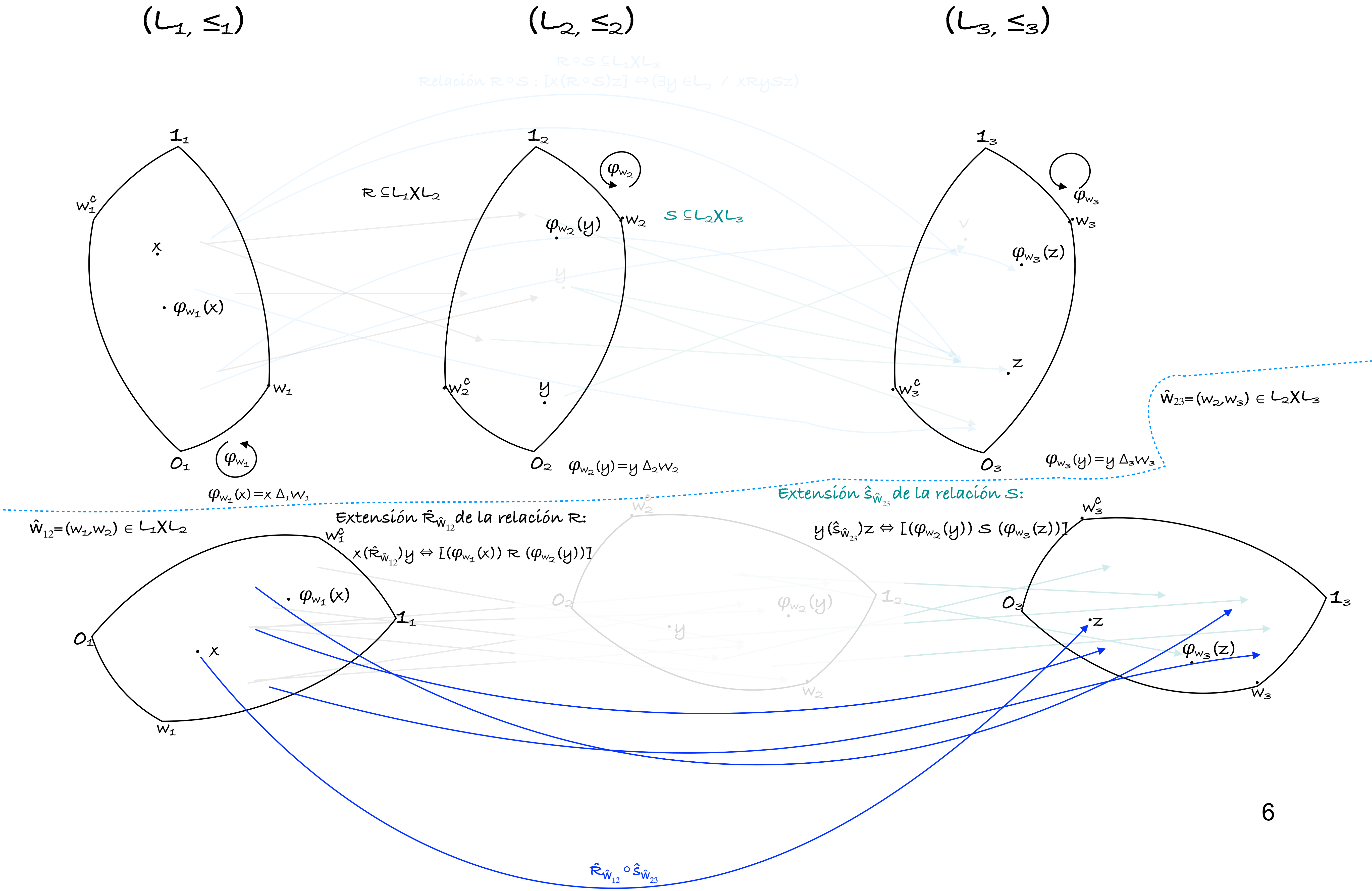
Álgebras de Heyting L_i completas con una negación fuerte $'_2$, un nítido fijo w_i y un operador diferencia Δ_i:

$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$ $(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$ $(L_3, \leq_3, \cdot_3, +_3, 0_3, 1_2), '_3, w_3, \Delta_3)$



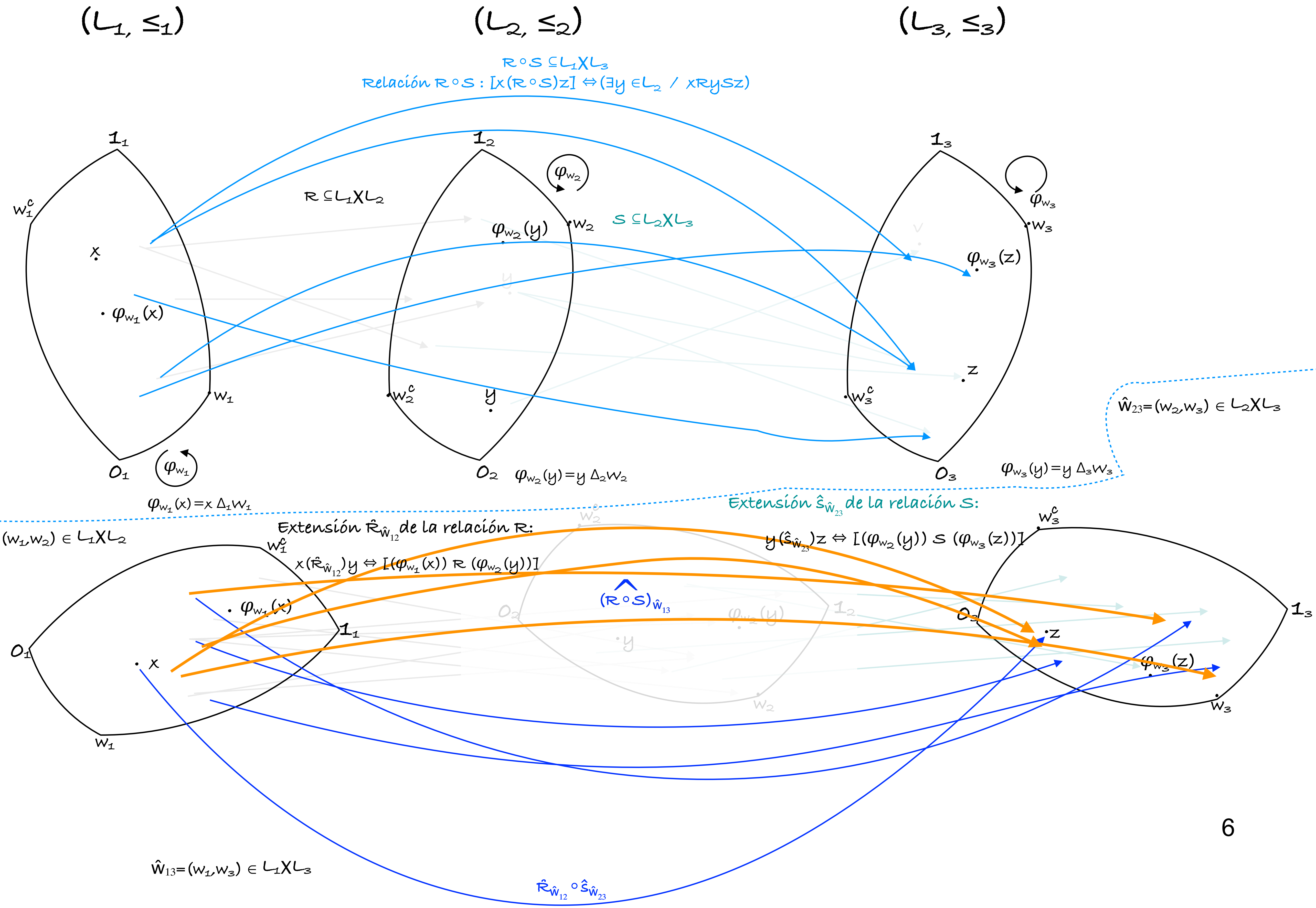
Álgebras de Heyting L_i completas con una negación fuerte $'_2$, un nítido fijo w_i y un operador diferencia Δ_i:

$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$ $(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$ $(L_3, \leq_3, \cdot_3, +_3, 0_3, 1_2), '_3, w_3, \Delta_3)$



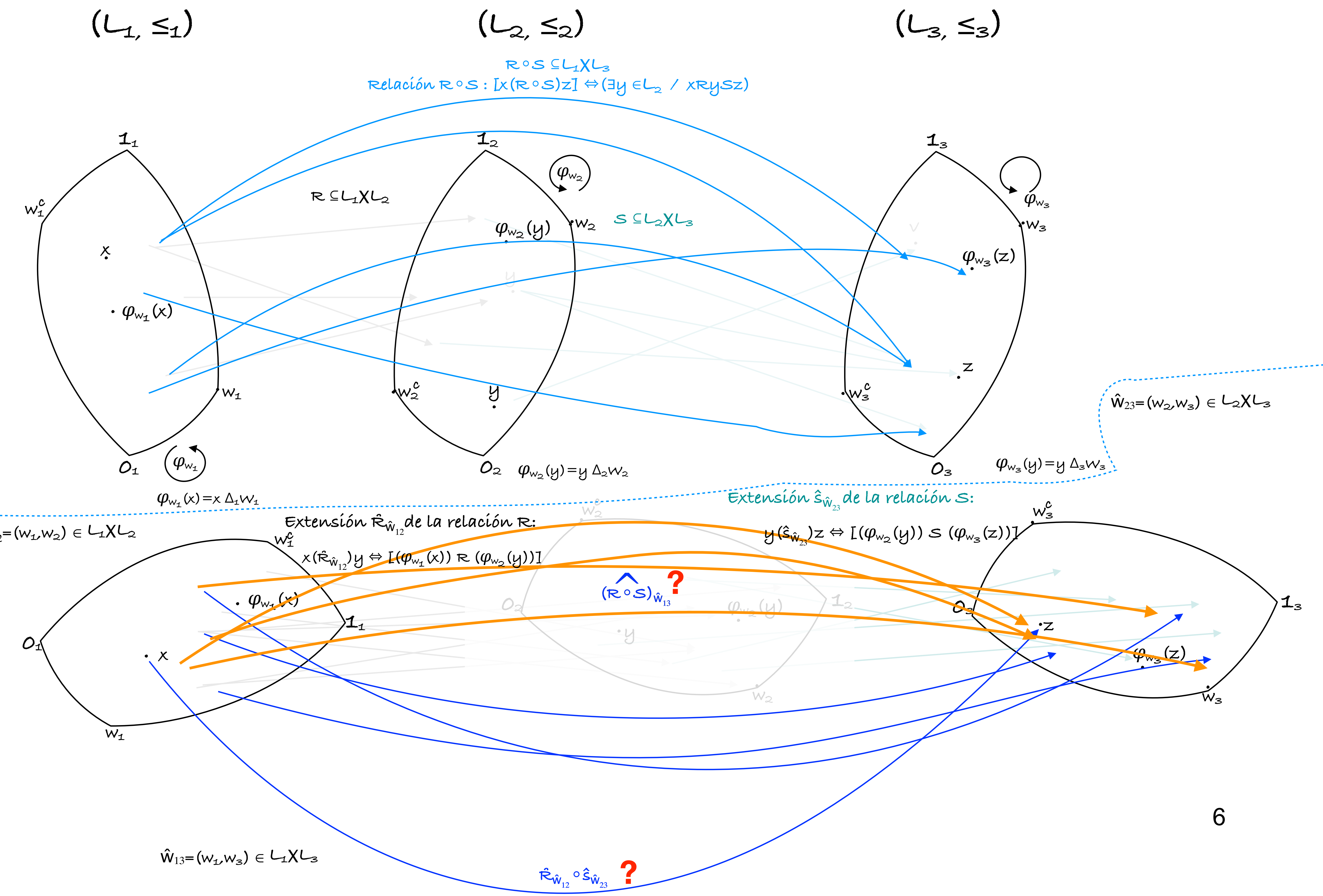
Álgebras de Heyting L_i completas con una negación fuerte $'_2$, un nítido fijo w_i y un operador diferencia Δ_i:

$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$ $(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$ $(L_3, \leq_3, \cdot_3, +_3, 0_3, 1_2), '_3, w_3, \Delta_3)$



Álgebras de Heyting L_i completas con una negación fuerte $'_2$, un nítido fijo w_i y un operador diferencia Δ_i:

$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$ $(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$ $(L_3, \leq_3, \cdot_3, +_3, 0_3, 1_2), '_3, w_3, \Delta_3)$



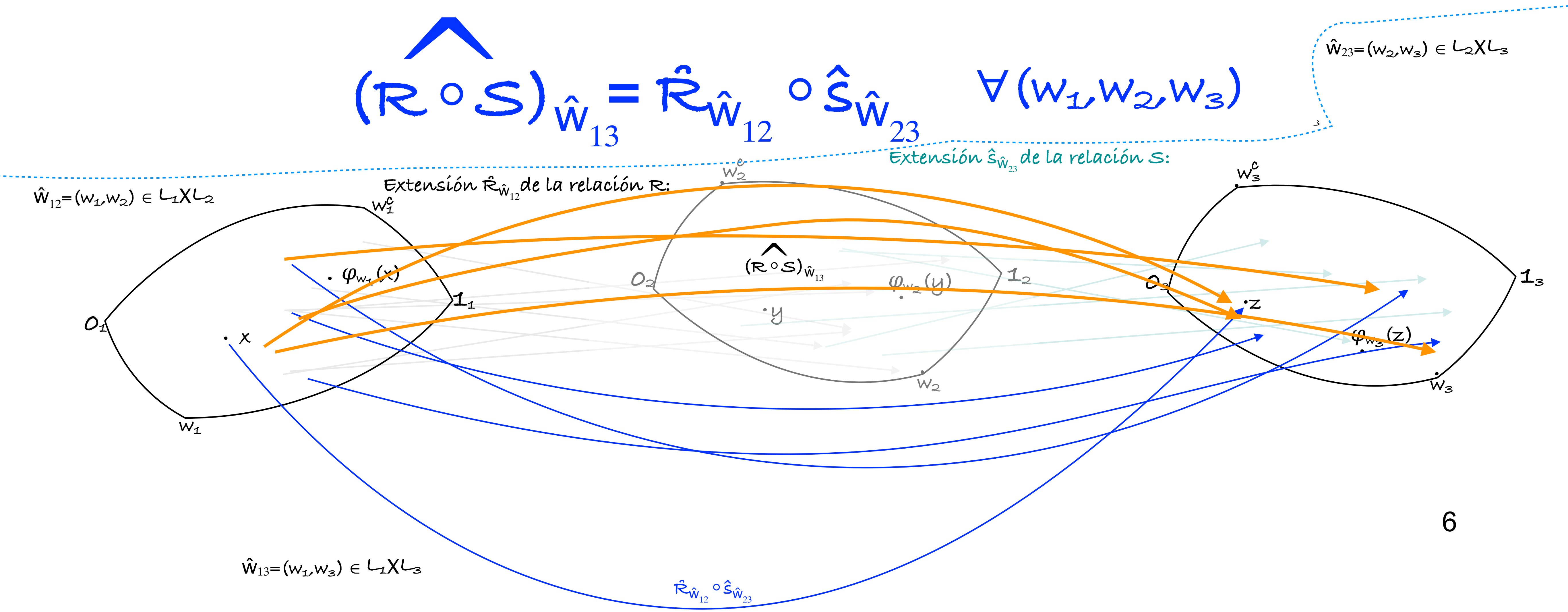
Álgebras de Heyting L_i completas con una negación fuerte $'_2$, un nítido fijo w_i y un operador diferencia Δ_i:

$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$ $(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$ $(L_3, \leq_3, \cdot_3, +_3, 0_3, 1_2), '_3, w_3, \Delta_3)$

$$x(\hat{R}_{\hat{w}_{12}})y \Leftrightarrow [(\varphi_{w_1}(x)) \; R \; (\varphi_{w_2}(y))]$$

$$y(\hat{S}_{\hat{w}_{23}})z \Leftrightarrow [(\varphi_{w_2}(y)) \; S \; (\varphi_{w_3}(z))]$$

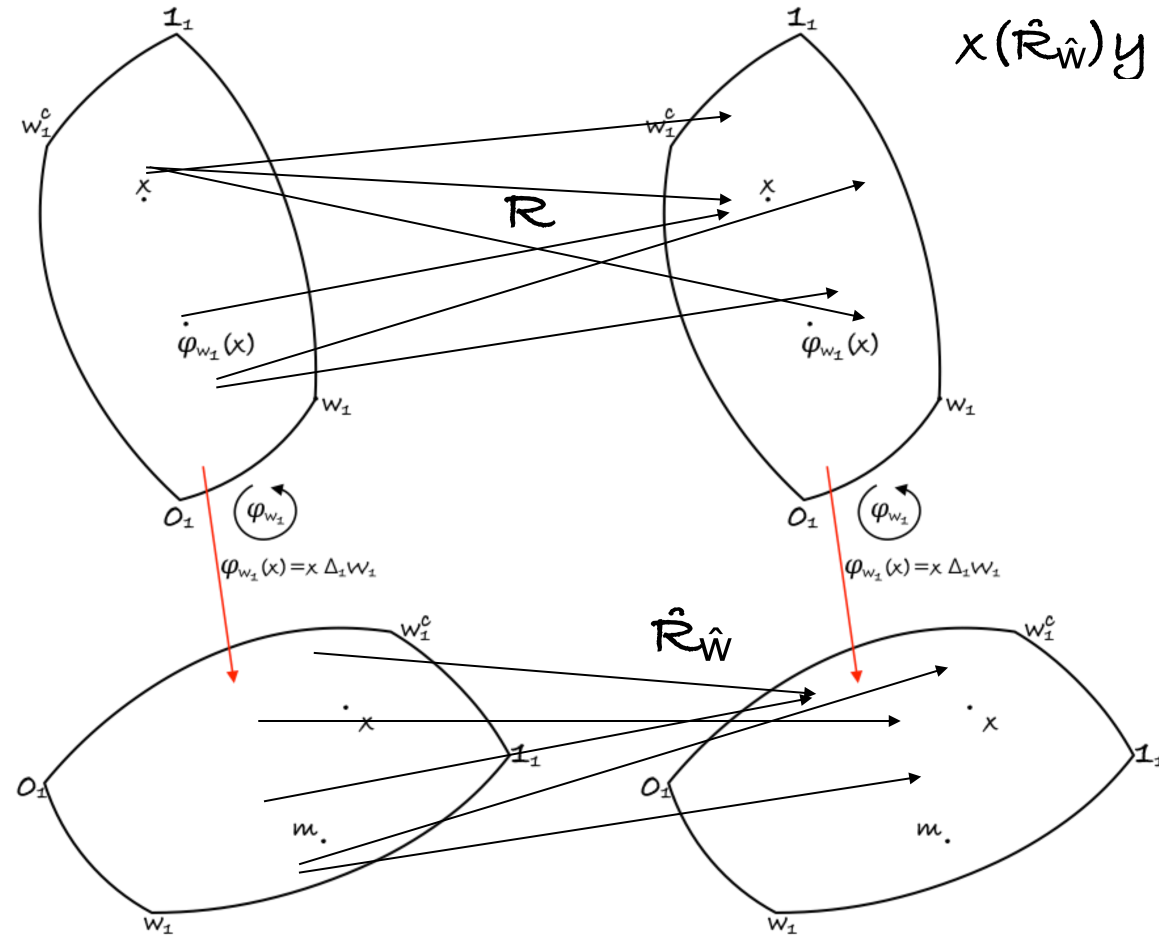
$$\widehat{(R \circ S)}_{\hat{w}_{13}} = \hat{R}_{\hat{w}_{12}} \circ \hat{S}_{\hat{w}_{23}} \quad \forall (w_1, w_2, w_3)$$



la relación extensión $\hat{R}_{\hat{W}_{12}}$ de una relación R en un mismo retículo: $(L_1, \leq_1) = (L_1, \leq_1)$.

Sea $L_1 = L_2$ y sea $w_1 = w_2$:

Sea R una relación en L_1 y sea $\hat{R}_{\hat{W}}$ su extensión con $\hat{W} = (w_1, w_1)$.



$$x(\hat{R}_{\hat{W}})y \Leftrightarrow [(\varphi_w(x)) \; R \; (\varphi_w(y))]$$

Sea $L_1=L_2$ y sea $w_1=w_2$:

Sea R una relación en L_1

y sea $\hat{R}_{\hat{W}}$ su extensión con

$\hat{W}=(w_1,w_1)$.

En este caso, si I_{L_1} es la

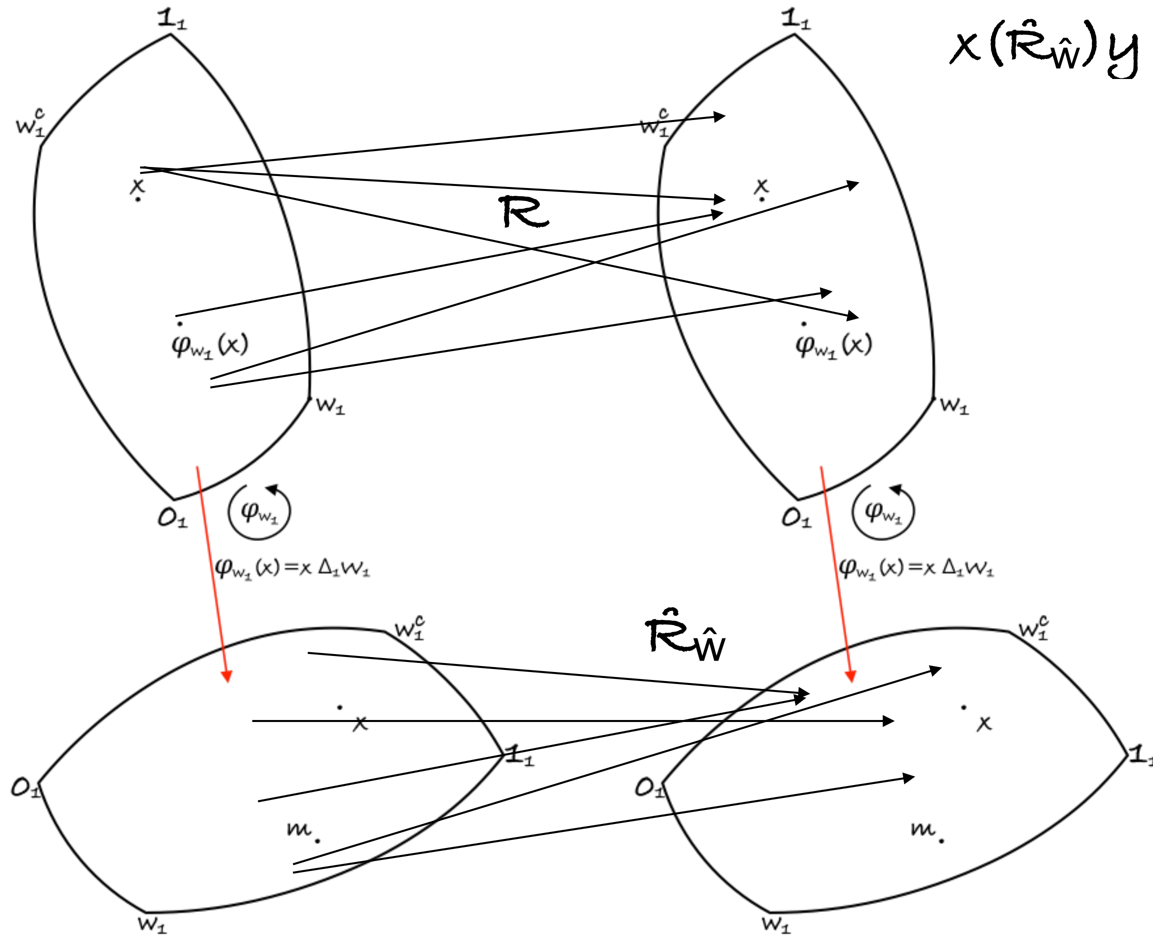
relación identidad en L_1,

se verifica $(\widehat{I_{L_1}})_{\hat{W}_{11}} = I_{L_1}$

Y para todo $w_1 \in N(L_1)$

y para toda relación $R \subseteq L_1 X L_1$:

$(\widehat{\hat{R}_{\hat{W}_{11}}})_{\hat{W}_{11}} = R$



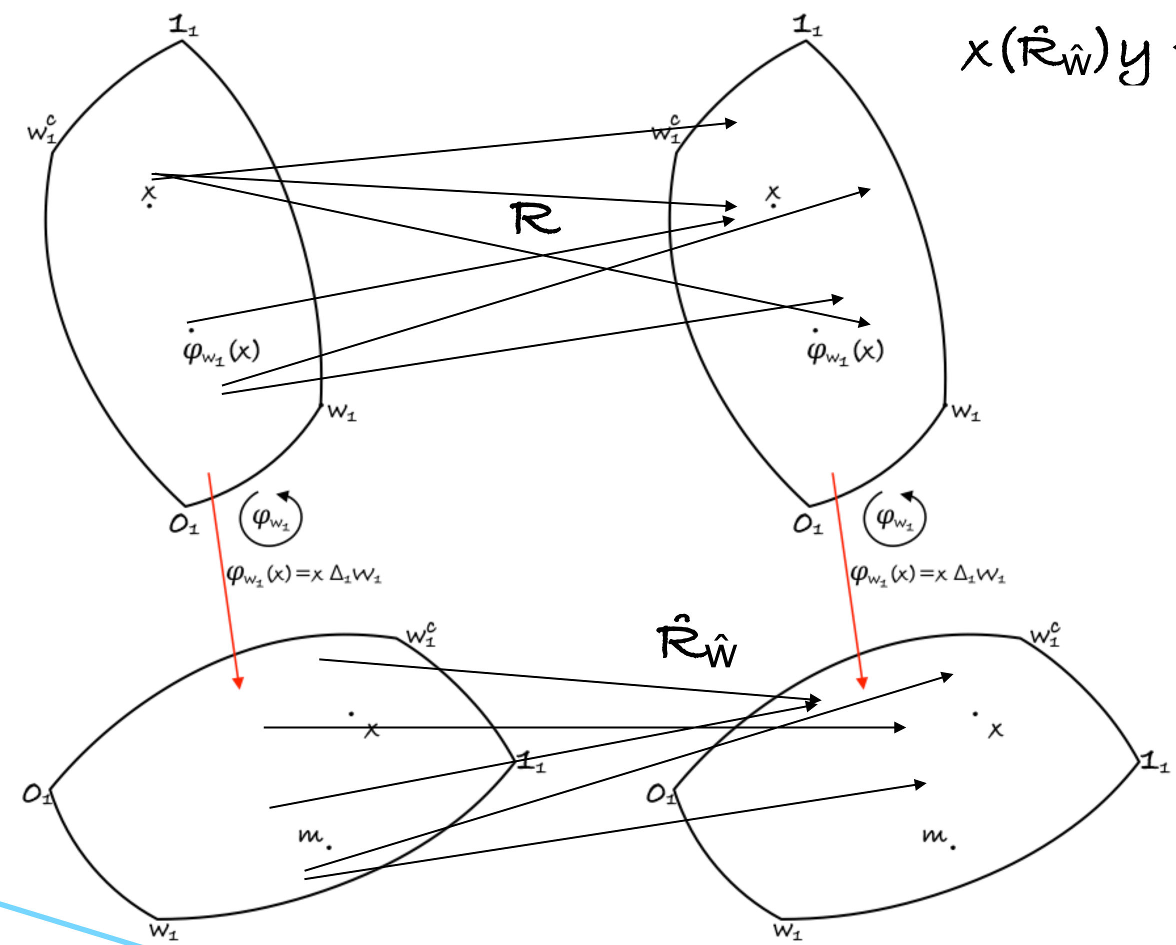
$x(\hat{R}_{\hat{W}})y \Leftrightarrow [(\varphi_w(x))\ R\ (\varphi_w(y))]$

Sea $L_1=L_2$ y sea $w_1=w_2$:

Sea R una relación en L_1 y sea $\hat{R}_{\hat{W}}$ su extensión con $\hat{W}=(w_1,w_1)$.

En este caso, si I_{L_1} es la relación identidad en L_1, se verifica $(\widehat{I_{L_1}})_{\hat{W}_{11}}=I_{L_1}$

Y para todo $w_1\in N(L_1)$ y para toda relación $R\subseteq L_1 X L_1$: $(\widehat{\hat{R}_{\hat{W}_{11}}})_{\hat{W}_{11}}=R$



$$x(\hat{R}_{\hat{W}})y \Leftrightarrow [(\varphi_w(x))\ R\ (\varphi_w(y))]$$

Entonces la relación $\hat{R}_{\hat{W}}$ "hereda" propiedades de R:

Si R es <u>reflexiva</u>, $\hat{R}_{\hat{W}}$ también <u>lo es</u>:

$$(I_{L_1}\subseteq R)\Rightarrow(I_{L_1}\subseteq \hat{R}_{\hat{W}})\quad \forall\hat{W}=(w,w)\in N(L_1)XN(L_1).$$

Si R es <u>simétrica</u>, $\hat{R}_{\hat{W}}$ también <u>lo es</u>:

$$(R=R^{op})\Rightarrow(\hat{R}_{\hat{W}}=(\hat{R}_{\hat{W}})^{op})\quad \forall\hat{W}=(w,w)\in N(L_1)XN(L_1).$$

Si R es <u>transitiva</u>, $\hat{R}_{\hat{W}}$ también <u>lo es</u>:

$$((R\circ R)\subseteq R)\Rightarrow((\hat{R}_{\hat{W}}\circ\hat{R}_{\hat{W}})\subseteq\hat{R}_{\hat{W}})\quad \forall\hat{W}=(w,w)\in N(L_1)XN(L_1).$$

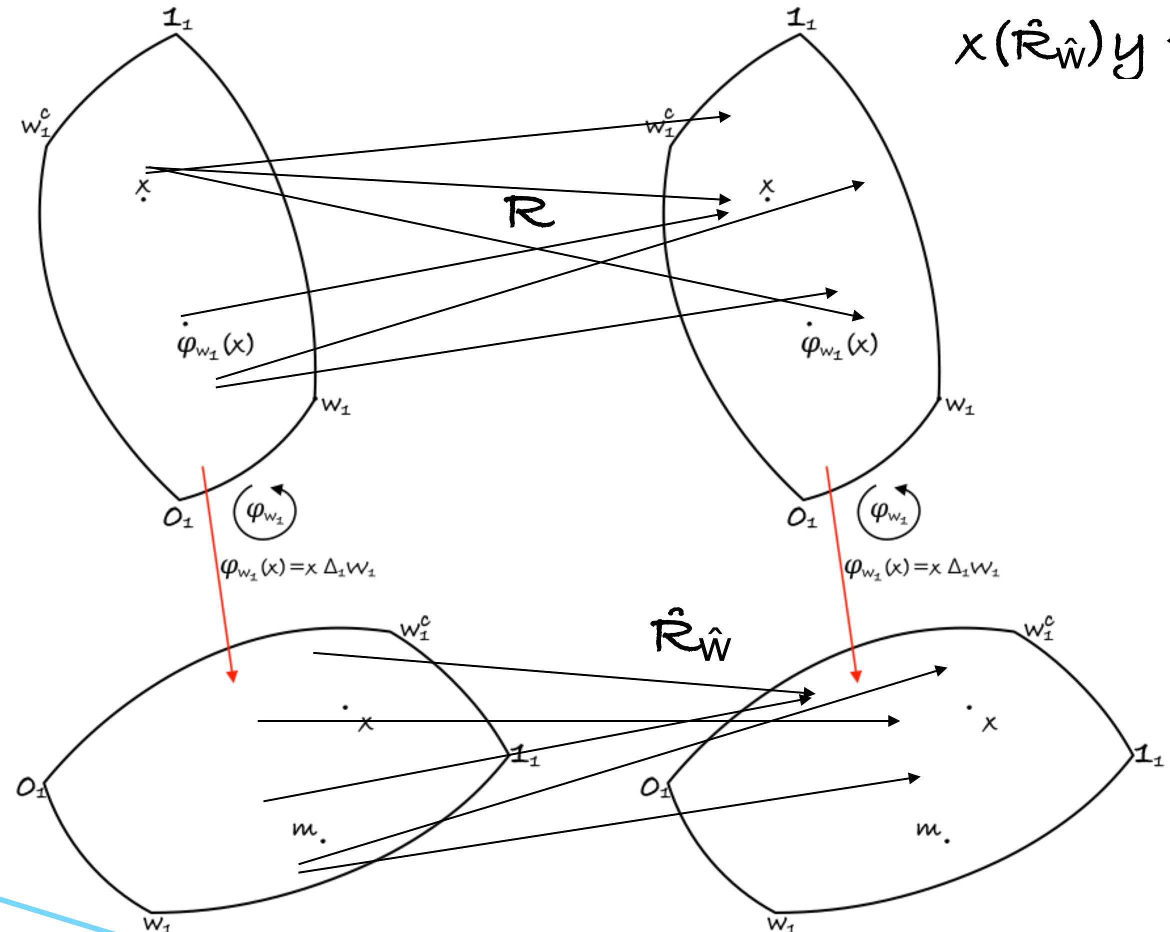
Sea $L_1 = L_2$ y sea $w_1 = w_2$:

Sea R una relación en L_1 y sea $\hat{R}_{\hat{w}}$ su extensión con $\hat{W} = (w_1, w_1)$.

En este caso, si I_{L_1} es la relación identidad en L_1, se verifica $(\widehat{I_{L_1}})_{\hat{W}_{11}} = I_{L_1}$

Y para todo $w_1 \in N(L_1)$ y para toda relación $R \subseteq L_1 X L_1$:

$(\widehat{\hat{R}_{\hat{W}_{11}}})_{\hat{W}_{11}} = R$



$x(\hat{R}_{\hat{w}})y \Leftrightarrow [(\varphi_w(x)) \; R \; (\varphi_w(y))]$

Entonces la relación $\hat{R}_{\hat{w}}$ "hereda" propiedades de R:

Si R es <u>reflexiva</u>, $\hat{R}_{\hat{w}}$ también <u>lo es</u>:

$(I_{L_1} \subseteq R) \Rightarrow (I_{L_1} \subseteq \hat{R}_{\hat{W}}) \quad \forall \hat{W} = (w, w) \in N(L_1) X N(L_1)$.

Si R es <u>simétrica</u>, $\hat{R}_{\hat{w}}$ también <u>lo es</u>:

$(R = R^{op}) \Rightarrow (\hat{R}_{\hat{W}} = (\hat{R}_{\hat{W}})^{op}) \quad \forall \hat{W} = (w, w) \in N(L_1) X N(L_1)$.

Si R es <u>transitiva</u>, $\hat{R}_{\hat{w}}$ también <u>lo es</u>:

$((R \circ R) \subseteq R) \Rightarrow ((\hat{R}_{\hat{W}} \circ \hat{R}_{\hat{W}}) \subseteq \hat{R}_{\hat{W}}) \quad \forall \hat{W} = (w, w) \in N(L_1) X N(L_1)$.

Si R es <u>antisimétrica</u>, $\hat{R}_{\hat{w}}$ también <u>lo es</u>:

$[(xRy) \,\&\, (yRx) \Rightarrow (x = y)] \Rightarrow$

$[(x\hat{R}_{\hat{w}}y) \,\&\, (y\hat{R}_{\hat{w}}x) \Rightarrow (x = y)]$

$\forall \hat{W} = (w, w) \in N(L_1) X N(L_1)$.

etc...

$((\widehat{Cl_{ref}(R)})_{\hat{w}} = Cl_{ref}(\hat{R}_{\hat{w}})$,

$(\widehat{Cl_{tran}(R)})_{\hat{w}} = Cl_{tran}(\hat{R}_{\hat{w}})$,

...)

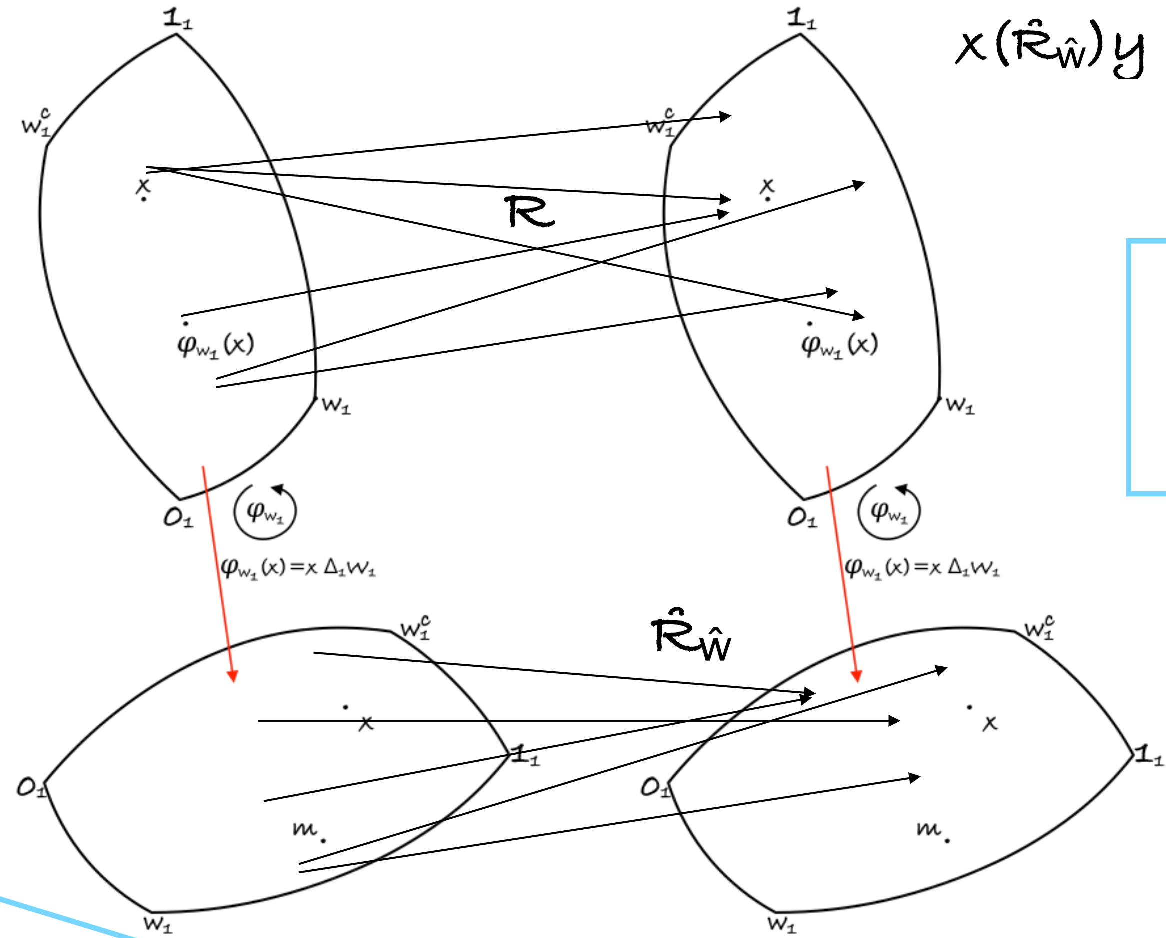
Sea $L_1 = L_2$ y sea $w_1 = w_2$:

Sea R una relación en L_1 y sea $\hat{R}_{\hat{w}}$ su extensión con $\hat{w} = (w_1, w_1)$.

En este caso, si I_{L_1} es la relación identidad en L_1, se verifica $(\widehat{I_{L_1}})_{\hat{w}_{11}} = I_{L_1}$

Y para todo $w_1 \in N(L_1)$ y para toda relación $R \subseteq L_1 X L_1$:

$(\widehat{\hat{R}_{\hat{w}_{11}}})_{\hat{w}_{11}} = R$



$x(\hat{R}_{\hat{w}})y \Leftrightarrow [(\varphi_w(x)) \; R \; (\varphi_w(y))]$

<u>Nota</u>. Es evidente que si $R = \leq$, entonces $(\hat{\leq})_w = \sqsubseteq^W$.

Entonces la relación $\hat{R}_{\hat{w}}$ "hereda" propiedades de R:

Si R es <u>reflexiva</u>, $\hat{R}_{\hat{w}}$ también <u>lo es</u>:

$(I_{L_1} \subseteq R) \Rightarrow (I_{L_1} \subseteq \hat{R}_{\hat{w}}) \quad \forall \hat{w} = (w, w) \in N(L_1) X N(L_1)$.

Si R es <u>simétrica</u>, $\hat{R}_{\hat{w}}$ también <u>lo es</u>:

$(R = R^{op}) \Rightarrow (\hat{R}_{\hat{w}} = (\hat{R}_{\hat{w}})^{op}) \quad \forall \hat{w} = (w, w) \in N(L_1) X N(L_1)$.

Si R es <u>transitiva</u>, $\hat{R}_{\hat{w}}$ también <u>lo es</u>:

$((R \circ R) \subseteq R) \Rightarrow ((\hat{R}_{\hat{w}} \circ \hat{R}_{\hat{w}}) \subseteq \hat{R}_{\hat{w}}) \quad \forall \hat{w} = (w, w) \in N(L_1) X N(L_1)$.

Si R es <u>antisimétrica</u>, $\hat{R}_{\hat{w}}$ también <u>lo es</u>:

$[(xRy) \,\&\, (yRx) \Rightarrow (x = y)] \Rightarrow$

$[(x\hat{R}_{\hat{w}}y) \,\&\, (y\hat{R}_{\hat{w}}x) \Rightarrow (x = y)]$

$\forall \hat{w} = (w, w) \in N(L_1) X N(L_1)$.

etc...

$((\widehat{Cl_{ref}(R)})_{\hat{w}} = Cl_{ref}(\hat{R}_{\hat{w}})$,

$(\widehat{Cl_{tran}(R)})_{\hat{w}} = Cl_{tran}(\hat{R}_{\hat{w}})$,

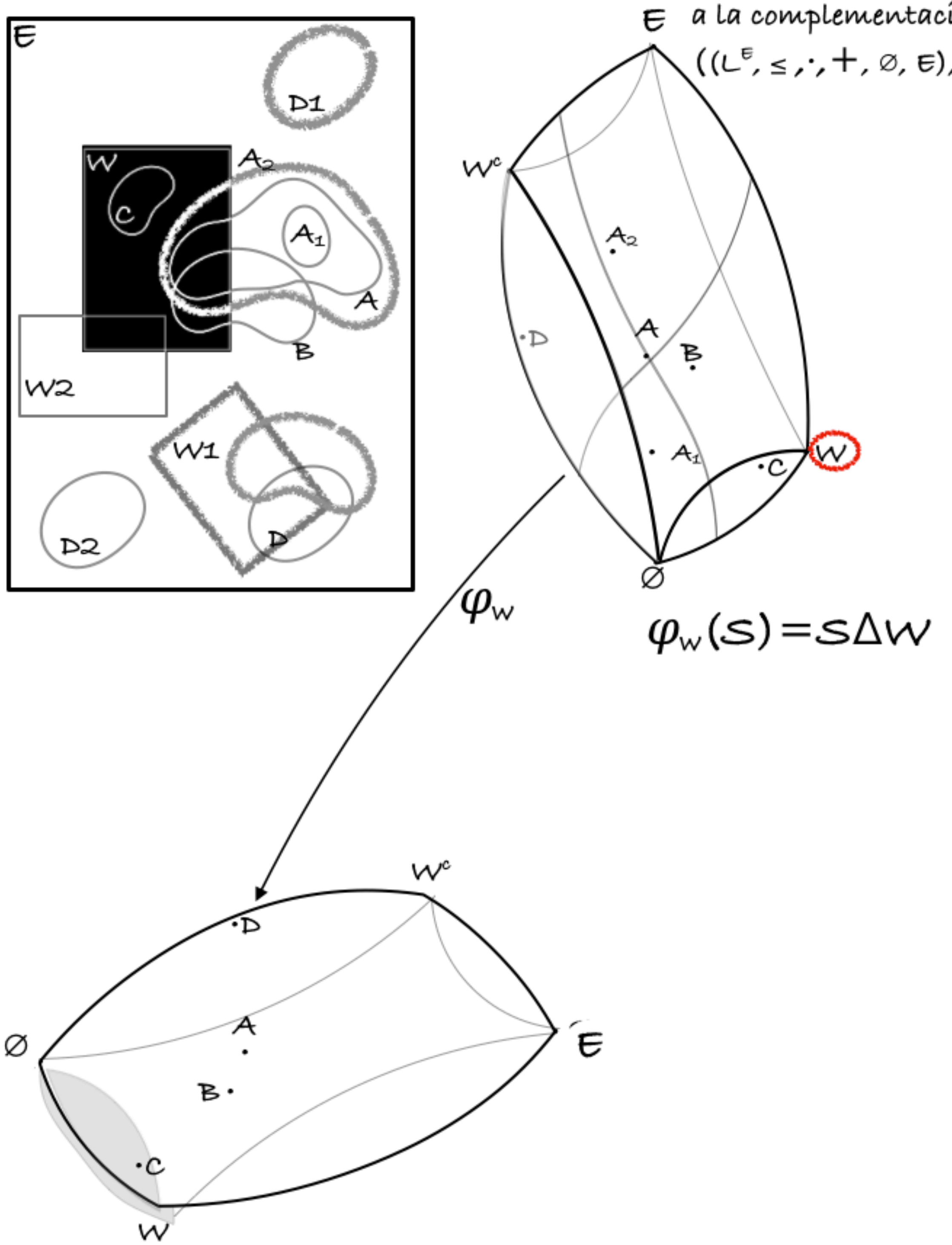
...)

Extensión de las funciones de conjunto

$g:(L^E, \leq) \rightarrow (L^F, \leq)$ a otras $\hat{g}_{(V,W)}:(L^E, \sqsubseteq^W) \rightarrow (L^F, \sqsubseteq^V)$

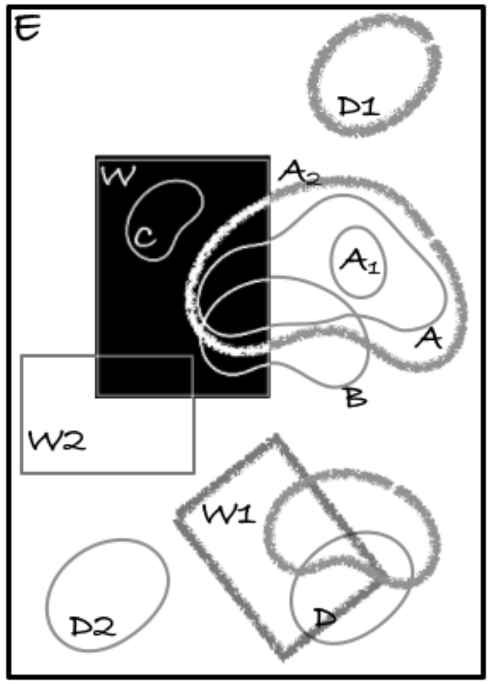
Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos
$\emptyset \leq E$, $A \leq E$, $B \leq E, \ldots$, $E \leq E$

Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', {}^c)$

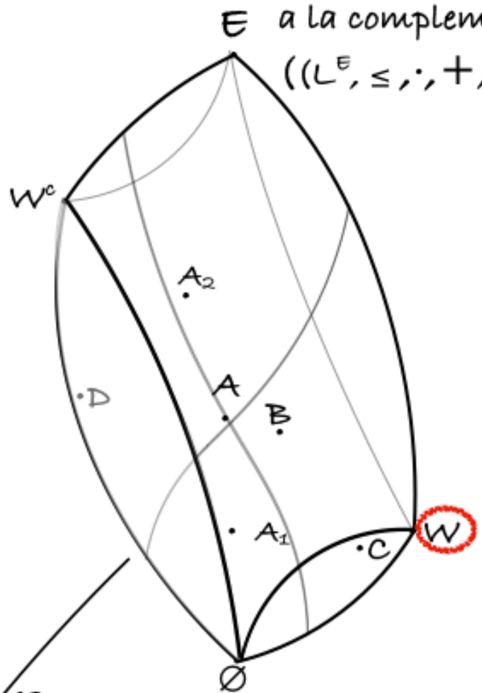


Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', {}^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $\boxed{A \longrightarrow \varphi_W(A) = A \Delta W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)}$

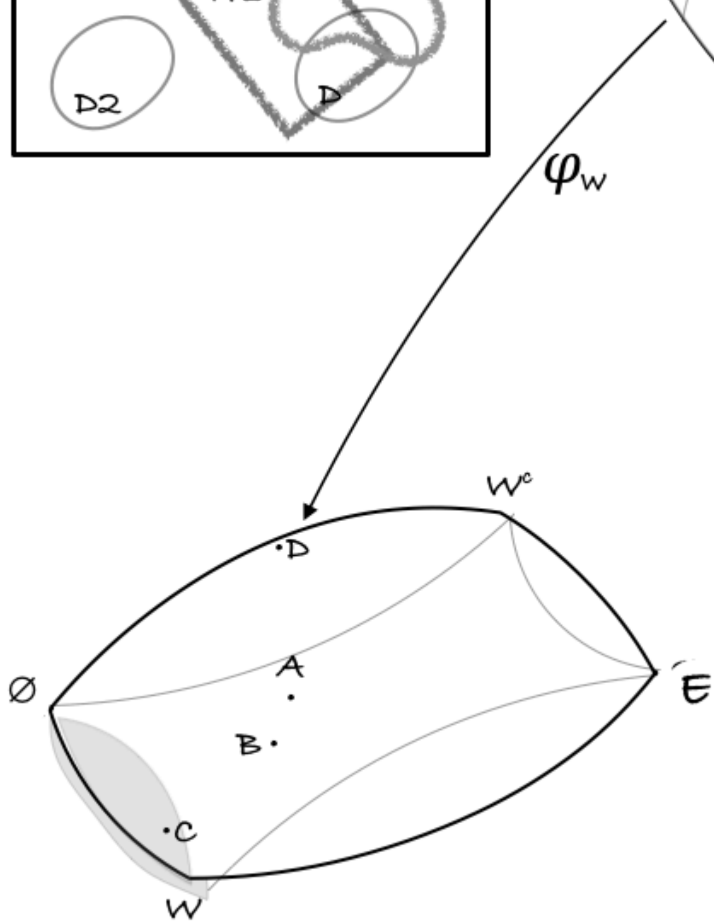
Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos
$\varnothing \leq E,\ A \leq E,\ B \leq E, \ldots ,\ E \leq E$



Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \varnothing, E), ', ^c)$



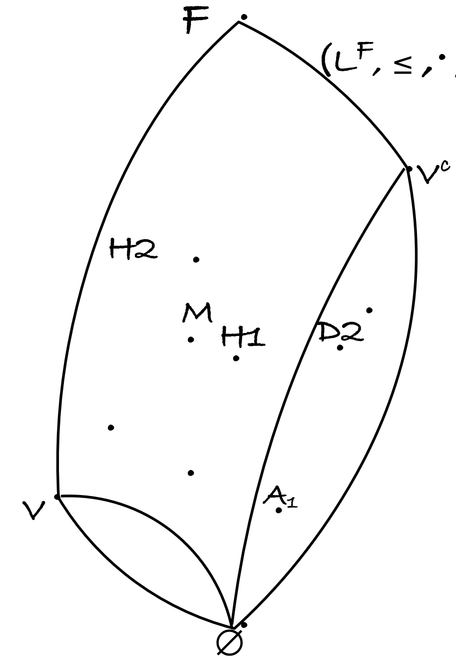
$$\varphi_w(S) = S \Delta W$$

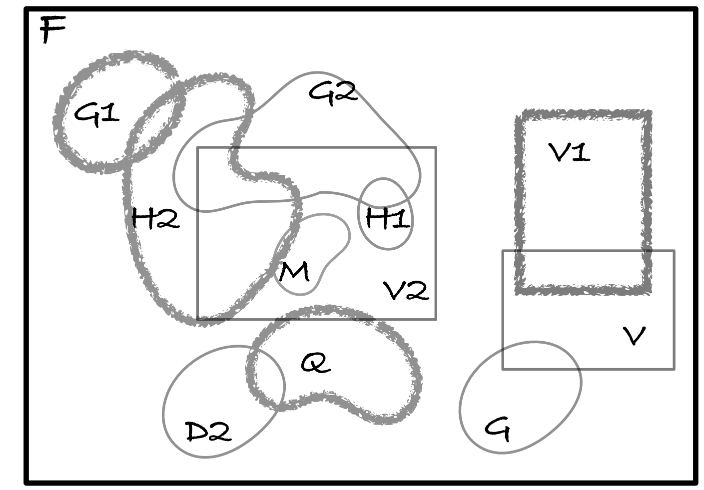


Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $\boxed{A \longrightarrow \varphi_w(A) = A \Delta W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)}$

Se propone un método "coherente" para la extensión de las funciones de conjunto
$g : (L^E, \leq) \rightarrow (L^F, \leq)$, a otras $\hat{g}_{(V,W)} : (L^E, \sqsubseteq^W) \rightarrow (L^F, \sqsubseteq^V)$.

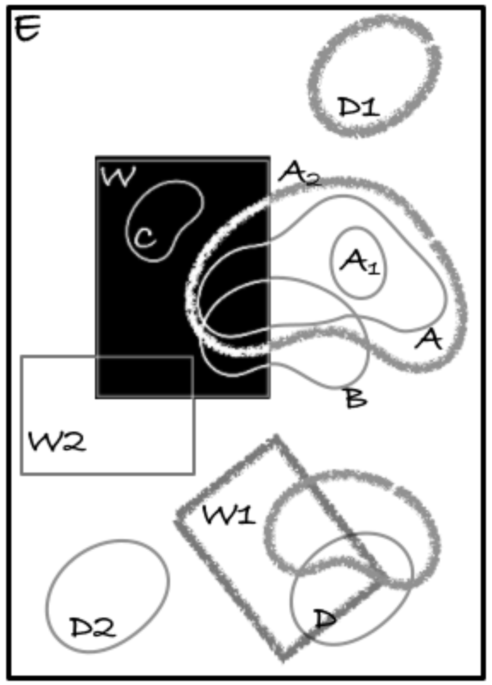
$(L^F, \leq, \cdot, +, \varnothing, F), ', ^c)$





Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos

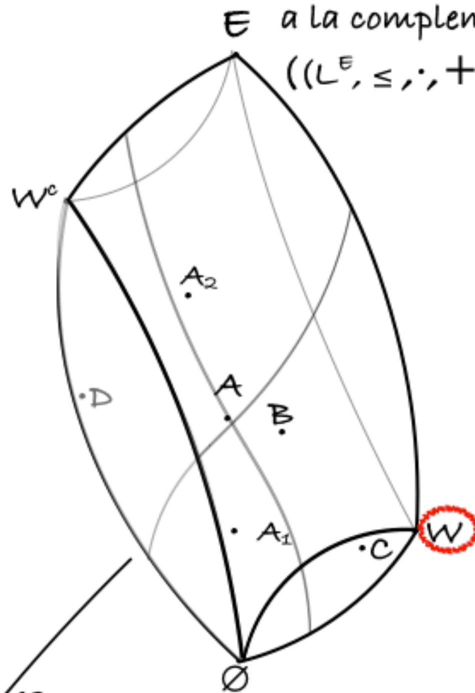
$\emptyset \leq E$, $A \leq E$, $B \leq E$, ... , $E \leq E$



Sistema algebraico: Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación

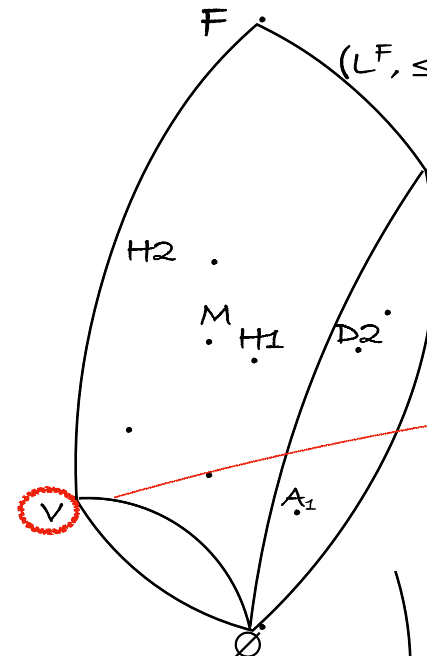
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$

Se propone un método "coherente" para la extensión de las funciones de conjunto $g : (L^E, \leq) \rightarrow (L^F, \leq)$, a otras $\hat{g}_{(V,W)} : (L^E, \sqsubseteq^W) \rightarrow (L^F, \sqsubseteq^V)$.

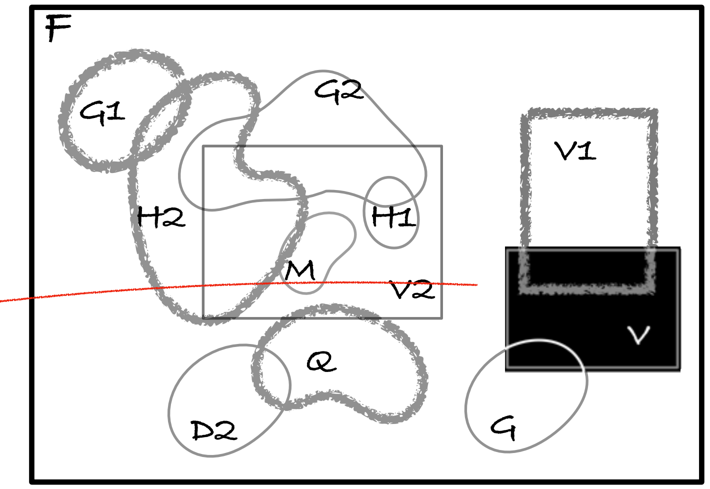


φ_W

$\varphi_W(S) = S \Delta W$

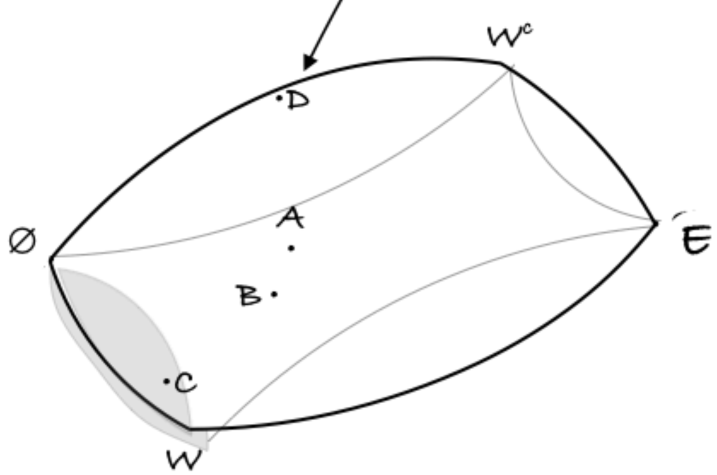


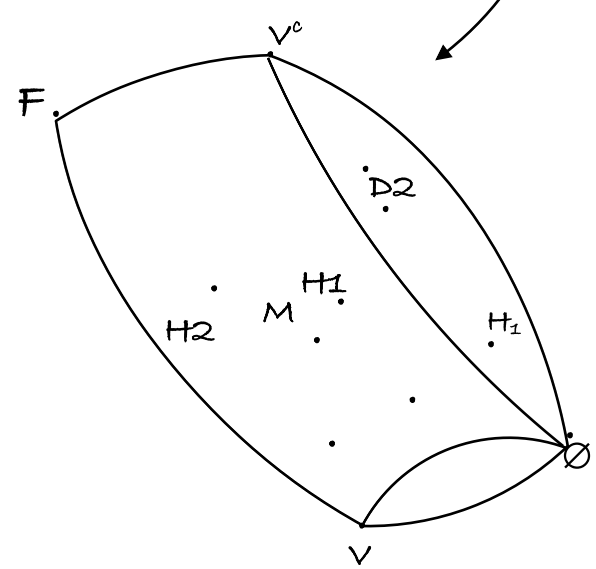
$((L^F, \leq, \cdot, +, \emptyset, F), ', ^c)$



$\varphi_V(K) = K \Delta V$

φ_V





$((L^F, \sqsubseteq^V, \sqcap^V, \sqcup^V, V, V^c), ', ^c)$

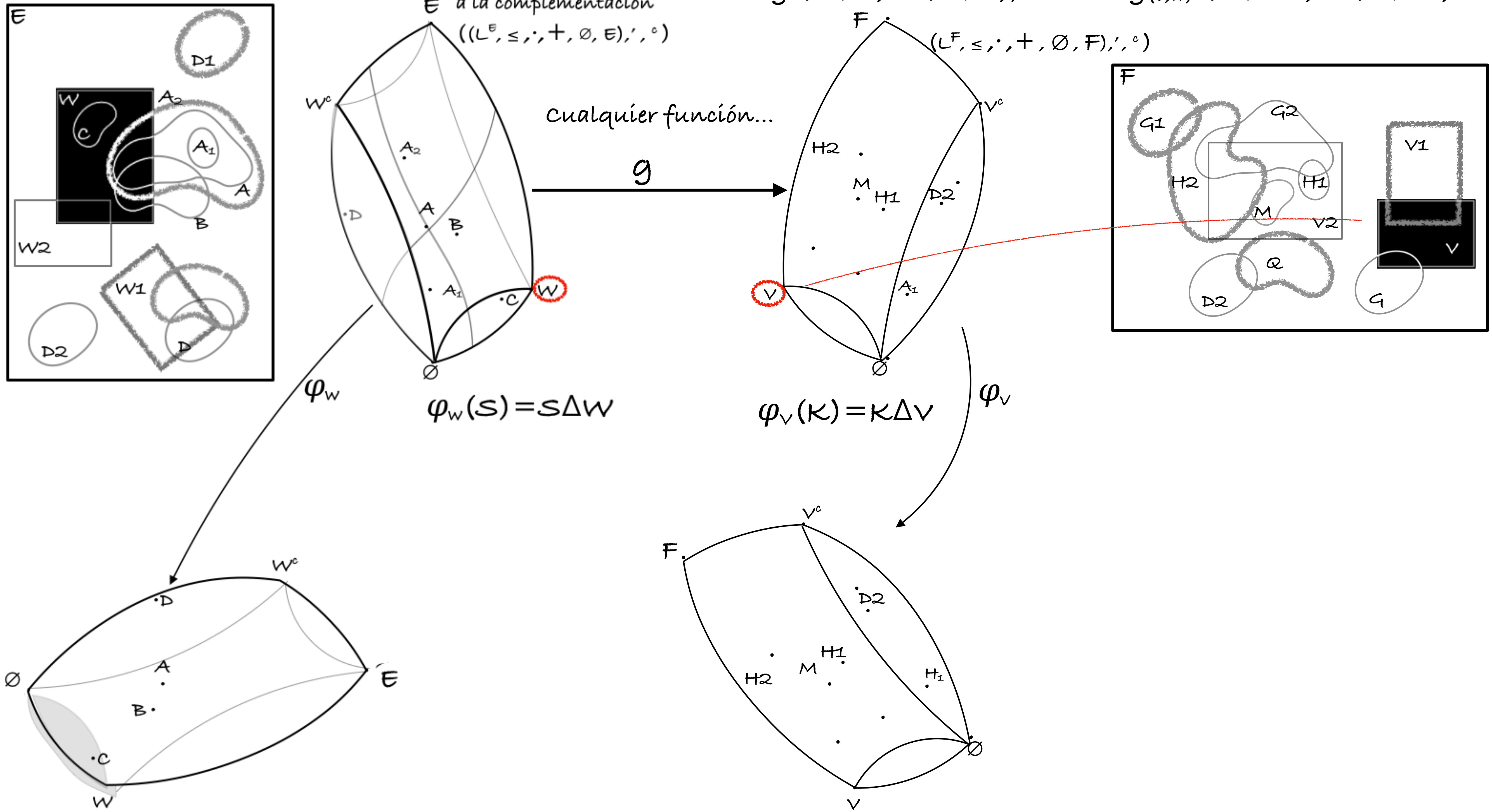
Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $A \longrightarrow \varphi_W(A) = A \Delta W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)$

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos

$\emptyset \leq E,\ A \leq E,\ B \leq E, \dots,\ E \leq E$

Sistema algebraico: Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación

Se propone un método "coherente" para la extensión de las funciones de conjunto $g:(L^E, \leq) \rightarrow (L^F, \leq)$, a otras $\hat{g}_{(V,W)}:(L^E, \sqsubseteq^W) \rightarrow (L^F, \sqsubseteq^V)$.

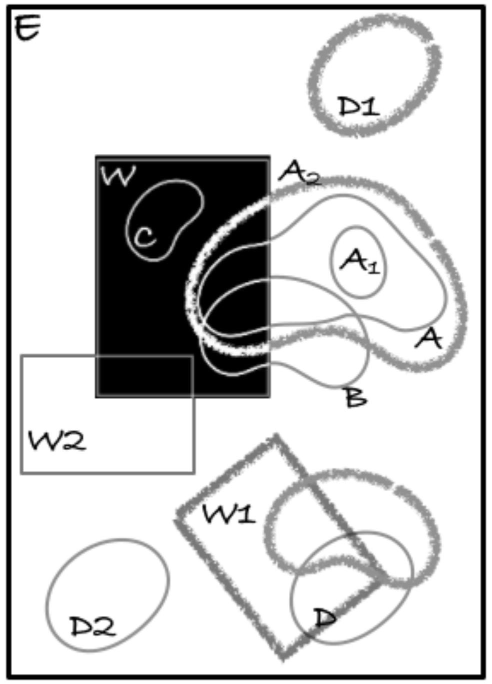


Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^\circ)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $\boxed{A \longrightarrow \varphi_W(A) = A\Delta W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)}$

$((L^F, \sqsubseteq^V, \sqcap^V, \sqcup^V, V, V^c), ', ^\circ)$

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos

$\emptyset \leq E,\ A \leq E,\ B \leq E, \ldots,\ E \leq E$

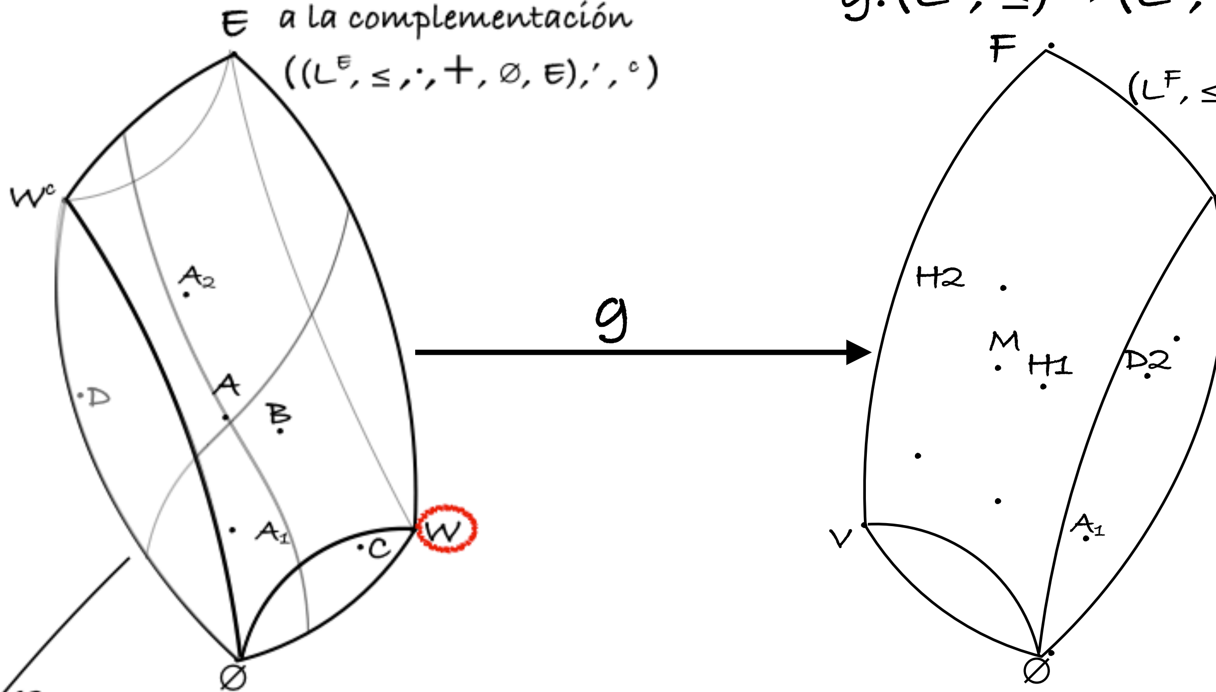


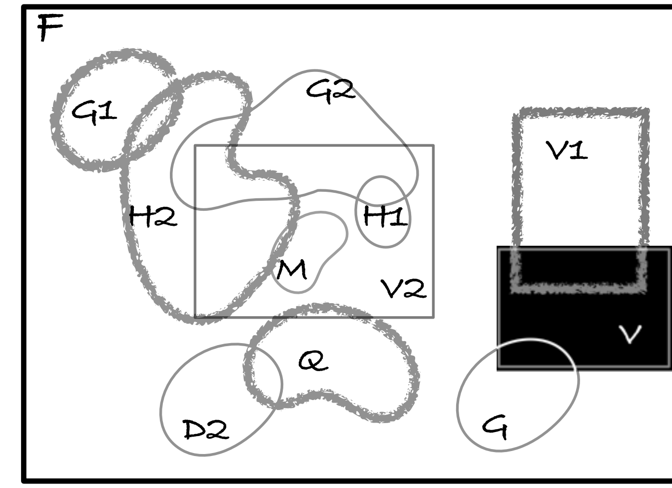
Sistema algebraico: Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación

$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$

Se propone un método "coherente" para la extensión de las funciones de conjunto $g:(L^E, \leq) \to (L^F, \leq)$, a otras $\hat{g}_{(V,W)}:(L^E, \sqsubseteq^W) \to (L^F, \sqsubseteq^V)$.

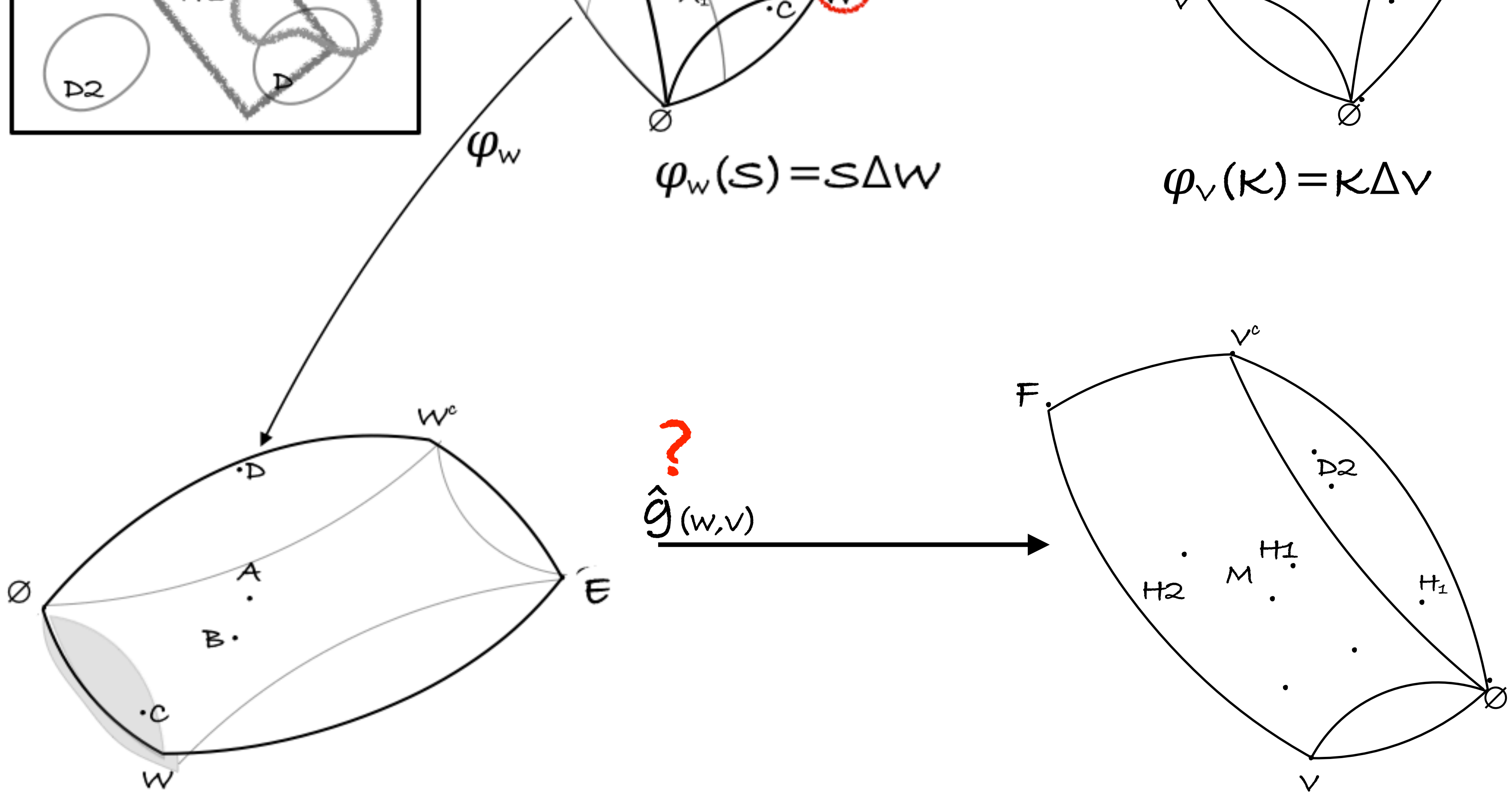
$((L^F, \leq, \cdot, +, \emptyset, F), ', ^c)$





$\varphi_W(S) = S \Delta W$

$\varphi_V(K) = K \Delta V$

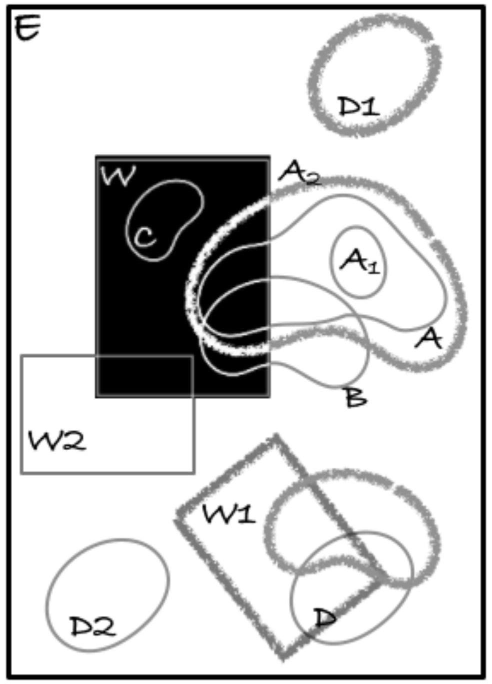


$((L^F, \sqsubseteq^V, \sqcap^V, \sqcup^V, V, V^c), ', ^c)$

Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $A \longrightarrow \varphi_W(A) = A \Delta W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)$

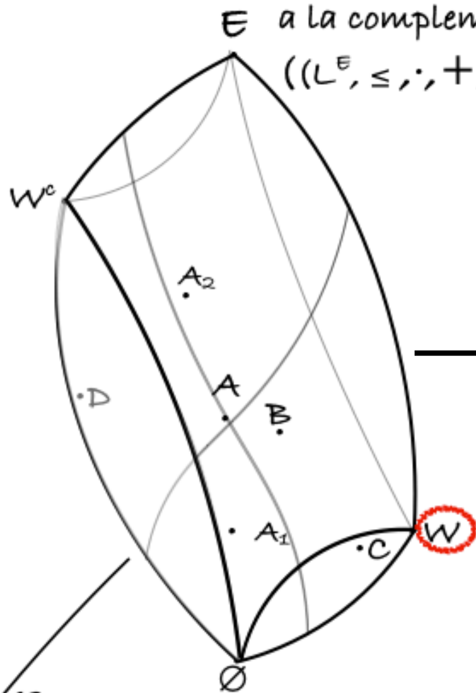
Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos

$\emptyset\leq E,\ A\leq E,\ B\leq E,\dots,\ E\leq E$



Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación

$((L^E,\leq,\cdot,+,\emptyset,E),',^c)$

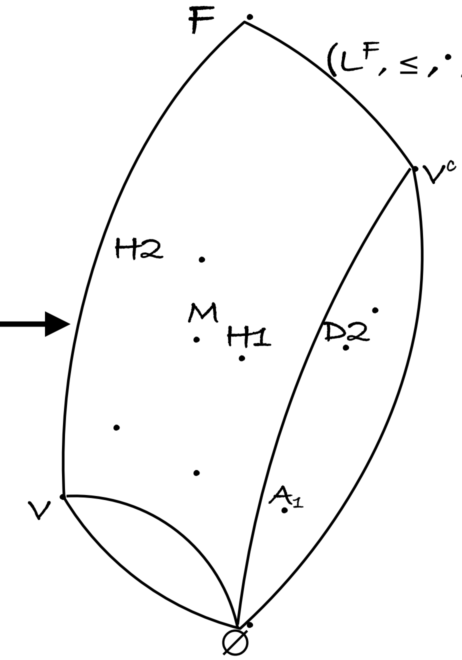


$\varphi_W(S)=S\Delta W$

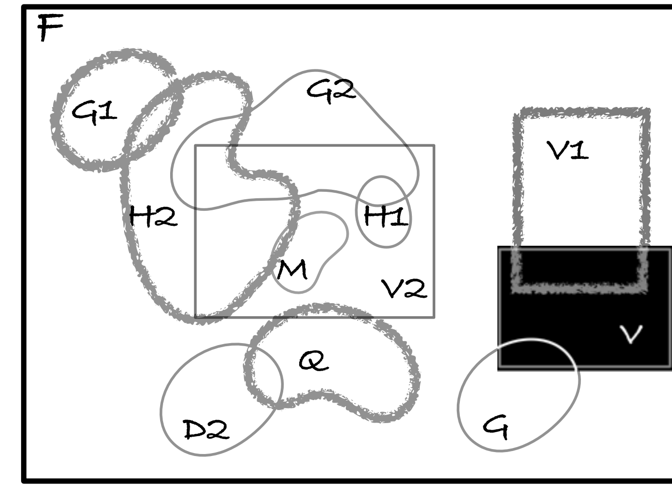
Se propone un método "coherente" para la extensión de las funciones de conjunto $g:(L^E,\leq)\to(L^F,\leq)$, a otras $\hat{g}_{(V,W)}:(L^E,\sqsubseteq^W)\to(L^F,\sqsubseteq^V)$.

g

$((L^F,\leq,\cdot,+,\emptyset,F),',^c)$



$\varphi_V(K)=K\Delta V$



Coherencia:

si $\quad g(\bigcup_{j\in J}A_j)=\bigcup_{j\in J}g(A_j),\ \forall(A_j)_{j\in J},$

$(A\subseteq B)\Rightarrow(g(A)\subseteq g(B)),$ etc…

Entonces también:

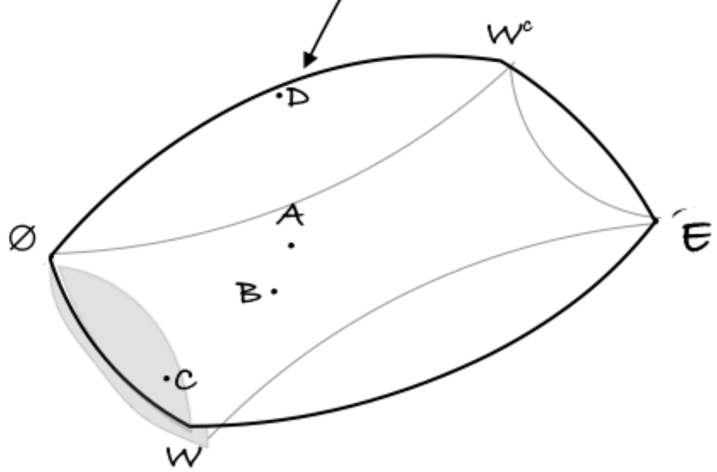
$\underline{\hat{g}_{(V,W)}}(\bigsqcup_{j\in J}^{W}A_j)=\bigsqcup_{j\in J}^{V}\underline{\hat{g}_{(V,W)}}(A_j),\ \forall(A_j)_{j\in J},$

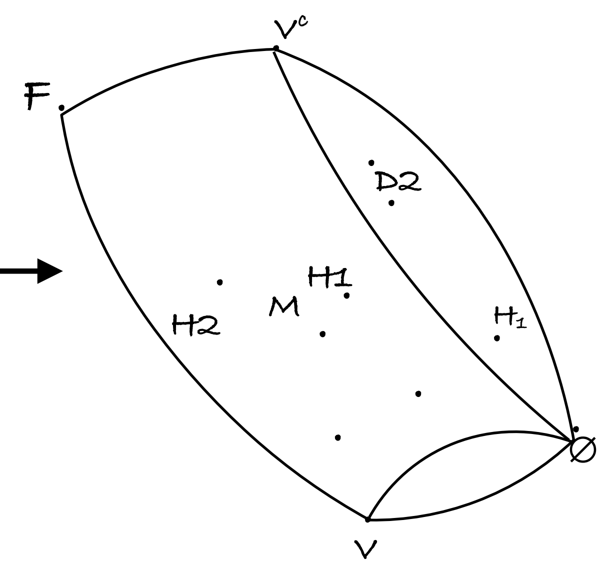
$(A\sqsubseteq^W B)\Rightarrow(\underline{\hat{g}_{(V,W)}}(A)\sqsubseteq^V\underline{\hat{g}_{(V,W)}}(B)),$ etc…

φ_W

?

$\hat{g}_{(W,V)}$



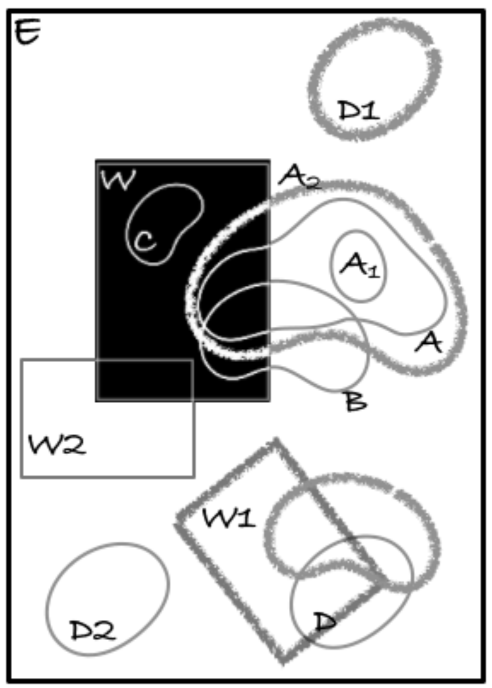


Sistema algebraico $((L^E,\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W,W,W^c),',^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $A\longrightarrow\varphi_W(A)=A\Delta W=(A'\cdot W)+(A\cdot W^c)$

$((L^F,\sqsubseteq^V,\sqcap^V,\sqcup^V,V,V^c),',^c)$

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos

$\emptyset \leq E,\ A \leq E,\ B \leq E, \ldots,\ E \leq E$

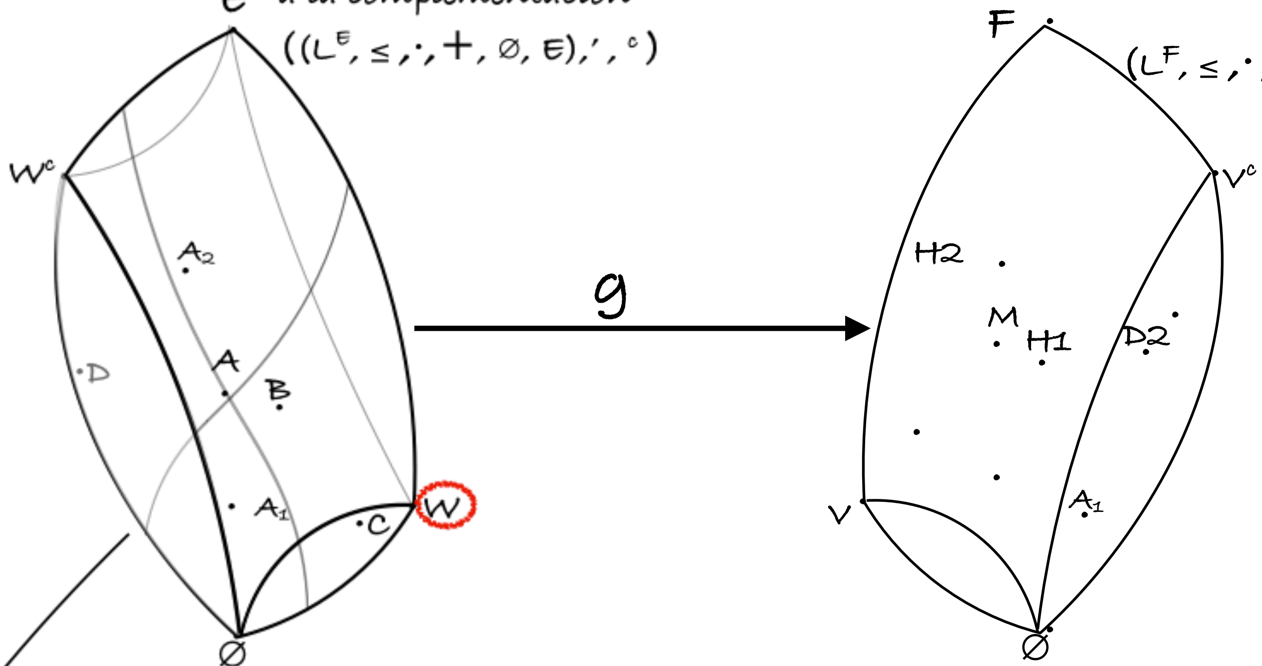


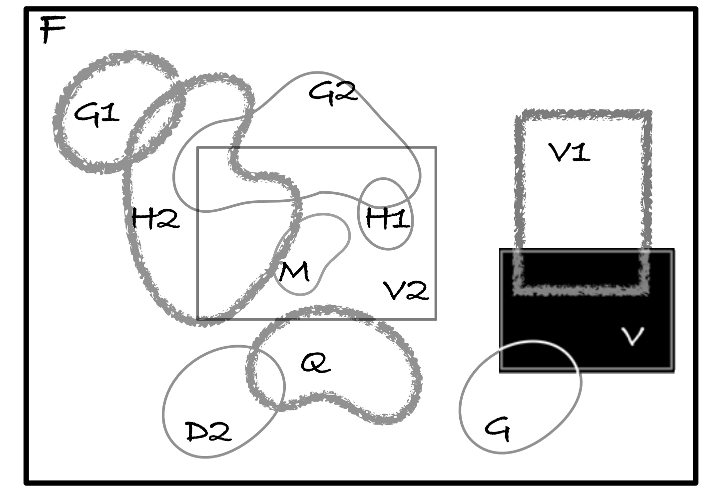
Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación

$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', {}^c)$

Se propone un método "coherente" para la extensión de las funciones de conjunto $g:(L^E, \leq) \rightarrow (L^F, \leq)$, a otras $\hat{g}_{(v,w)}:(L^E, \sqsubseteq^W) \rightarrow (L^F, \sqsubseteq^V)$.

$((L^F, \leq, \cdot, +, \emptyset, F), ', {}^c)$





$\varphi_w(S) = S \Delta W$

$\varphi_v(K) = K \Delta V$

Coherencia:

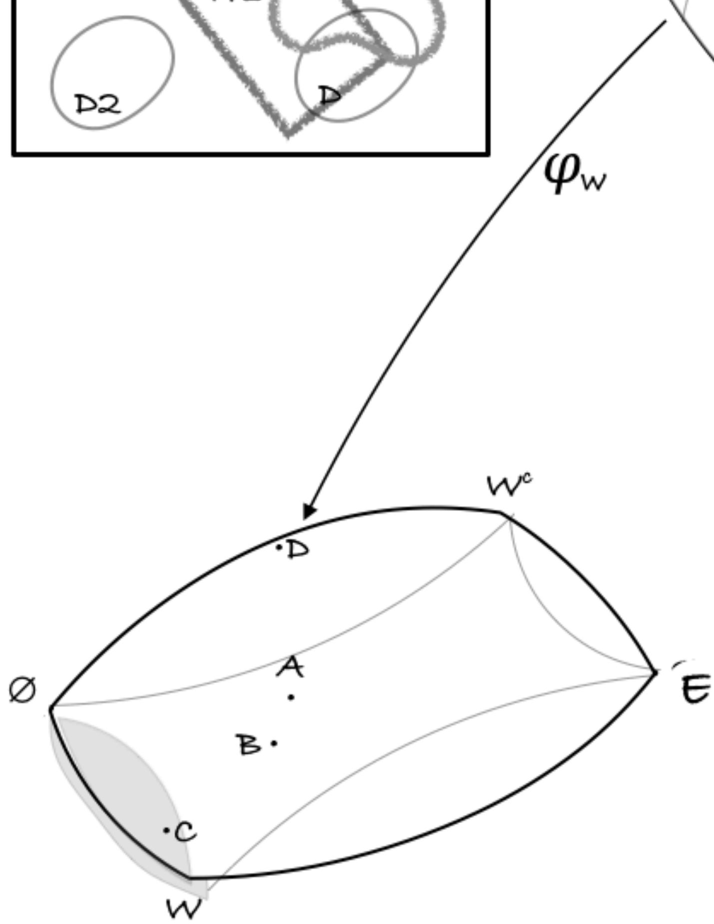
si $g(\bigcup_{j \in J} A_j) = \bigcup_{j \in J} g(A_j),\ \forall (A_j)_{j \in J}$,

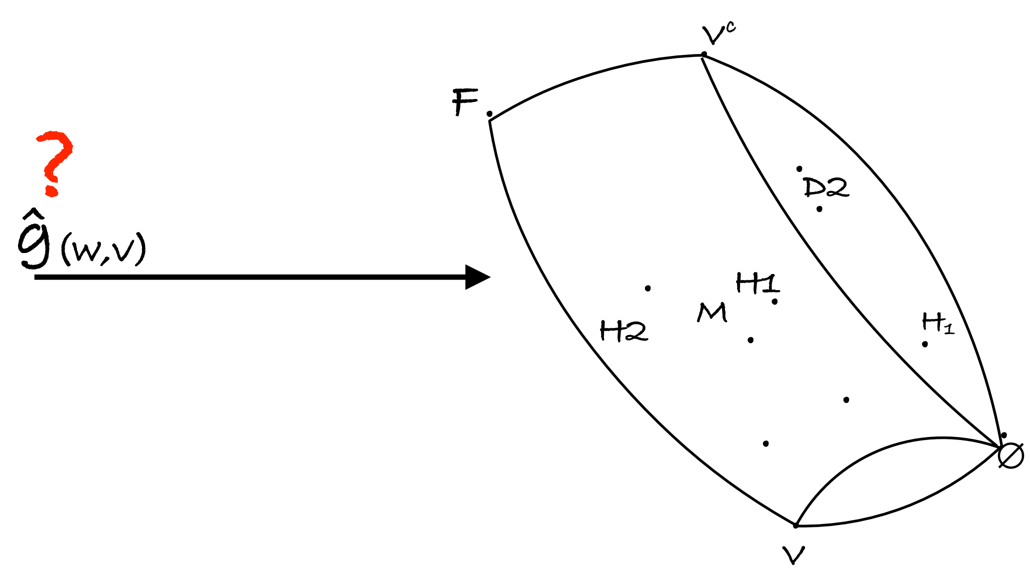
$(A \subseteq B) \Rightarrow (g(A) \subseteq g(B))$, etc...

Entonces también:

$\underline{\hat{g}_{(v,w)}}(\bigsqcup^W_{j \in J} A_j) = \bigsqcup^V_{j \in J} \underline{\hat{g}_{(v,w)}}(A_j),\ \forall (A_j)_{j \in J}$,

$(A \sqsubseteq^W B) \Rightarrow (\underline{\hat{g}_{(v,w)}}(A) \sqsubseteq^V \underline{\hat{g}_{(v,w)}}(B))$, etc...





Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', {}^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $A \longrightarrow \varphi_w(A) = A \Delta W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)$

$((L^F, \sqsubseteq^V, \sqcap^V, \sqcup^V, V, V^c), ', {}^c)$

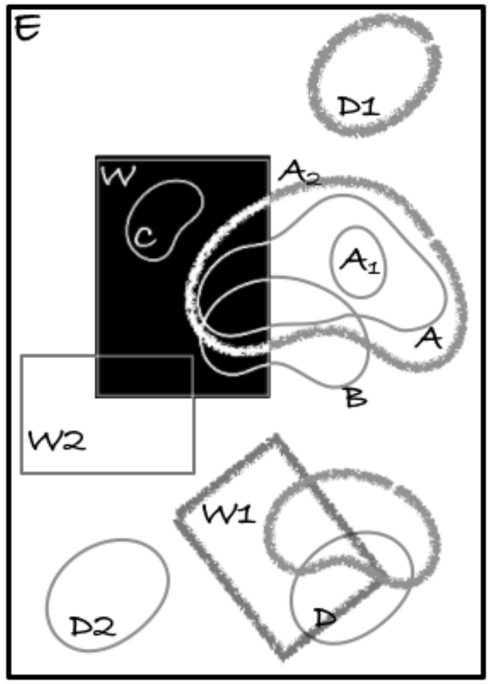
La relación R_g asociada a la función g es:
$(x\, R_g\, y) \Leftrightarrow (y = g(x))$

Luego, si $\hat{w} = (w,v)$, su relación extensión $(\hat{R}_g)_{\hat{w}}$ es:
$[x (\hat{R}_g)_{\hat{w}}\, y] \Leftrightarrow [\varphi_w(x)\, R_g\, \varphi_v(y)]$,

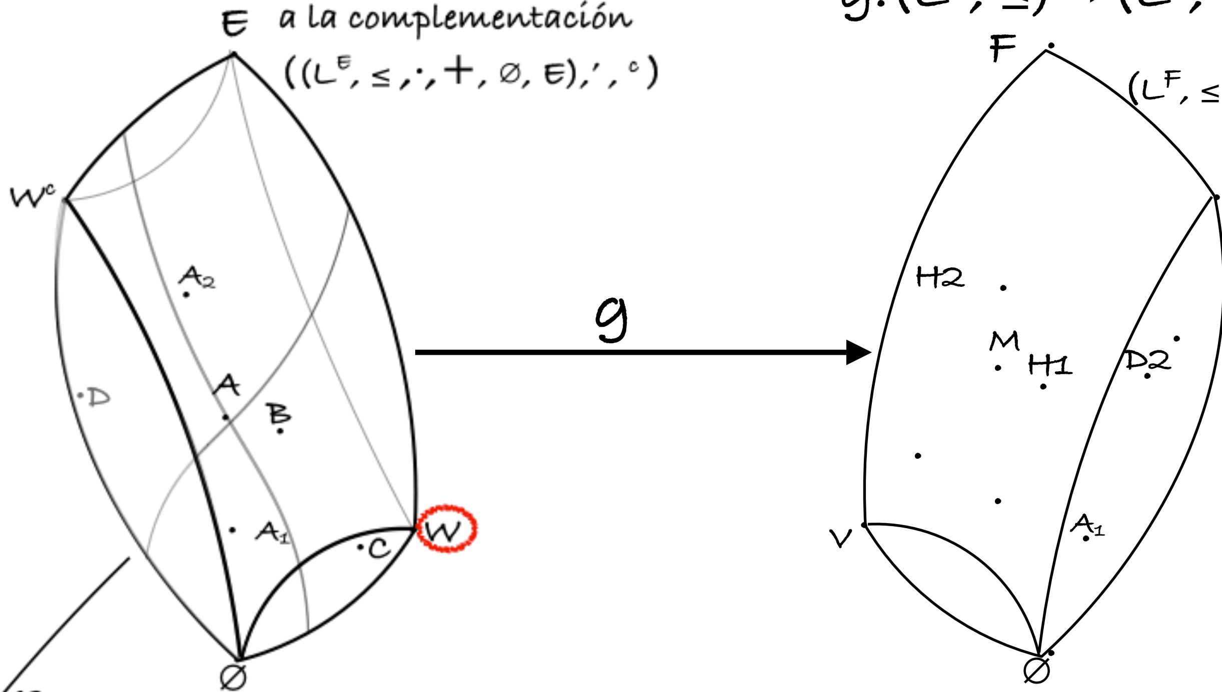
y en consecuencia.
$y = \varphi_v(\varphi_v(y)) = \varphi_v(g(\varphi_w(x)))$,

es decir,
$\varphi_v(y) = g(\varphi_w(x))$

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos
$\emptyset \le E,\ A \le E,\ B \le E, \dots,\ E \le E$

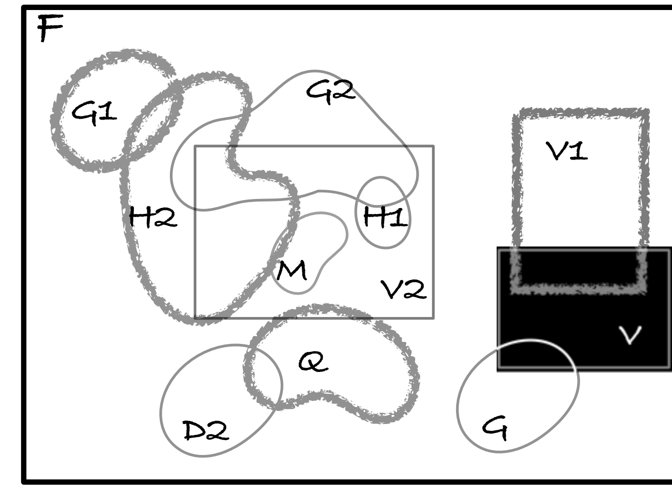


Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \le, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$

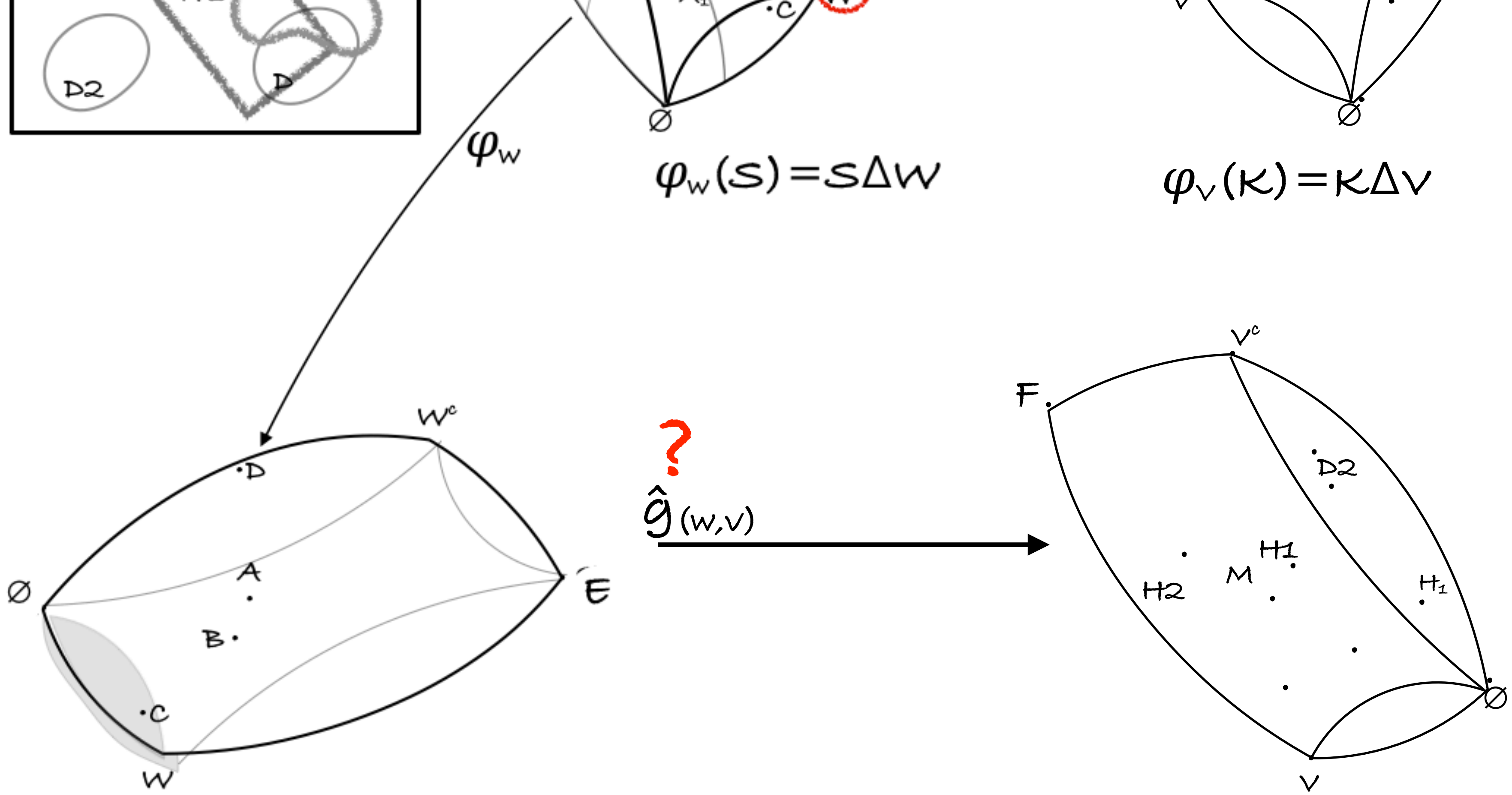


Se propone un método "coherente" para la extensión de las funciones de conjunto $g:(L^E, \le) \to (L^F, \le)$, a otras $\hat{g}_{(v,w)}:(L^E, \sqsubseteq^W) \to (L^F, \sqsubseteq^V)$.

$(L^F, \le, \cdot, +, \emptyset, F), ', ^c)$



$\varphi_w(S) = S \Delta W$ $\qquad$ $\varphi_v(K) = K \Delta V$



Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $A \longrightarrow \varphi_w(A) = A \Delta W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)$

$((L^F, \sqsubseteq^V, \sqcap^V, \sqcup^V, V, V^c), ', ^c)$

Coherencia:

si $g(\bigcup_{j\in J} A_j) = \bigcup_{j\in J} g(A_j),\ \forall (A_j)_{j\in J},$

$(A \subseteq B) \Rightarrow (g(A) \subseteq g(B))$, etc...

Entonces también:

$\hat{g}_{(v,w)}(\bigsqcup^W_{j\in J} A_j) = \bigsqcup^V_{j\in J} \hat{g}_{(v,w)}(A_j),\ \forall (A_j)_{j\in J},$

$(A \sqsubseteq^W B) \Rightarrow (\hat{g}_{(v,w)}(A) \sqsubseteq^V \hat{g}_{(v,w)}(B))$, etc...

La relación R_g asociada a la función g es:
$(x R_g y) \Leftrightarrow (y = g(x))$

Luego, si $\hat{w} = (w,v)$, su relación extensión $(\hat{R}_g)_{\hat{w}}$ es:
$[x (\hat{R}_g)_{\hat{w}} y] \Leftrightarrow [\varphi_w(x) R_g \varphi_v(y)]$,

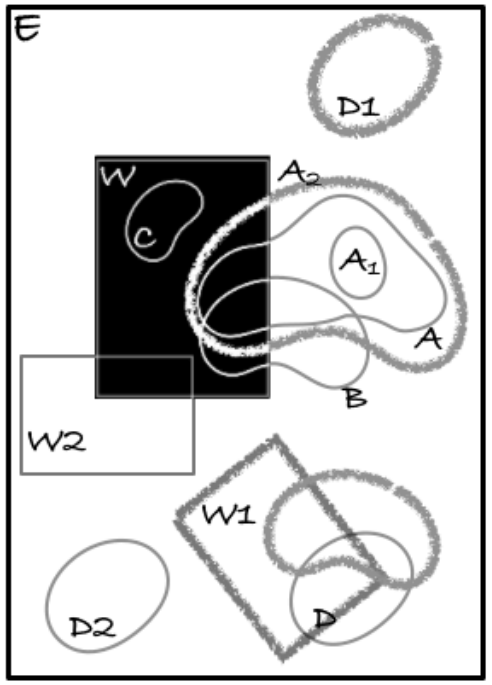
y en consecuencia.
$y = \varphi_v(\varphi_v(y)) = \varphi_v(g(\varphi_w(x)))$,

es decir,
$\varphi_v(y) = g(\varphi_w(x))$

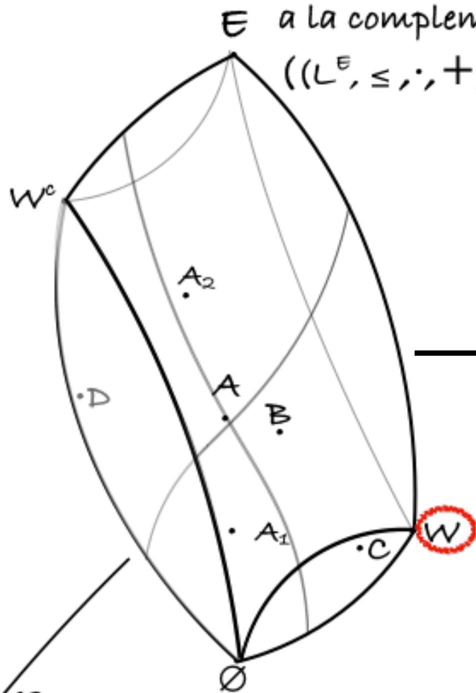
por lo que, finalmente, la propuesta de extensión $\hat{g}_{\hat{w}}$ es: $\qquad \hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_v \circ g \circ \varphi_w$

Se propone un método "coherente" para la extensión de las funciones de conjunto $g:(L^E, \leq) \to (L^F, \leq)$, a otras $\hat{g}_{(v,w)}:(L^E, \sqsubseteq^W) \to (L^F, \sqsubseteq^V)$.

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos
$\emptyset \leq E,\ A \leq E,\ B \leq E, \dots,\ E \leq E$

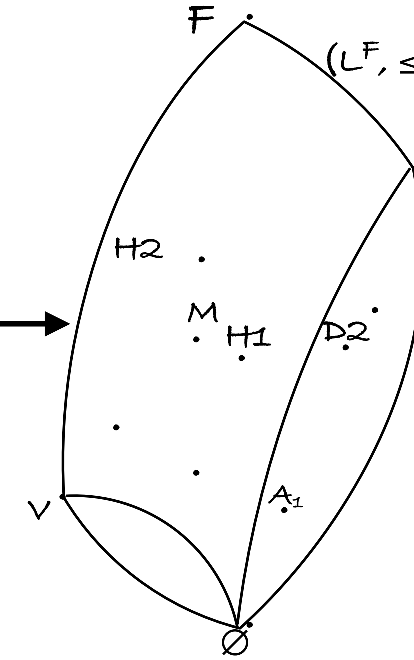


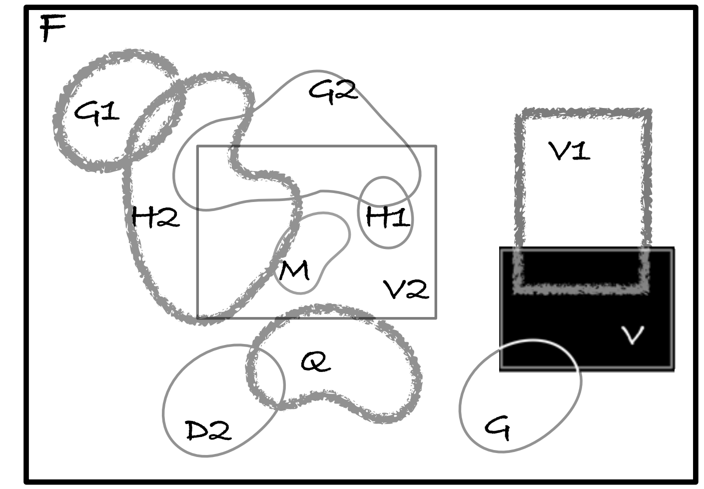
Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$



g

$(L^F, \leq, \cdot, +, \emptyset, F), ', ^c)$





φ_w

$\varphi_w(S) = S \Delta W$

$\varphi_v(K) = K \Delta V$

Coherencia:

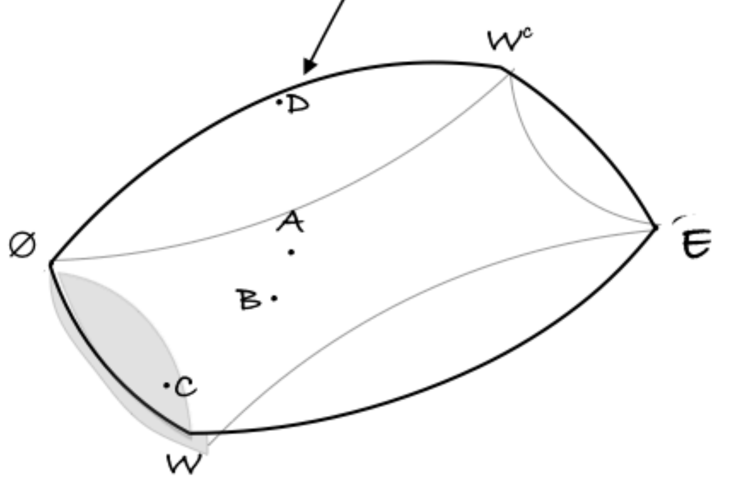
si $g(\bigcup_{j\in J} A_j) = \bigcup_{j\in J} g(A_j),\ \forall (A_j)_{j\in J},$

$(A \subseteq B) \Rightarrow (g(A) \subseteq g(B)),$ etc...

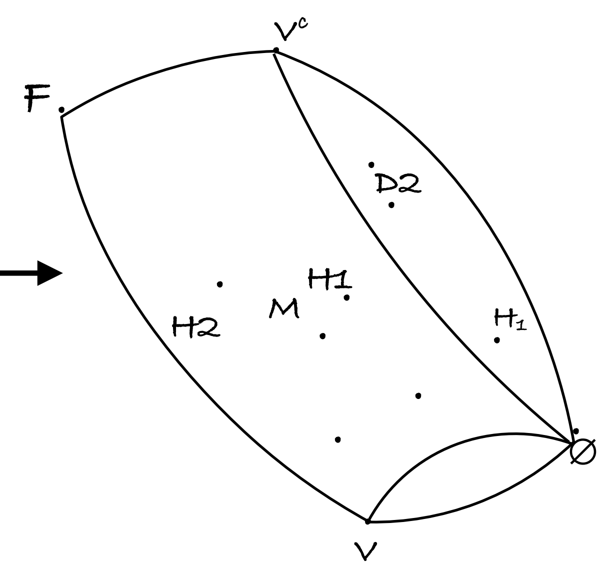
Entonces también:

$\underline{\hat{g}_{(v,w)}}(\bigsqcup^W_{j\in J} A_j) = \bigsqcup^V_{j\in J} \underline{\hat{g}_{(v,w)}}(A_j),\ \forall (A_j)_{j\in J},$

$(A \sqsubseteq^W B) \Rightarrow (\underline{\hat{g}_{(v,w)}}(A) \sqsubseteq^V \underline{\hat{g}_{(v,w)}}(B)),$ etc...



$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_v \circ g \circ \varphi_w$



$((L^F, \sqsubseteq^V, \sqcap^V, \sqcup^V, V, V^c), ', ^c)$

Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $A \longrightarrow \varphi_w(A) = A \Delta W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)$

La relación R_g asociada a la función g es:
$(x\, R_g\, y) \Leftrightarrow (y = g(x))$

Luego, si $\hat{w} = (w,v)$, su relación extensión $(\hat{R}_g)_{\hat{w}}$ es:
$[x (\hat{R}_g)_{\hat{w}}\, y] \Leftrightarrow [\varphi_w(x) R_g \varphi_v(y)],$

y en consecuencia.
$y = \varphi_v(\varphi_v(y)) = \varphi_v(g(\varphi_w(x))),$

es decir,
$\varphi_v(y) = g(\varphi_w(x))$

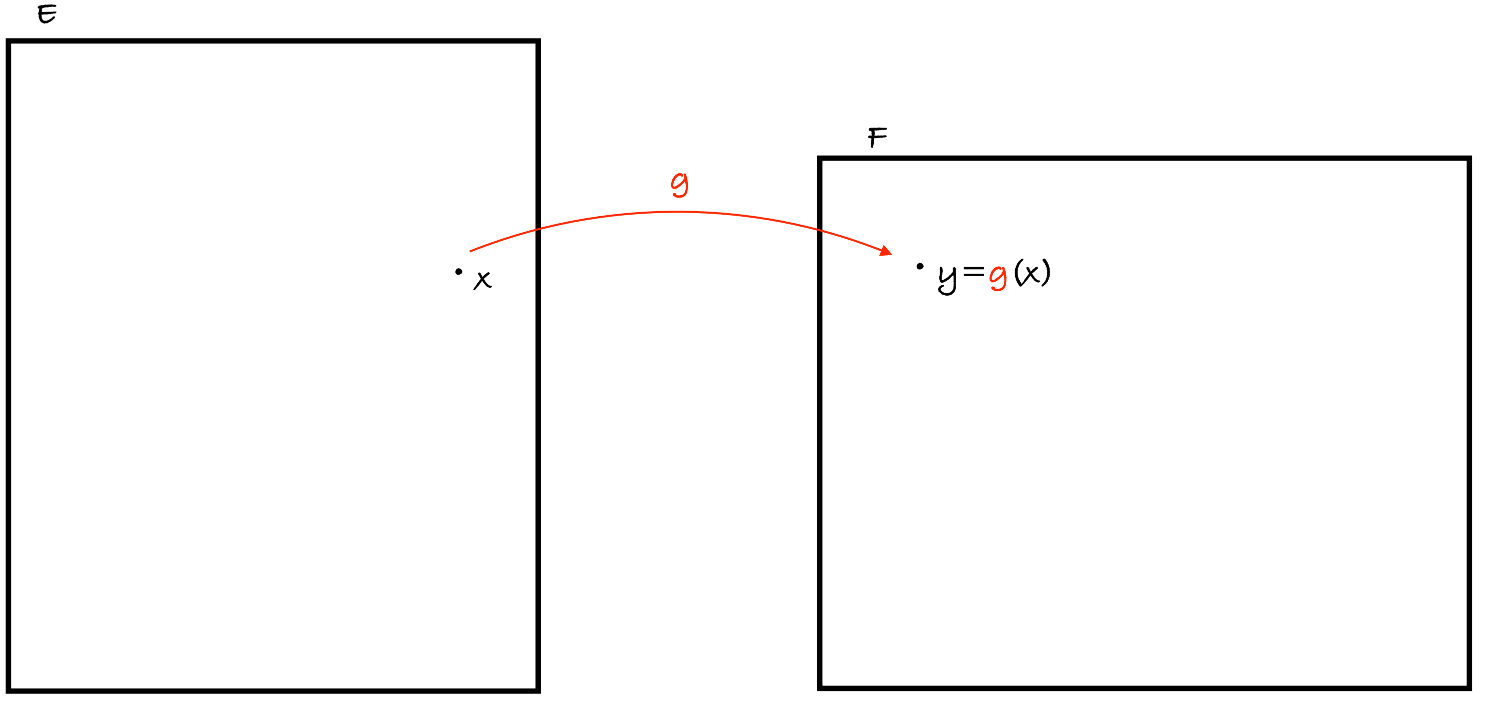
por lo que, finalmente, la propuesta de extensión $\hat{g}_{\hat{w}}$ es:

Ejemplo:

Relación de las imágenes directa $g{:}P(E)\to P(F)$ e inversa $g^{-1}{:}P(F)\to P(E)$ de funciones $g{:}E\to F$, con las w-inclusiones $\sqsubseteq^{w}$, las w-uniones $\sqcup^{w}$ y las w-intersecciones $\sqcap^{w}$ en E y F.

E

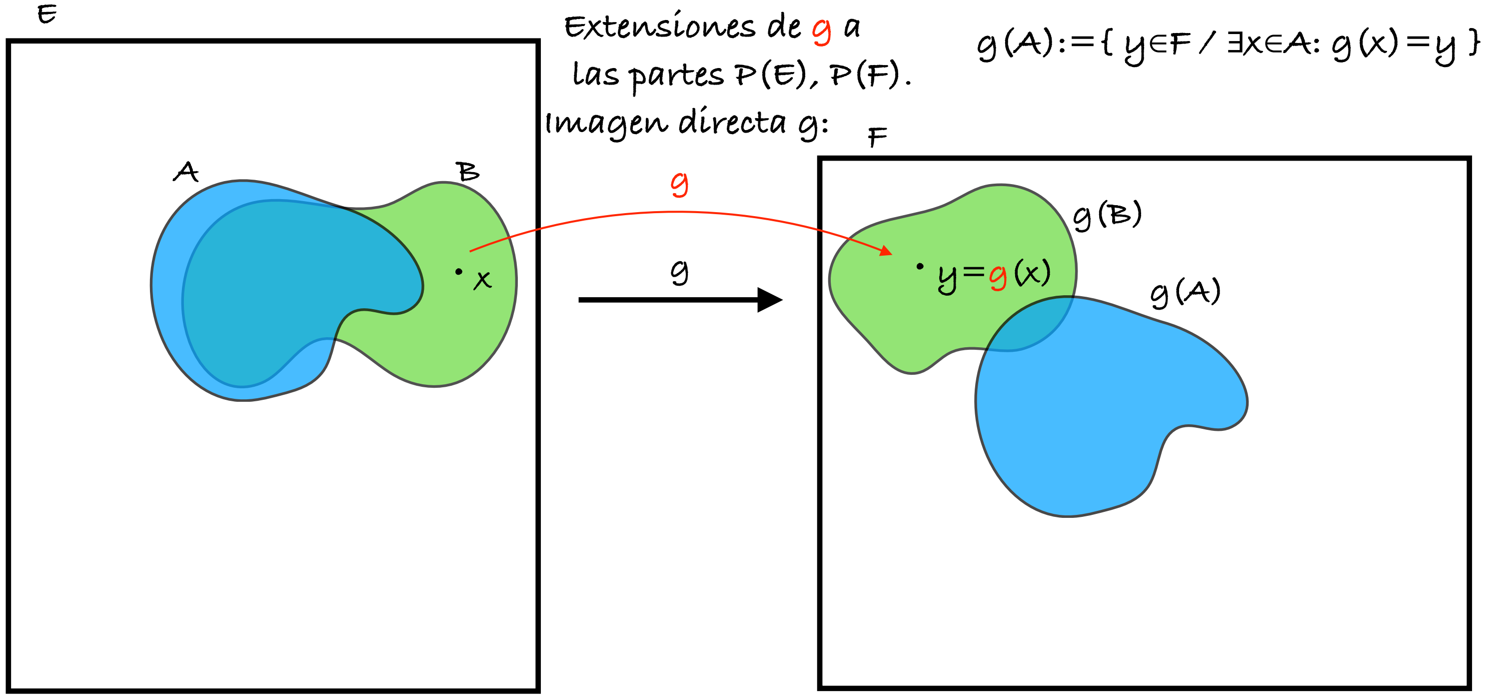
F


E
F
g
x
y=g(x)

Extensiones de g a las partes $P(E)$, $P(F)$.

Imagen directa g:

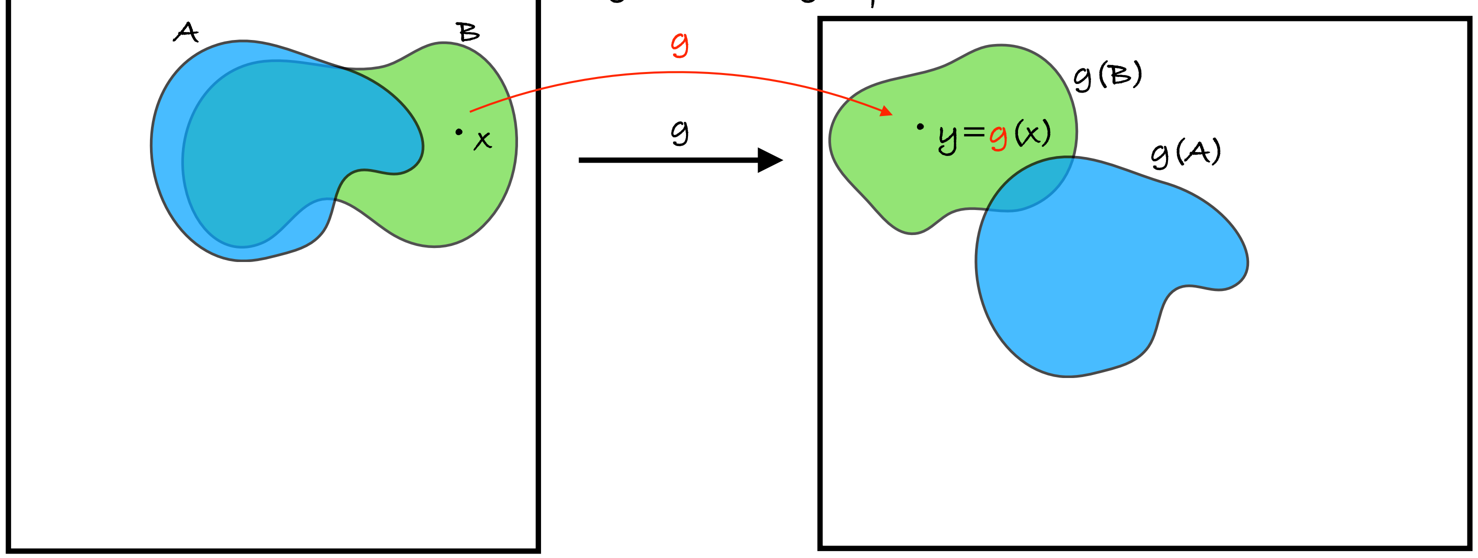
$g(A) := \{ y \in F \;/\; \exists x \in A : g(x) = y \}$



Extensiones de g a las partes $P(E)$, $P(F)$.

Imagen directa g:

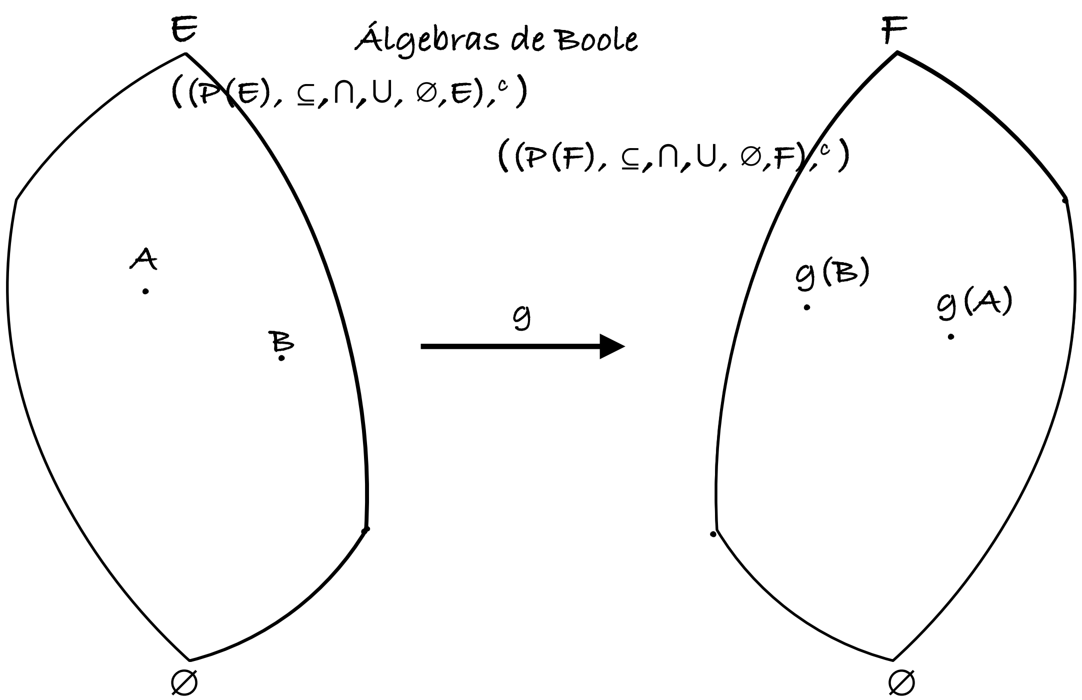
$g(A) := \{\, y \in F \,/\, \exists x \in A : g(x) = y \,\}$



Álgebras de Boole

$((P(E), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, E), {}^c)$

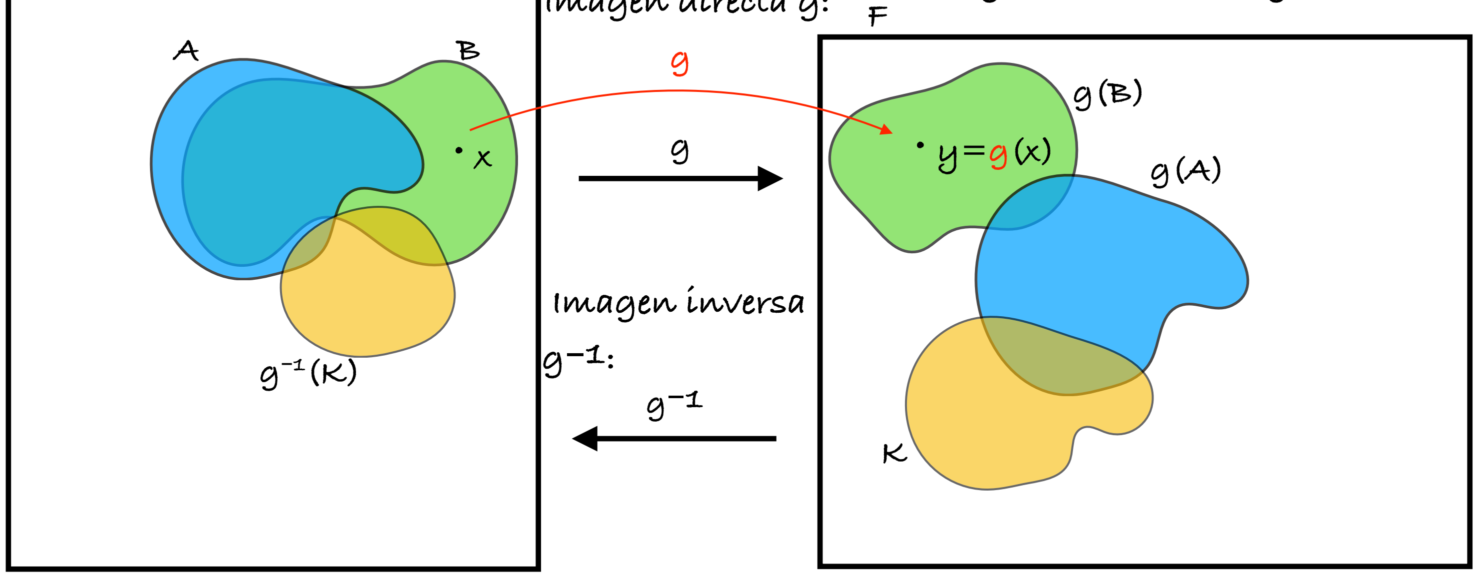
$((P(F), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, F), {}^c)$

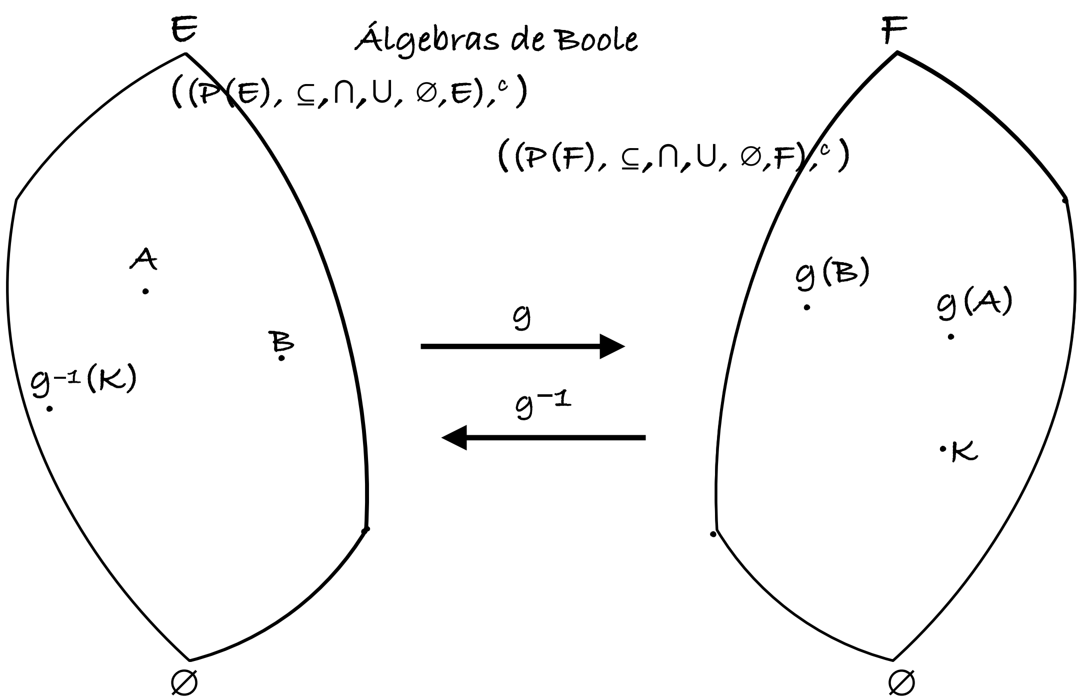


Extensiones de g a las partes $\mathcal{P}(E)$, $\mathcal{P}(F)$.

Imagen directa g: $g(A):=\{y\in F \,/\, \exists x\in A : g(x)=y\}$

Imagen inversa g^{-1}: $g^{-1}(K):=\{x\in E \,/\, g(x)\in K\}$





Propiedades de las extensiones

$g\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right) = \bigcup_{j\in J} g(A_j)$, $g\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) \subseteq \bigcap_{j\in J} g(A_j)$ $\quad \forall (A_j)_{j\in J}$, familia de $\mathcal{P}(E)$,

$(A\subseteq B) \Rightarrow (g(A)\subseteq g(B))$, $\quad (g(A)-g(B))\subseteq g(A-B)$, $\quad g(\emptyset)=\emptyset$.

$g^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} K_j\right) = \bigcup_{j\in J} g^{-1}(K_j)$, $g^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} K_j\right) = \bigcap_{j\in J} g^{-1}(K_j)$ $\quad \forall (K_j)_{j\in J}$

$(K\subseteq S) \Rightarrow (g^{-1}(K)\subseteq g^{-1}(S))$, $(g^{-1}(K)-g^{-1}(S)) = g^{-1}(K-S)$,

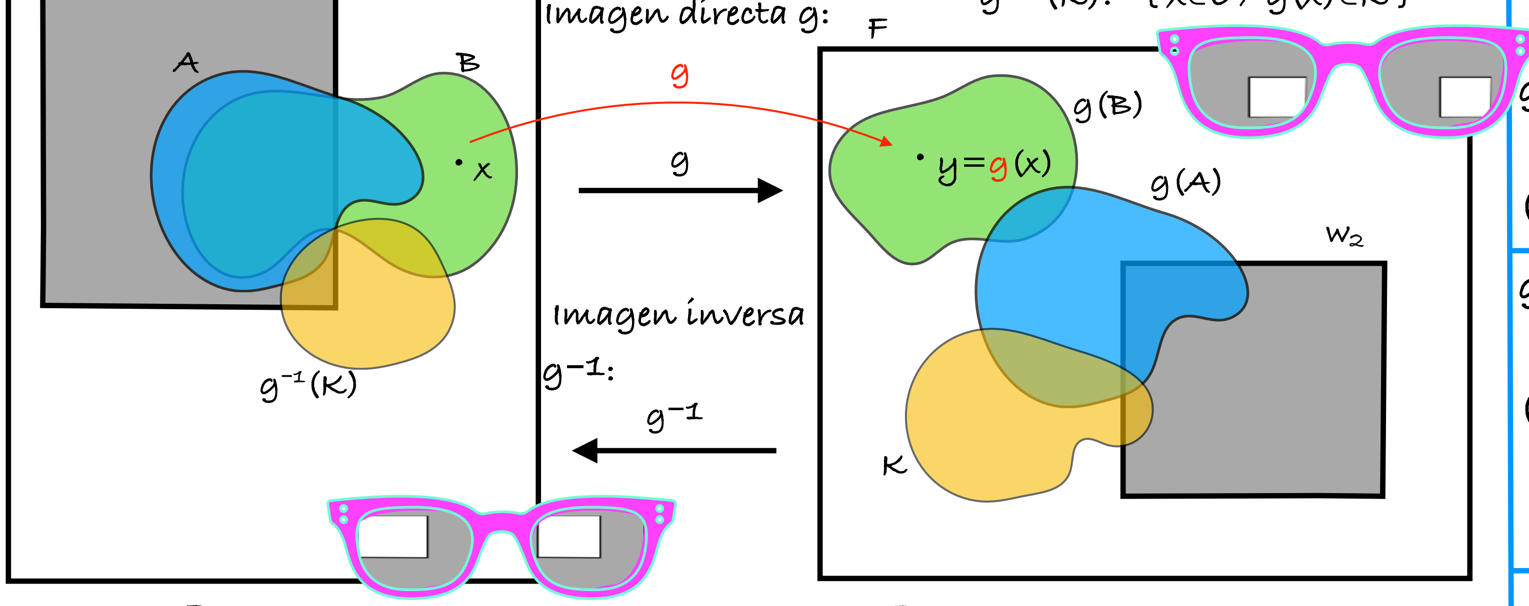
$g^{-1}(K^c) = (g^{-1}(K))^c$, $g^{-1}(\emptyset)=\emptyset$, $g^{-1}(F)=E$.

$A \subseteq g^{-1}(g(A))\ \forall A\in\mathcal{P}(E)$ $\qquad g(g^{-1}(K))\subseteq K\ \forall K\in\mathcal{P}(K)$

Extensiones de g a las partes $\mathcal{P}(E)$, $\mathcal{P}(F)$.

Imagen directa g: $g(A):=\{y\in F \,/\, \exists x\in A: g(x)=y\}$

$g^{-1}(K):=\{x\in E \,/\, g(x)\in K\}$



Propiedades de las extensiones

$g(\bigcup_{j\in J} A_j) = \bigcup_{j\in J} g(A_j)$, $g(\bigcap_{j\in J} A_j) \subseteq \bigcap_{j\in J} g(A_j)$ $\forall (A_j)_{j\in J}$, familia de $\mathcal{P}(E)$,

$(A\subseteq B) \Rightarrow (g(A)\subseteq g(B))$, $(g(A)-g(B))\subseteq g(A-B)$, $g(\emptyset)=\emptyset$.

$g^{-1}(\bigcup_{j\in J} K_j) = \bigcup_{j\in J} g^{-1}(K_j)$, $g^{-1}(\bigcap_{j\in J} K_j) = \bigcap_{j\in J} g^{-1}(K_j)$ $\forall (K_j)_{j\in J}$

$(K\subseteq S) \Rightarrow (g^{-1}(K)\subseteq g^{-1}(S))$, $(g^{-1}(K)-g^{-1}(S)) = g^{-1}(K-S)$,

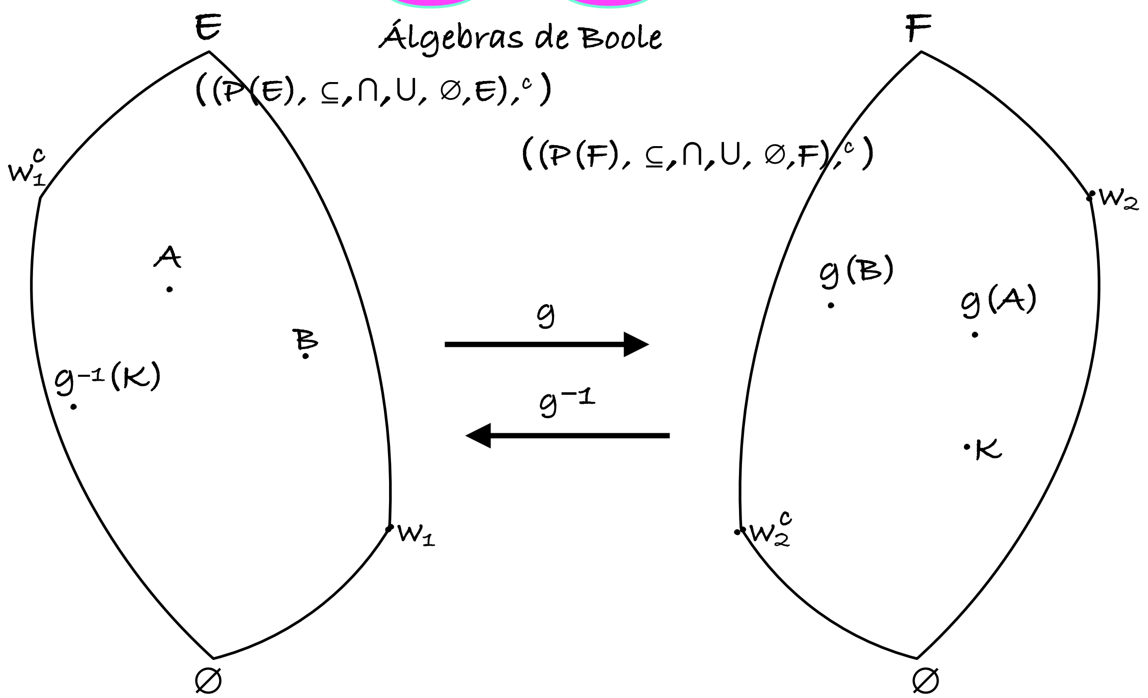
$g^{-1}(K^c)=(g^{-1}(K))^c$, $g^{-1}(\emptyset)=\emptyset$, $g^{-1}(F)=E$.

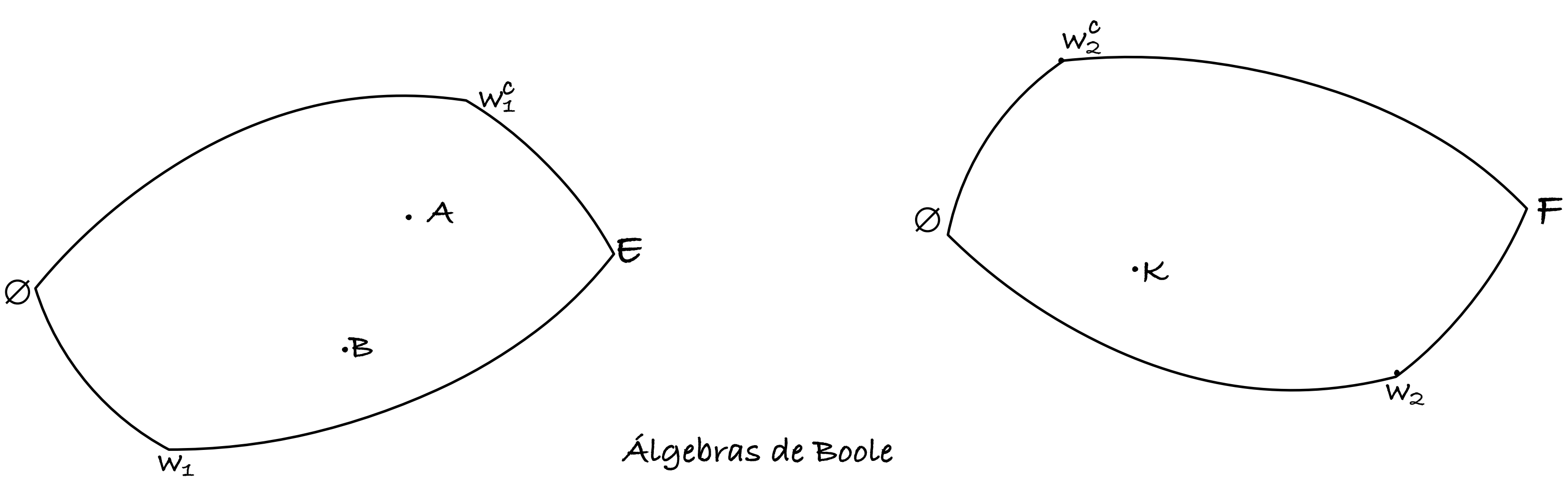
$A\subseteq g^{-1}(g(A))\ \forall A\in\mathcal{P}(E)$ $\quad g(g^{-1}(K))\subseteq K\ \forall K\in\mathcal{P}(K)$

Álgebras de Boole

$((\mathcal{P}(E), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, E), {}^c)$

$((\mathcal{P}(F), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, F), {}^c)$





Álgebras de Boole

$((\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^{W_1}, \sqcap^{W_1}, \sqcup^{W_1}, W_1, W_1^c), {}^c)$ $\quad ((\mathcal{P}(F), \sqsubseteq^{W_2}, \sqcap^{W_2}, \sqcup^{W_2}, W_2, W_2^c), {}^c)$

Extensiones de g a las partes $\mathcal{P}(E)$, $\mathcal{P}(F)$.

Imagen directa g: $g(A) := \{ y \in F \,/\, \exists x \in A: g(x) = y \}$

$g^{-1}(K) := \{ x \in E \,/\, g(x) \in K \}$

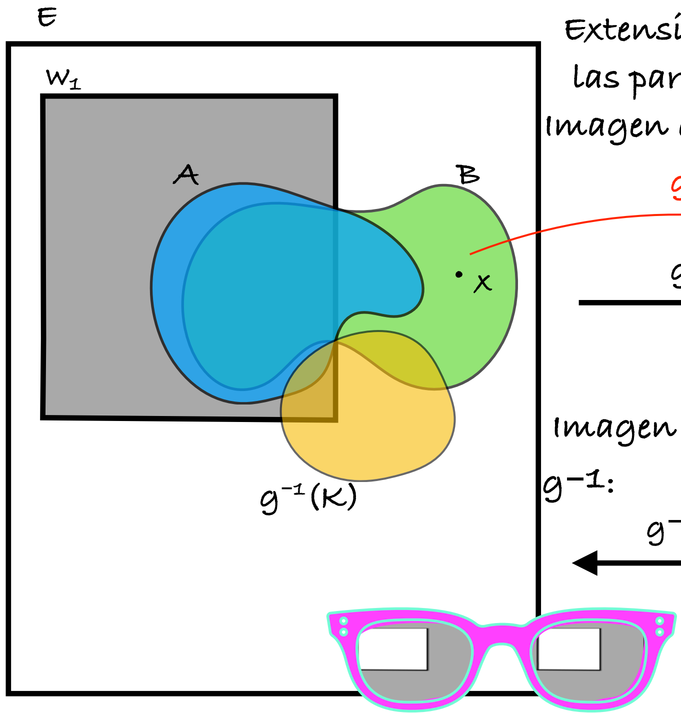
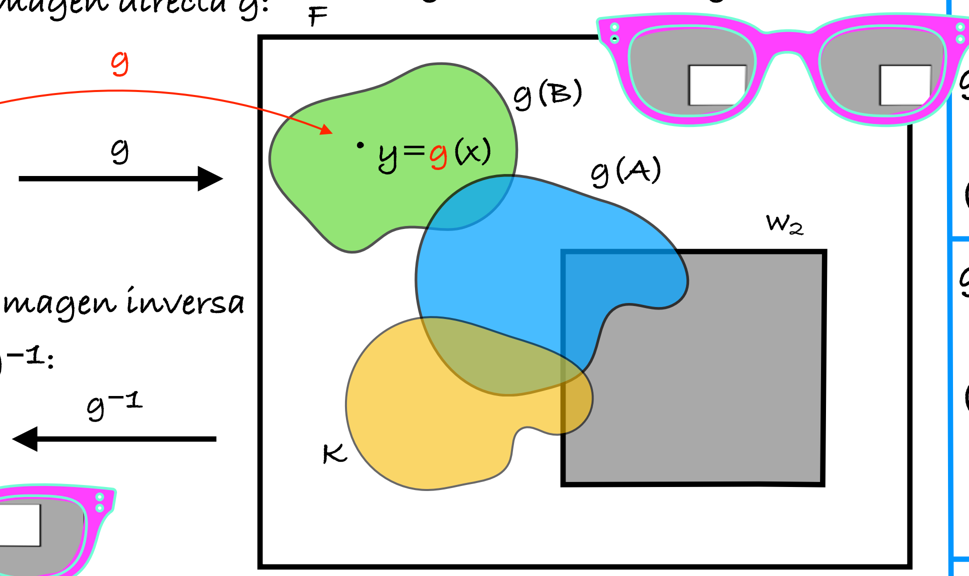


Imagen inversa g^{-1}:



Propiedades de las extensiones

$g\left(\bigcup_{j\in J} A_j\right) = \bigcup_{j\in J} g(A_j)$, $g\left(\bigcap_{j\in J} A_j\right) \subseteq \bigcap_{j\in J} g(A_j)$ $\quad \forall (A_j)_{j\in J}$, familia de $\mathcal{P}(E)$,

$(A \subseteq B) \Rightarrow (g(A) \subseteq g(B))$, $\quad (g(A) - g(B)) \subseteq g(A - B)$, $\quad g(\varnothing) = \varnothing$.

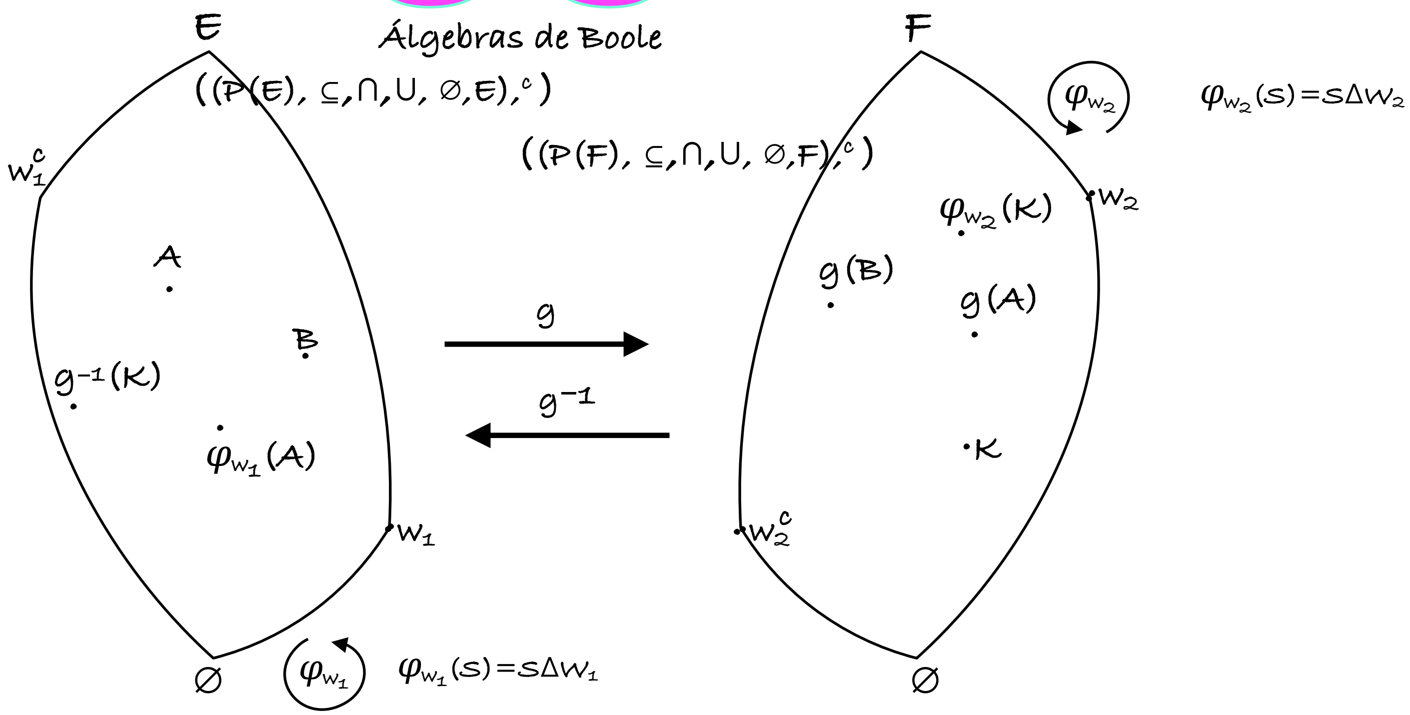
$g^{-1}\left(\bigcup_{j\in J} K_j\right) = \bigcup_{j\in J} g^{-1}(K_j)$, $g^{-1}\left(\bigcap_{j\in J} K_j\right) = \bigcap_{j\in J} g^{-1}(K_j)$ $\quad \forall (K_j)_{j\in J}$

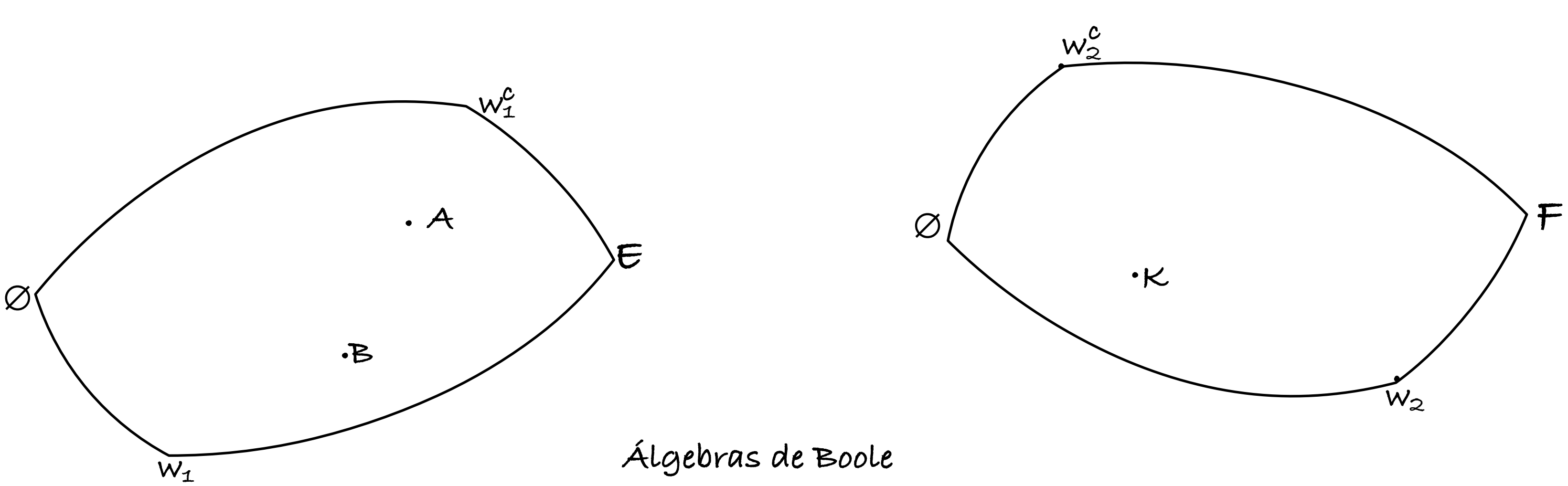
$(K \subseteq S) \Rightarrow (g^{-1}(K) \subseteq g^{-1}(S))$, $(g^{-1}(K) - g^{-1}(S)) = g^{-1}(K - S)$,

$g^{-1}(K^c) = (g^{-1}(K))^c$, $g^{-1}(\varnothing) = \varnothing$, $g^{-1}(F) = E$.

$A \subseteq g^{-1}(g(A))\ \forall A \in \mathcal{P}(E) \qquad g(g^{-1}(K)) \subseteq K\ \ \forall K \in \mathcal{P}(K)$

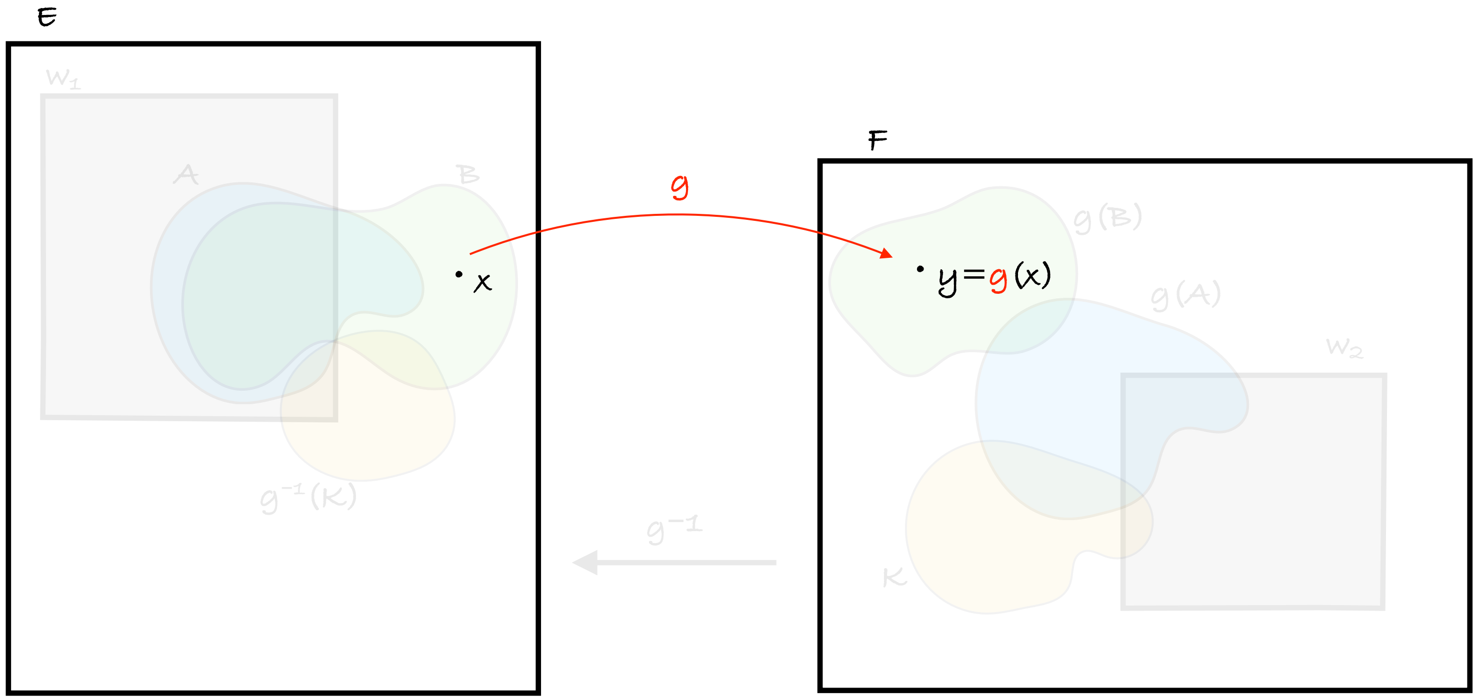
Álgebras de Boole





Álgebras de Boole

$((\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^{W_1}, \sqcap^{W_1}, \sqcup^{W_1}, W_1, W_1^c), ^c)$ $\qquad \hat{W} = (W_2, W_1) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$ $\qquad ((\mathcal{P}(F), \sqsubseteq^{W_2}, \sqcap^{W_2}, \sqcup^{W_2}, W_2, W_2^c), ^c)$



Propiedades de las extensiones

$g(\bigcup_{j\in J} A_j) = \bigcup_{j\in J} g(A_j)$, $g(\bigcap_{j\in J} A_j) \subseteq \bigcap_{j\in J} g(A_j)$ $\forall (A_j)_{j\in J}$, familia de $P(E)$,

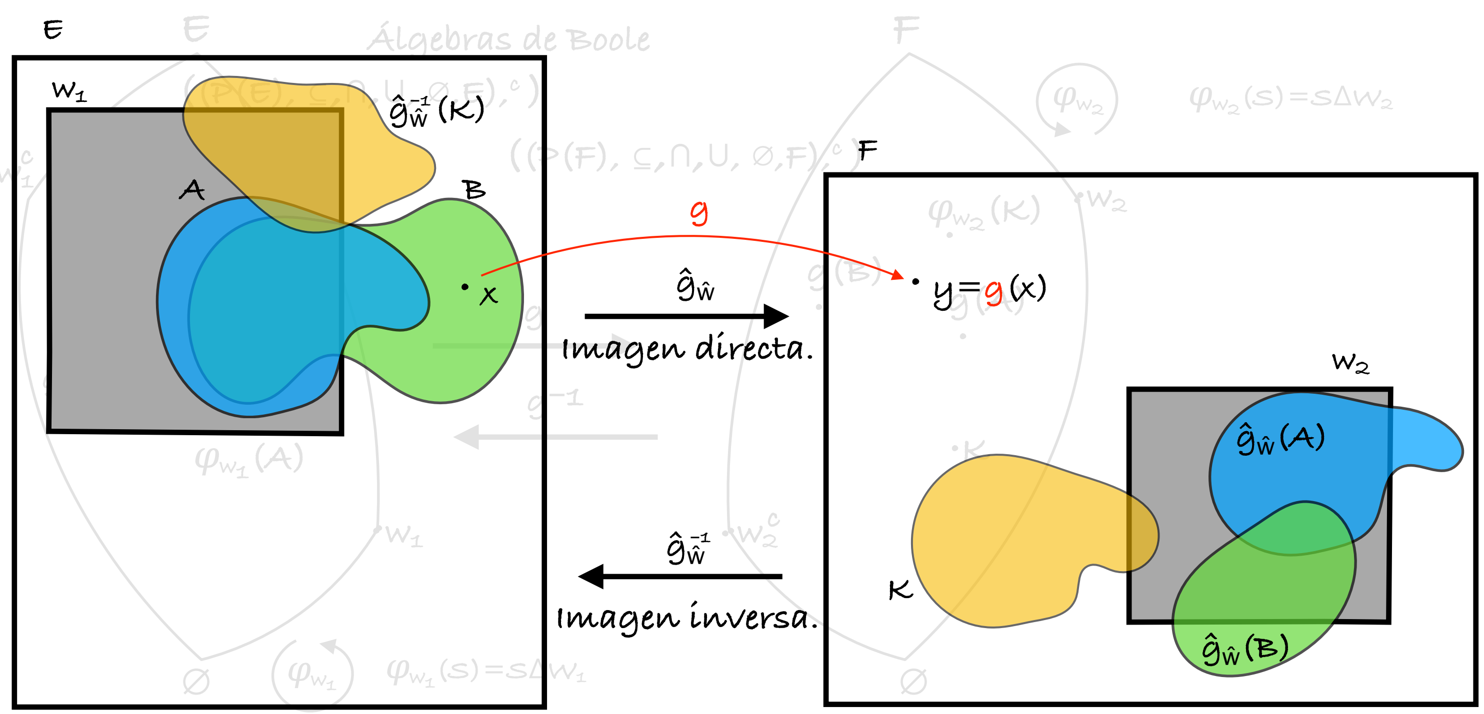
$(A\subseteq B)\Rightarrow(g(A)\subseteq g(B))$, $(g(A)-g(B))\subseteq g(A-B)$, $g(\emptyset)=\emptyset$.

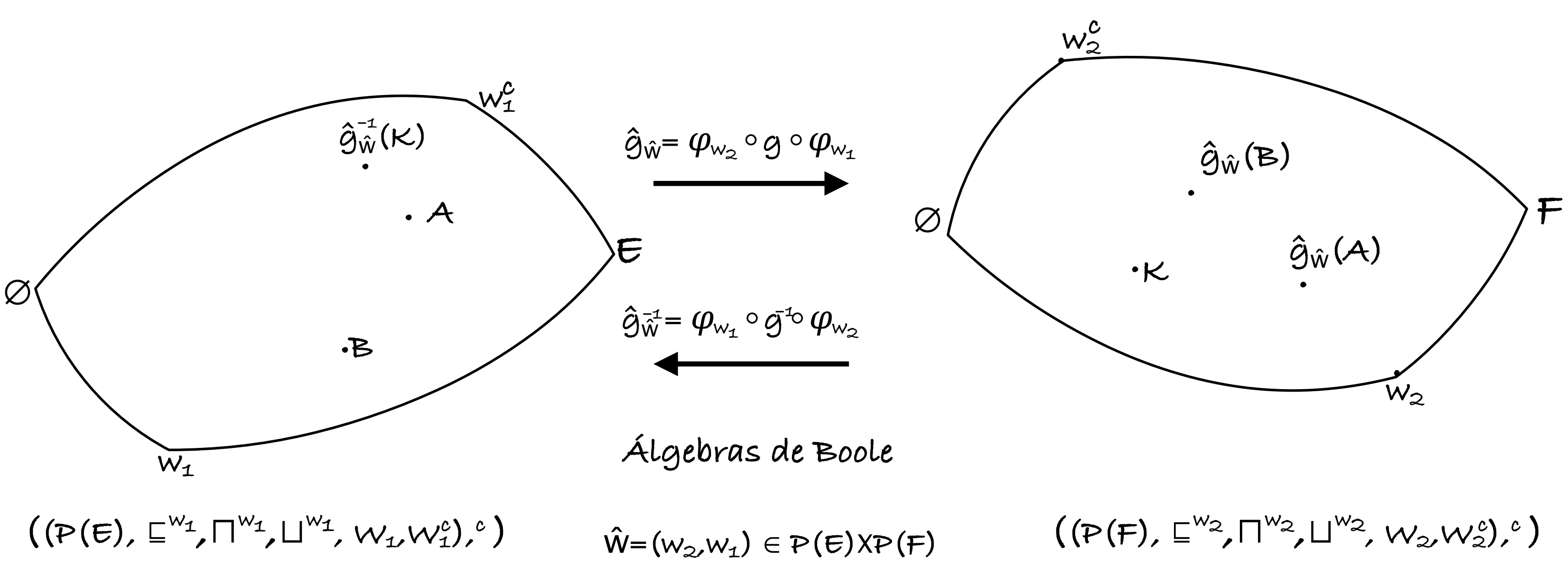
$g^{-1}(\bigcup_{j\in J} K_j) = \bigcup_{j\in J} g^{-1}(K_j)$, $g^{-1}(\bigcap_{j\in J} K_j) = \bigcap_{j\in J} g^{-1}(K_j)$ $\forall (K_j)_{j\in J}$

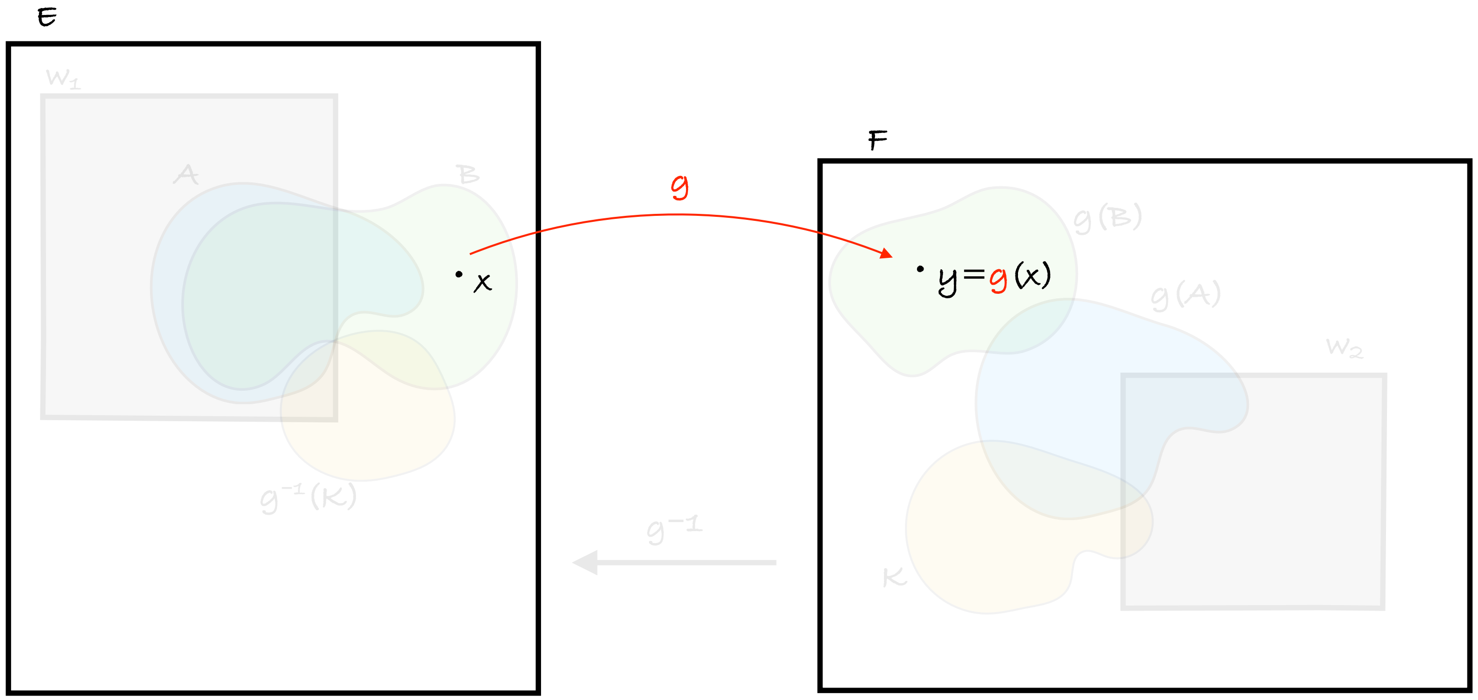
$(K\subseteq S)\Rightarrow(g^{-1}(K)\subseteq g^{-1}(S))$, $(g^{-1}(K)-g^{-1}(S)) = g^{-1}(K-S)$,

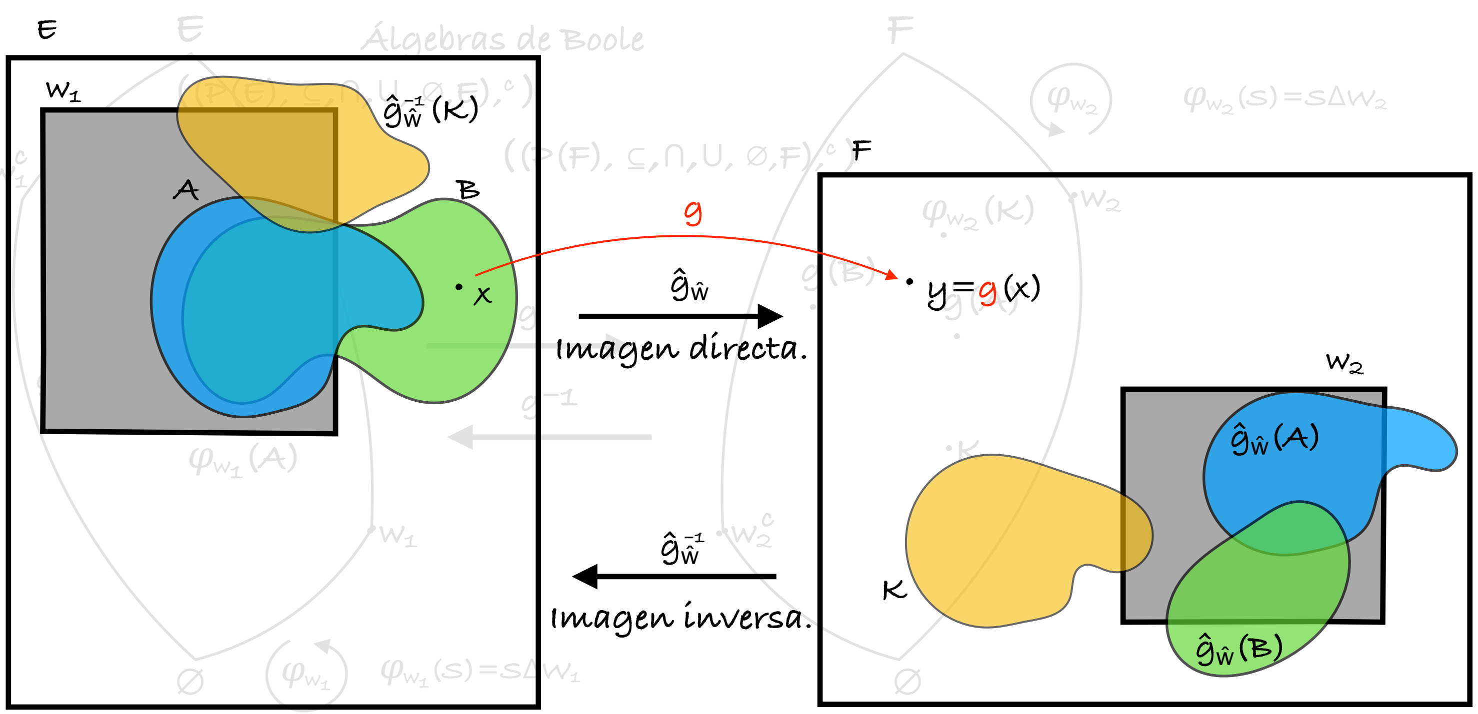
$g^{-1}(K^c)=(g^{-1}(K))^c$, $g^{-1}(\emptyset)=\emptyset$, $g^{-1}(F)=E$.

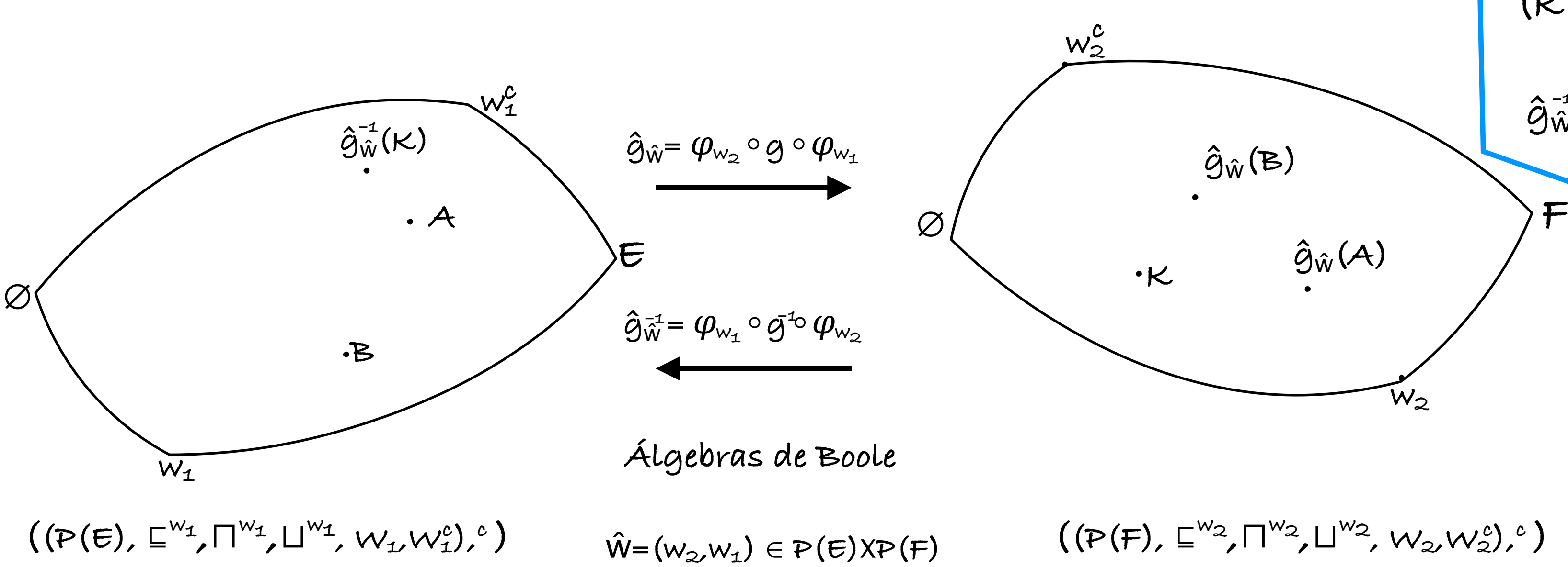
$A\subseteq g^{-1}(g(A))\ \forall A\in P(E)$ $\quad g(g^{-1}(K))\subseteq K\ \forall K\in P(K)$











Propiedades de las extensiones

$$g(\bigcup_{j\in J}A_j)=\bigcup_{j\in J}g(A_j),\ g(\bigcap_{j\in J}A_j)\subseteq\bigcap_{j\in J}g(A_j)\quad\forall(A_j)_{j\in J},\ \text{familia de } P(E),$$

$$(A\subseteq B)\Rightarrow(g(A)\subseteq g(B)),\quad(g(A)-g(B))\subseteq g(A-B),\quad g(\varnothing)=\varnothing.$$

$$g^{-1}(\bigcup_{j\in J}K_j)=\bigcup_{j\in J}g^{-1}(K_j),\ g^{-1}(\bigcap_{j\in J}K_j)=\bigcap_{j\in J}g^{-1}(K_j)\quad\forall(K_j)_{j\in J}$$

$$(K\subseteq S)\Rightarrow(g^{-1}(K)\subseteq g^{-1}(S)),\ (g^{-1}(K)-g^{-1}(S))=g^{-1}(K-S),$$

$$g^{-1}(K^c)=(g^{-1}(K))^c,\ g^{-1}(\varnothing)=\varnothing,\ g^{-1}(F)=E\,.$$

$$A\subseteq g^{-1}(g(A))\ \forall A\in P(E)\qquad g(g^{-1}(K))\subseteq K\ \forall K\in P(K)$$

Propiedades de las w-extensiones

$$\hat{g}_{\hat{w}}(\bigsqcup_{j\in J}^{W_1}A_j)=\bigsqcup_{j\in J}^{W_2}\hat{g}_{\hat{w}}(A_j),\ \hat{g}_{\hat{w}}(\bigsqcap_{j\in J}^{W_1}A_j)\sqsubseteq^{W_2}(\bigsqcap_{j\in J}^{W_2}\hat{g}_{\hat{w}}(A_j))\quad\forall(A_j)_{j\in J},$$

$$(A\sqsubseteq^{W_1}B)\Rightarrow(\hat{g}_{\hat{w}}(A)\sqsubseteq^{W_2}\hat{g}_{\hat{w}}(B)),\quad(\hat{g}_{\hat{w}}(A)\overset{W_2}{-}\hat{g}_{\hat{w}}(B))\sqsubseteq^{W_1}\hat{g}_{\hat{w}}(A\overset{W_1}{-}B),$$

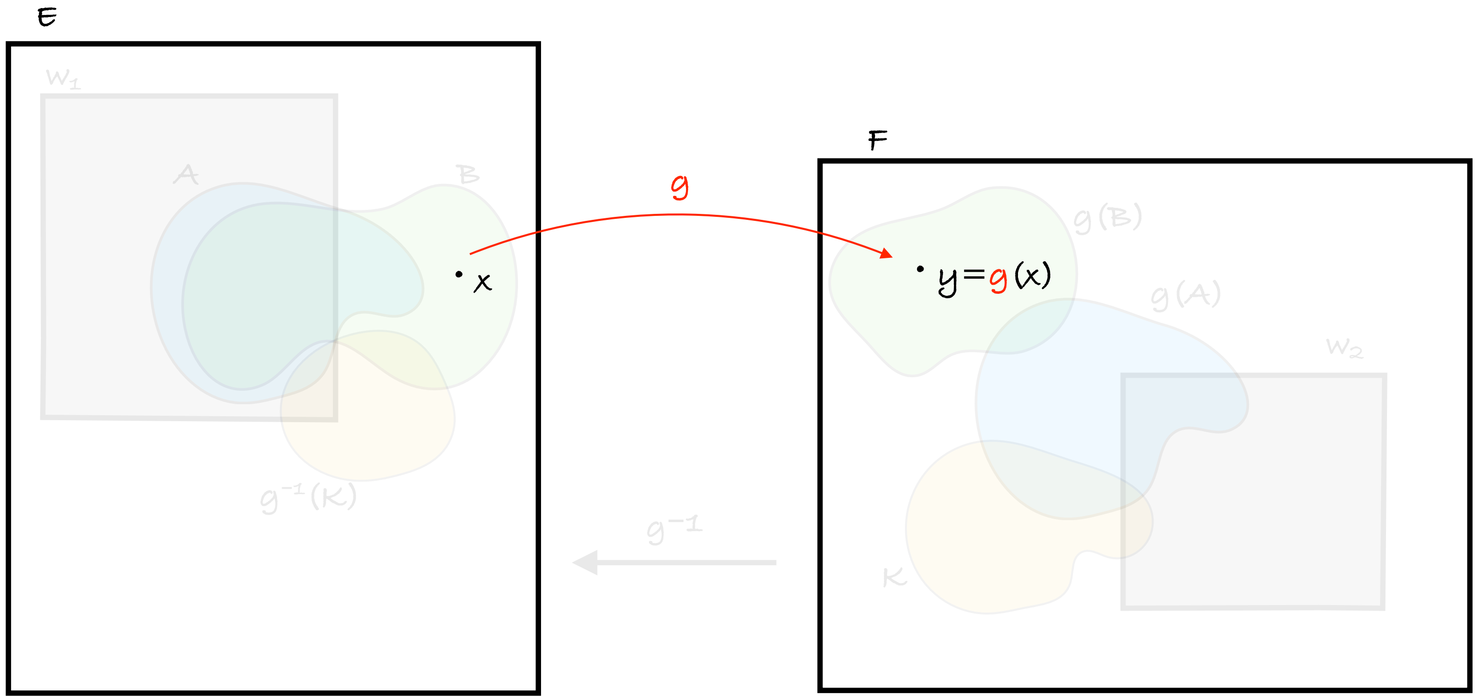
$$\hat{g}_{\hat{w}}(W_1)=W_2.$$

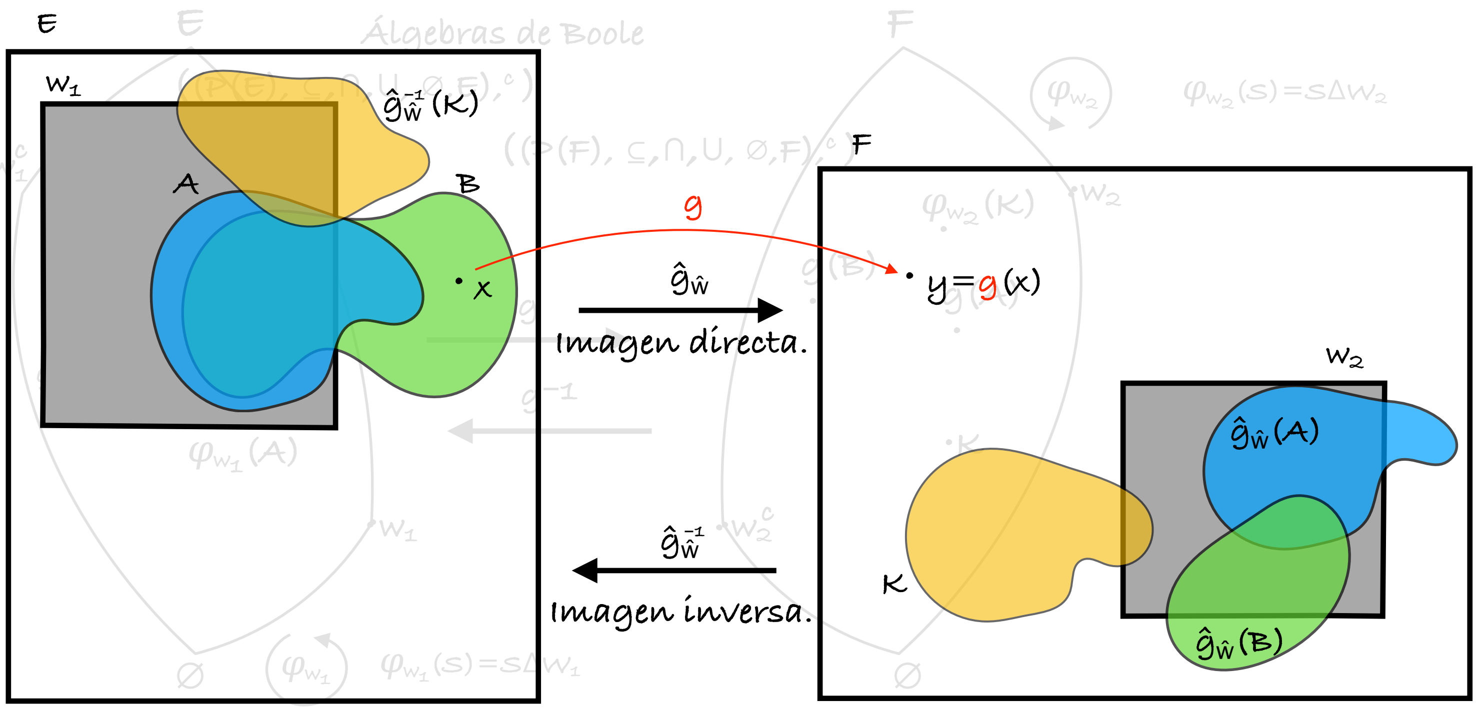
$$\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\bigsqcup_{j\in J}^{W_2}K_j)=\bigsqcup_{j\in J}^{W_1}\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K_j),\ \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\bigsqcap_{j\in J}^{W_2}K_j)=\bigsqcap_{j\in J}^{W_1}\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K_j)\quad\forall(K_j)_{j\in J}$$

$$(K\sqsubseteq^{W_2}S)\Rightarrow(\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K)\sqcap^{W_1}\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(S)),\ (\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K)\overset{W_1}{-}\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(S))=\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K\overset{W_2}{-}S),$$

$$\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K^c)=(\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K))^c,\ \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(W_2)=W_1,\ \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(F)=E\,.$$

$$A\sqsubseteq^{W_1}\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\hat{g}_{\hat{w}}(A))\ \forall A\in P(E)\qquad\hat{g}_{\hat{w}}(\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K))\sqsubseteq^{W_2}K\ \forall K\in P(K)$$

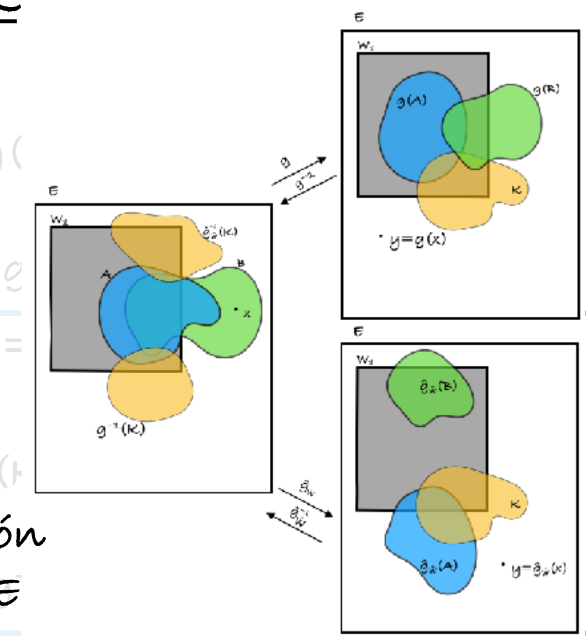




CASO PARTICULAR INTERESANTE:

$E=F$, $g:E\to E$ y

$W_1=W_2=W\in P(E)$



En este caso, si i es la extensión a $P(E)$ de la identidad $i_E:E\to E$ en E, se verifica:

$\hat{i}_W=(\varphi_W\circ i\circ\varphi_W)=i$ $\forall W\in P(E)$.

Propiedades de las w-extensiones

$\hat g_{\hat w}(\bigsqcup^{W_1}_{j\in J}A_j)=\bigsqcup^{W_2}_{j\in J}\hat g_{\hat w}(A_j)$, $\hat g_{\hat w}(\bigsqcap^{W_1}_{j\in J}A_j)\sqsubseteq^{W_2}(\bigsqcap^{W_2}_{j\in J}\hat g_{\hat w}(A_j))$ $\forall (A_j)_{j\in J}$,

$(A\sqsubseteq^{W_1}B)\Rightarrow(\hat g_{\hat w}(A)\sqsubseteq^{W_2}\hat g_{\hat w}(B))$, $(\hat g_{\hat w}(A)\overset{W_2}{-}\hat g_{\hat w}(B))\sqsubseteq^{W_1}\hat g_{\hat w}(A\overset{W_1}{-}B)$,

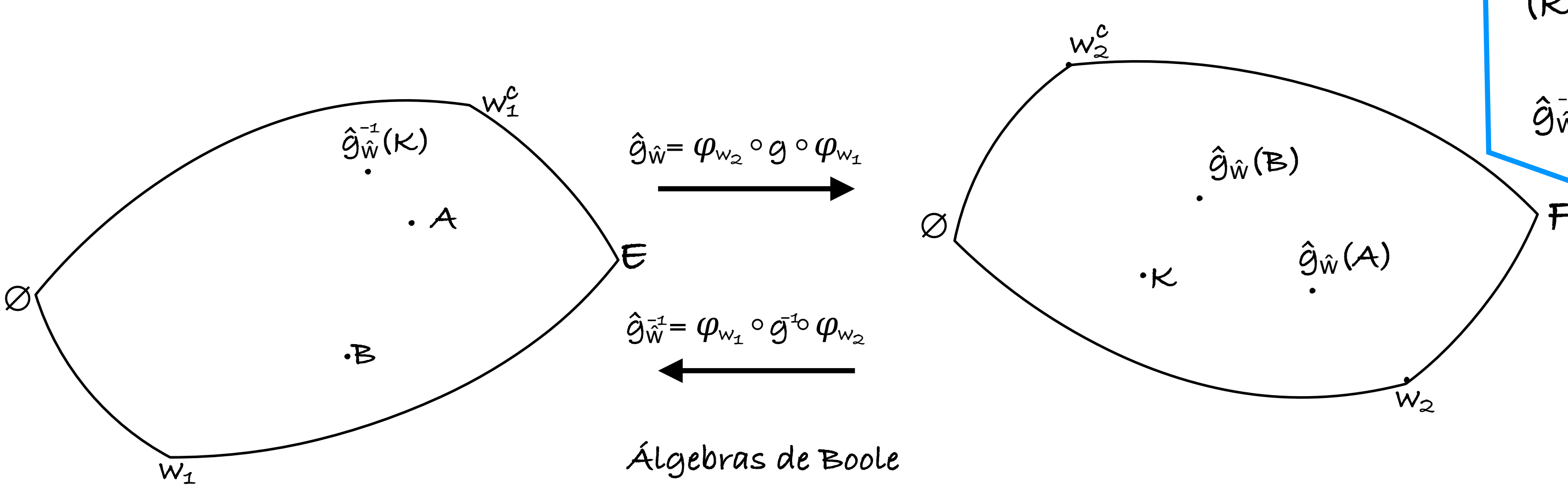
$\hat g_{\hat w}(W_1)=W_2$.

$\hat g^{-1}_{\hat w}(\bigsqcup^{W_2}_{j\in J}K_j)=\bigsqcup^{W_1}_{j\in J}\hat g^{-1}_{\hat w}(K_j)$, $\hat g^{-1}_{\hat w}(\bigsqcap^{W_2}_{j\in J}K_j)=\bigsqcap^{W_1}_{j\in J}\hat g^{-1}_{\hat w}(K_j)$ $\forall (K_j)_{j\in J}$

$(K\sqsubseteq^{W_2}S)\Rightarrow(\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\sqcap^{W_1}\hat g^{-1}_{\hat w}(S))$, $(\hat g^{-1}_{\hat w}(K)\overset{W_1}{-}\hat g^{-1}_{\hat w}(S))=\hat g^{-1}_{\hat w}(K\overset{W_2}{-}S)$,

$\hat g^{-1}_{\hat w}(K^c)=(\hat g^{-1}_{\hat w}(K))^c$, $\hat g^{-1}_{\hat w}(W_2)=W_1$, $\hat g^{-1}_{\hat w}(F)=E$.

$A\sqsubseteq^{W_1}\hat g^{-1}_{\hat w}(\hat g_{\hat w}(A))$ $\forall A\in P(E)$ $\quad$ $\hat g_{\hat w}(\hat g^{-1}_{\hat w}(K))\sqsubseteq^{W_2}K$ $\forall K\in P(K)$

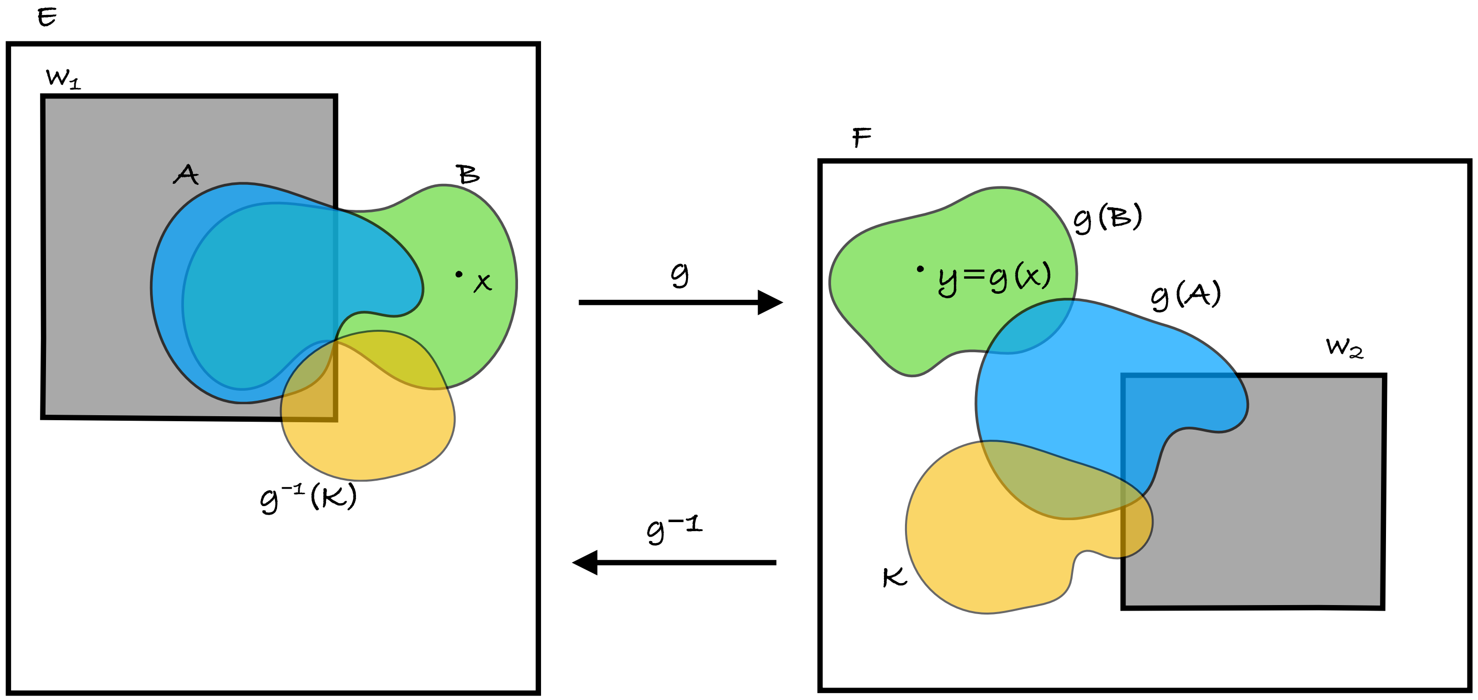


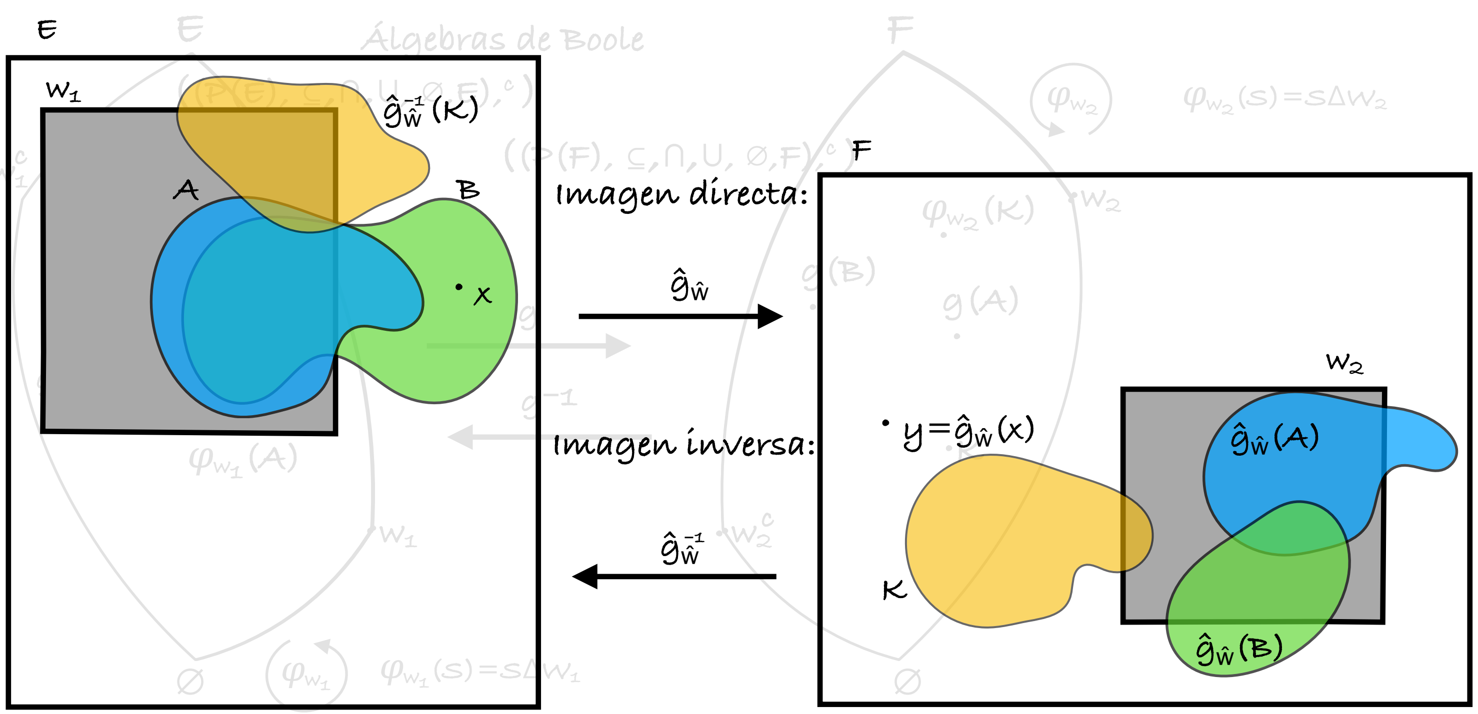
Álgebras de Boole

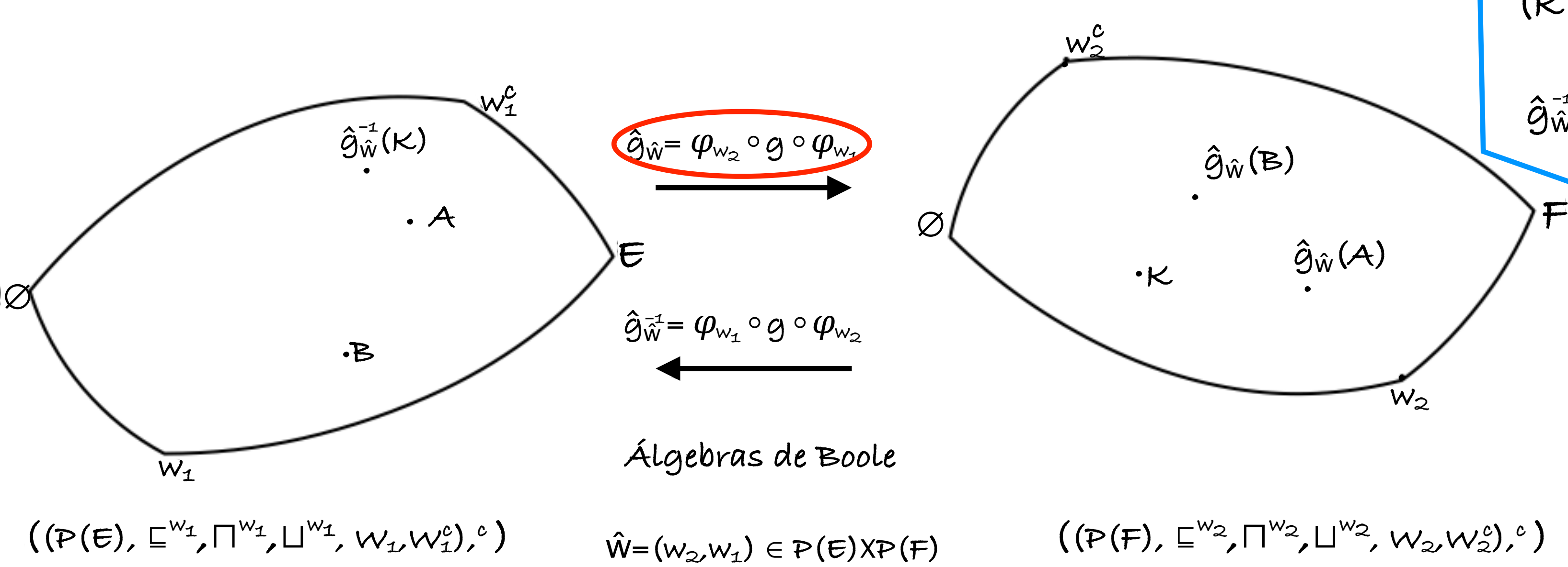
$((P(E),\sqsubseteq^{W_1},\sqcap^{W_1},\sqcup^{W_1},W_1,W_1^c),{}^c)$ $\quad$ $\hat W=(W_2,W_1)\in P(E)\times P(F)$ $\quad$ $((P(F),\sqsubseteq^{W_2},\sqcap^{W_2},\sqcup^{W_2},W_2,W_2^c),{}^c)$

Generalización

(a funciones de conjunto cualesquiera,
no necesariamente ligadas a la extensión
de funciones puntuales a las partes)







Propiedades de las extensiones

$g(\bigcup_{j\in J}A_j)=\bigcup_{j\in J}g(A_j),\ g(\bigcap_{j\in J}A_j)\subseteq\bigcap_{j\in J}g(A_j)\quad\forall(A_j)_{j\in J}$, familia de $P(E)$,

$(A\subseteq B)\Rightarrow(g(A)\subseteq g(B)),\quad(g(A)-g(B))\subseteq g(A-B),\quad g(\varnothing)=\varnothing.$

$g^{-1}(\bigcup_{j\in J}K_j)=\bigcup_{j\in J}g^{-1}(K_j),\ g^{-1}(\bigcap_{j\in J}K_j)=\bigcap_{j\in J}g^{-1}(K_j)\quad\forall(K_j)_{j\in J}$

$(K\subseteq S)\Rightarrow(g^{-1}(K)\subseteq g^{-1}(S)),\ (g^{-1}(K)-g^{-1}(S))=g^{-1}(K-S),$

$g^{-1}(K^c)=(g^{-1}(K))^c,\ g^{-1}(\varnothing)=\varnothing,\ g^{-1}(F)=E.$

$A\subseteq g^{-1}(g(A))\ \forall A\in P(E)\qquad g(g^{-1}(K))\subseteq K\ \ \forall K\in P(K)$

Propiedades de las w-extensiones

$\hat{g}_{\hat{w}}(\bigsqcup_{j\in J}^{W_1}A_j)=\bigsqcup_{j\in J}^{W_2}\hat{g}_{\hat{w}}(A_j),\ \hat{g}_{\hat{w}}(\bigsqcap_{j\in J}^{W_1}A_j)\sqsubseteq^{W_2}(\bigsqcap_{j\in J}^{W_2}\hat{g}_{\hat{w}}(A_j))\quad\forall(A_j)_{j\in J},$

$(A\sqsubseteq^{W_1}B)\Rightarrow(\hat{g}_{\hat{w}}(A)\sqsubseteq^{W_2}\hat{g}_{\hat{w}}(B)),\quad(\hat{g}_{\hat{w}}(A)\overset{W_2}{-}\hat{g}_{\hat{w}}(B))\sqsubseteq^{W_1}\hat{g}_{\hat{w}}(A\overset{W_1}{-}B),$

$\hat{g}_{\hat{w}}(W_1)=W_2.$

$\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\bigsqcup_{j\in J}^{W_2}K_j)=\bigsqcup_{j\in J}^{W_1}\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K_j),\ \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\bigsqcap_{j\in J}^{W_2}K_j)=\bigsqcap_{j\in J}^{W_1}\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K_j)\quad\forall(K_j)_{j\in J}$

$(K\sqsubseteq^{W_2}S)\Rightarrow(\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K)\sqcap^{W_1}\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(S)),\ (\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K)\overset{W_1}{-}\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(S))=\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K\overset{W_2}{-}S),$

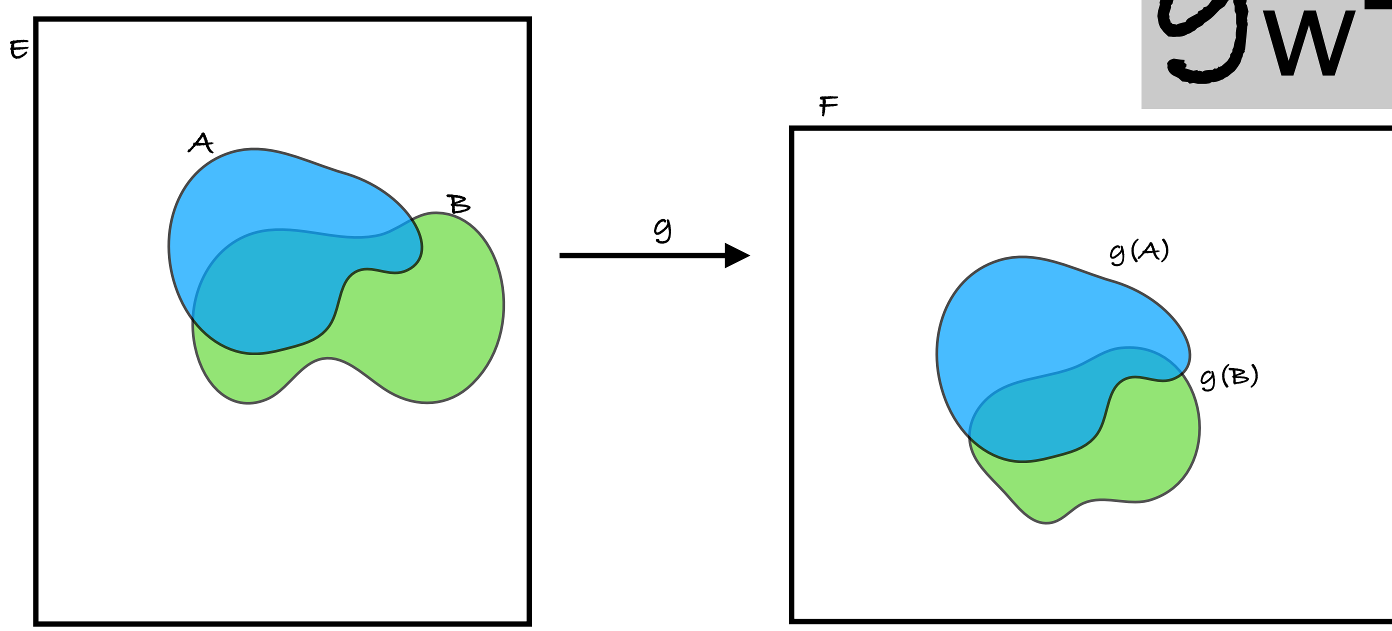
$\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K^c)=(\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K))^c,\ \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(W_2)=W_1,\ \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(F)=E.$

$A\sqsubseteq^{W_1}\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(\hat{g}_{\hat{w}}(A))\ \forall A\in P(E)\qquad\hat{g}_{\hat{w}}(\hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K))\sqsubseteq^{W_2}K\ \ \forall K\in P(K)$

$$g : (\mathcal{P}(E), \subseteq) \to (\mathcal{P}(F), \subseteq)$$

(g cualquier función de conjunto)

$$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1}$$

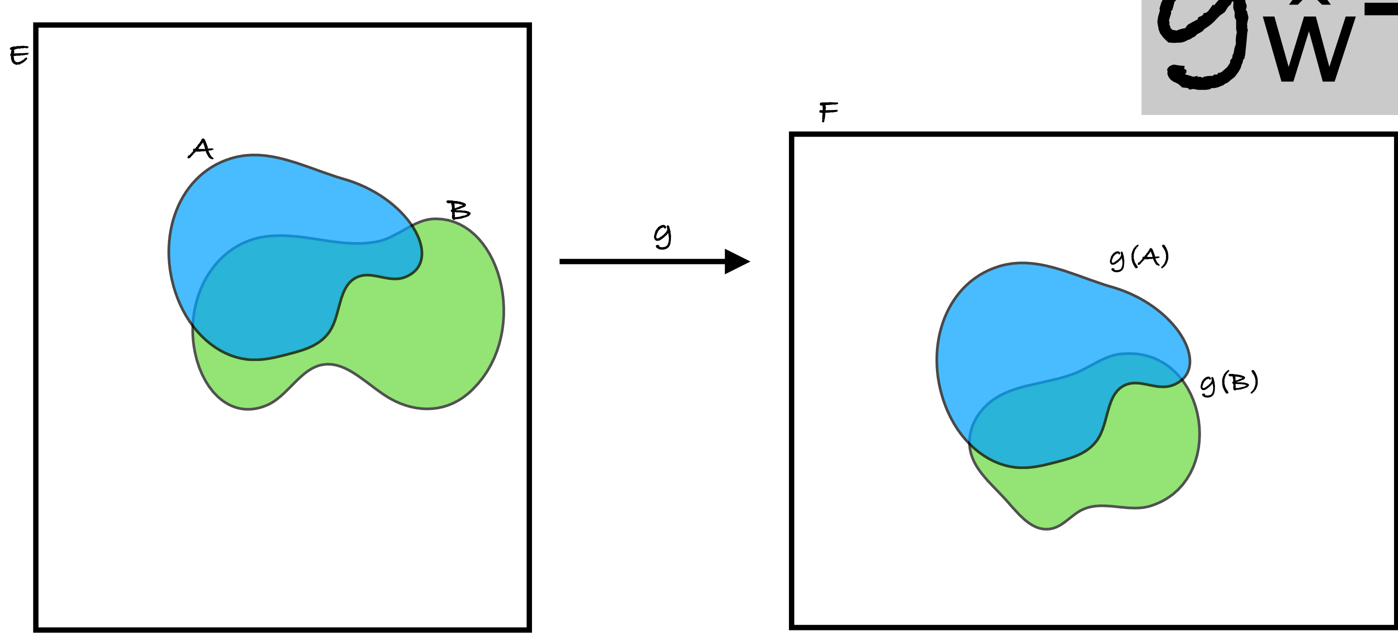


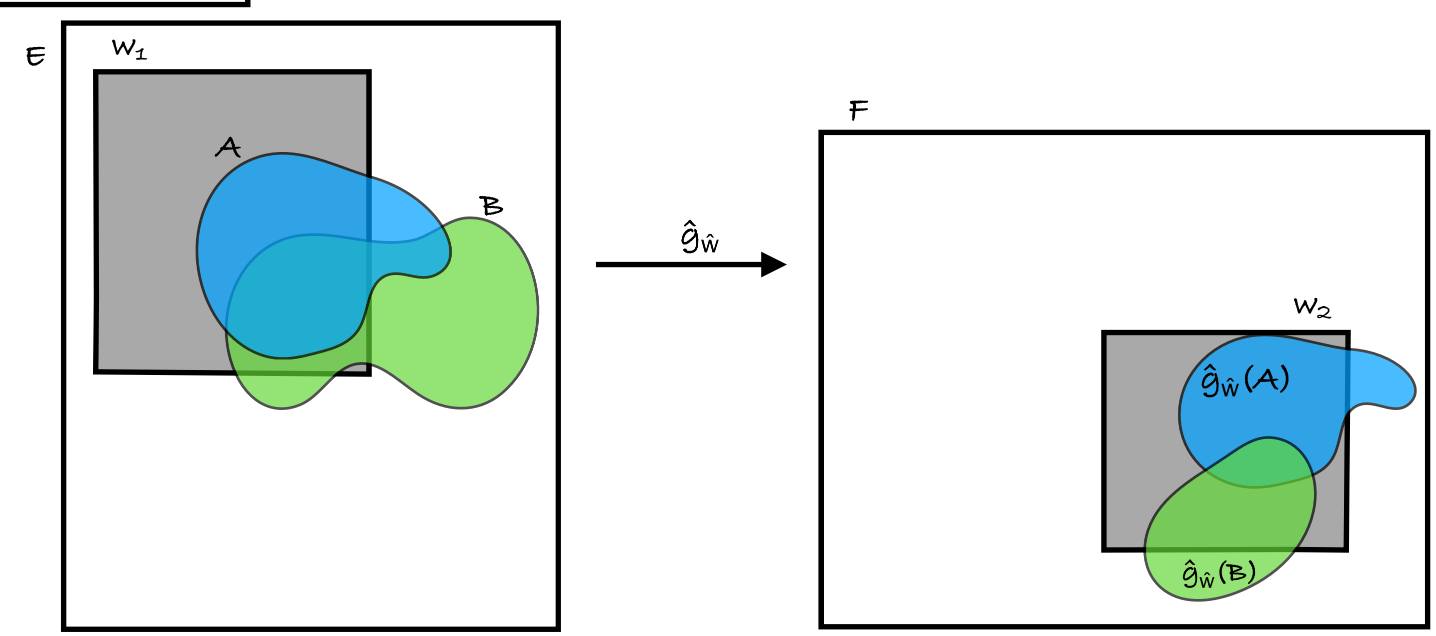
$$g:(\mathcal{P}(E),\subseteq)\longrightarrow(\mathcal{P}(F),\subseteq)$$

(g cualquier función de conjunto)

$$\hat{g}_{\hat{w}}:(\mathcal{P}(E),\sqsubseteq^{W_1})\longrightarrow(\mathcal{P}(F),\sqsubseteq^{W_2})$$

$$\boxed{\hat{g}_{\hat{w}}=\varphi_{W_2}\circ g\circ\varphi_{W_1}}$$





$$g : (\mathcal{P}(E), \subseteq) \longrightarrow (\mathcal{P}(F), \subseteq)$$

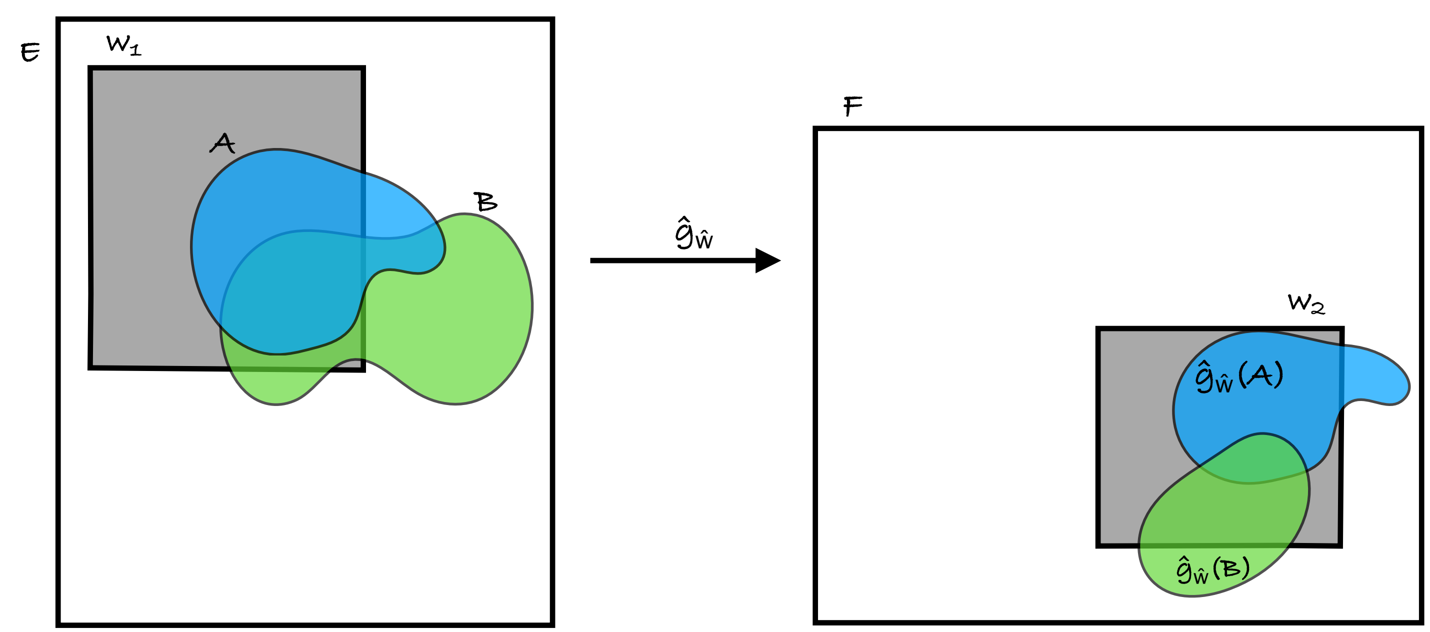
(g cualquier función de conjunto)

$$\downarrow$$

$$\hat{g}_{\hat{w}} : (\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^{w_1}) \longrightarrow (\mathcal{P}(F), \sqsubseteq^{w_2})$$

$$\boxed{\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1}}$$

$$\hat{g}_{\hat{w}}(A) = (g(A \Delta w_1)) \Delta w_2 \quad \forall A \in \mathcal{P}(E)$$



$$g:(\mathcal{P}(E),\subseteq)\longrightarrow(\mathcal{P}(F),\subseteq)$$

(g cualquier función de conjunto)

$$\downarrow$$

$$\hat{g}_{\hat{w}}:(\mathcal{P}(E),\sqsubseteq^{w_1})\longrightarrow(\mathcal{P}(F),\sqsubseteq^{w_2})$$

$$\boxed{\hat{g}_{\hat{w}}=\varphi_{w_2}\circ g\circ\varphi_{w_1}}$$

$$\hat{g}_{\hat{w}}(A)=(g(A\Delta w_1))\Delta w_2 \quad \forall A\in\mathcal{P}(E)$$

<u>Casos particulares:</u>

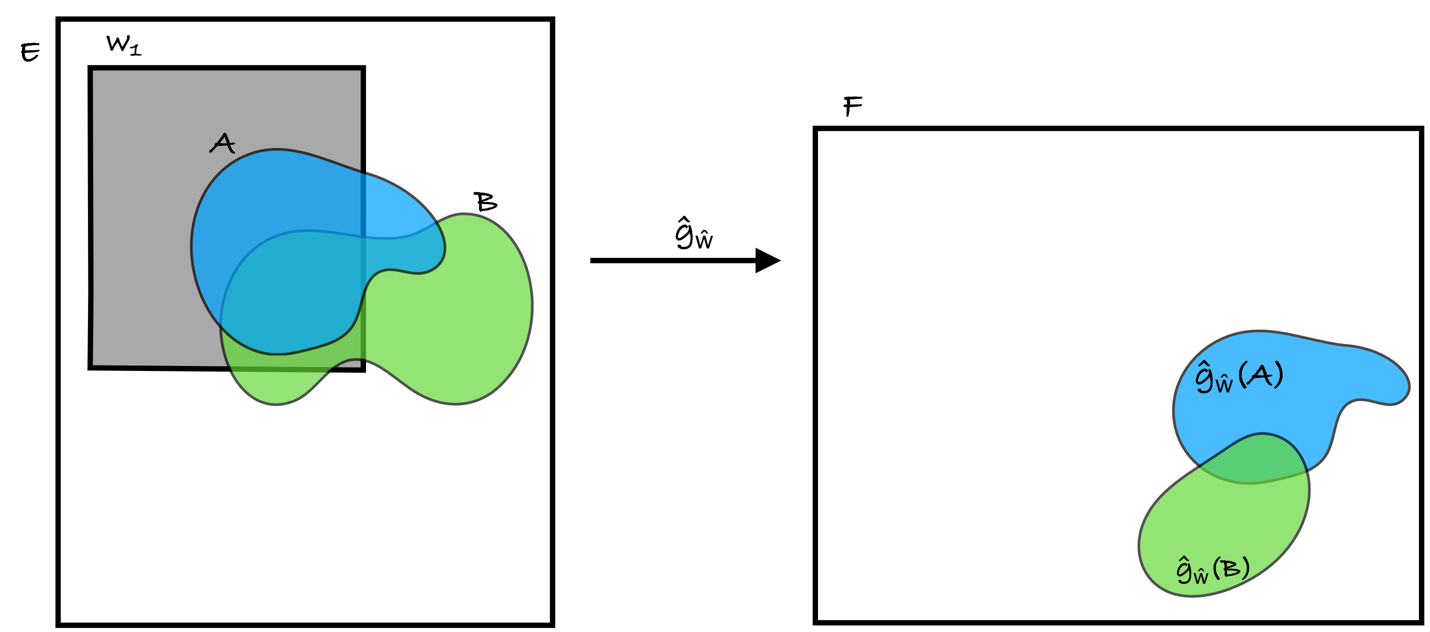
$w_2=\varnothing$

Puesto que $\varphi_{w_2}(K)=\varphi_{\varnothing}(K)=K \quad \forall K\in\mathcal{P}(F)$,

si i_F es la identidad en $\mathcal{P}(F)$, se verifica:

$\hat{g}_{\hat{w}}=\varphi_{w_2}\circ g\circ\varphi_{w_1}=i_F\circ g\circ\varphi_{w_1}=g\circ\varphi_{w_1}$, es decir

$\hat{g}_{\hat{w}}(A)=g(A\Delta w_1) \ \forall A\in\mathcal{P}(E)$



$$g:(\mathcal{P}(E),\subseteq)\longrightarrow(\mathcal{P}(F),\subseteq)$$

(g cualquier función de conjunto)

$$\downarrow$$

$$\hat{g}_{\hat{w}}:(\mathcal{P}(E),\sqsubseteq^{w_1})\longrightarrow(\mathcal{P}(F),\sqsubseteq^{w_2})$$

$$\boxed{\hat{g}_{\hat{w}}=\varphi_{w_2}\circ g\circ\varphi_{w_1}}$$

$$\hat{g}_{\hat{w}}(A)=(g(A\Delta w_1))\Delta w_2\quad\forall A\in\mathcal{P}(E)$$

<u>Casos particulares:</u>

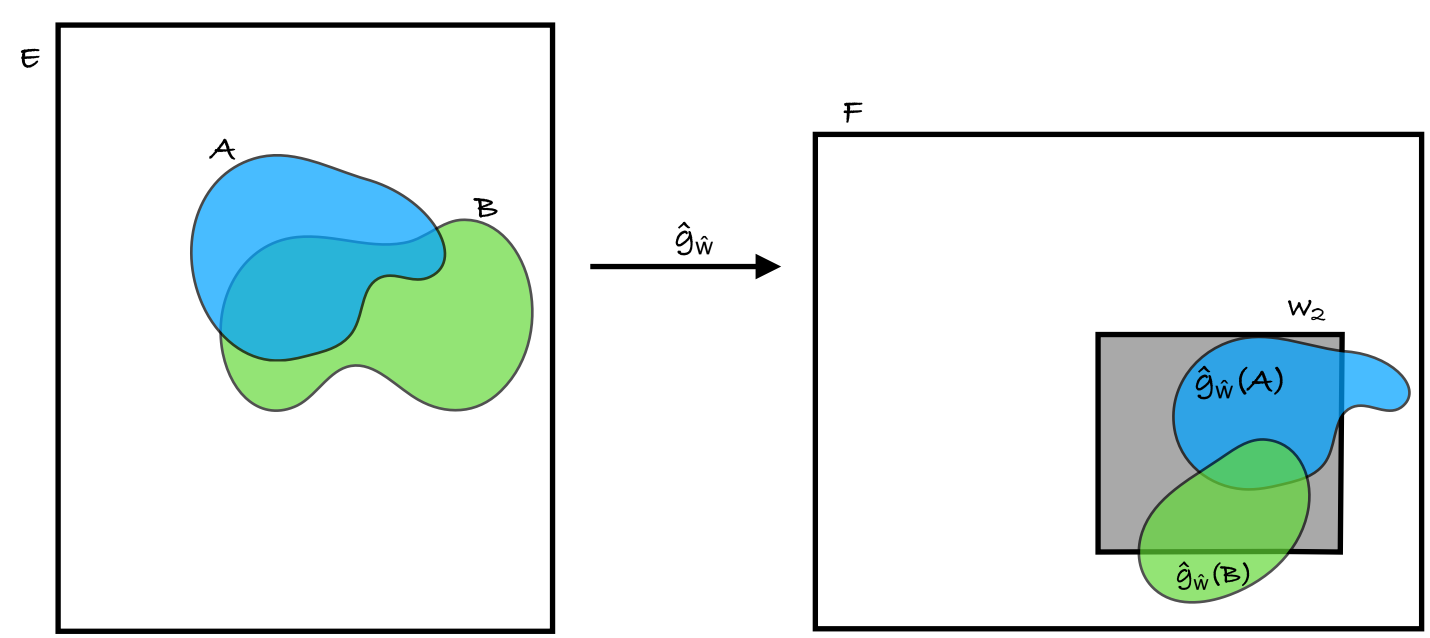
$w_2=\varnothing$

Puesto que $\varphi_{w_2}(K)=\varphi_{\varnothing}(K)=K\quad\forall K\in\mathcal{P}(F)$,

si i_F es la identidad en $\mathcal{P}(F)$, se verifica:

$\hat{g}_{\hat{w}}=\varphi_{w_2}\circ g\circ\varphi_{w_1}=i_F\circ g\circ\varphi_{w_1}=g\circ\varphi_{w_1}$, es decir

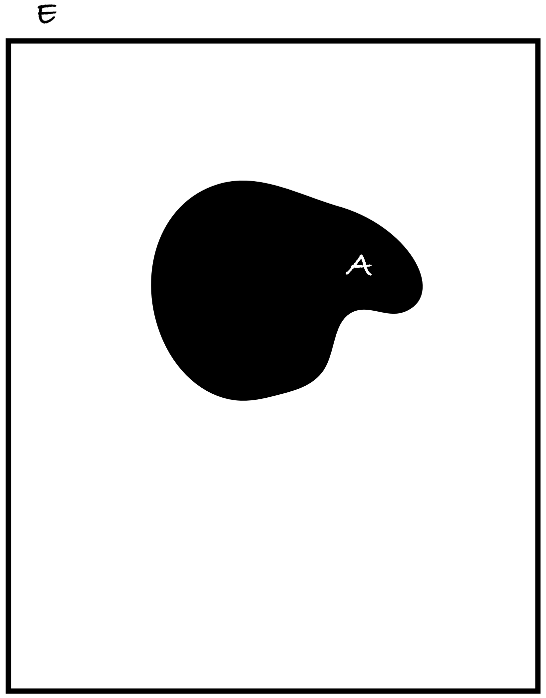
$\hat{g}_{\hat{w}}(A)=g(A\Delta w_1)\ \forall A\in\mathcal{P}(E)$

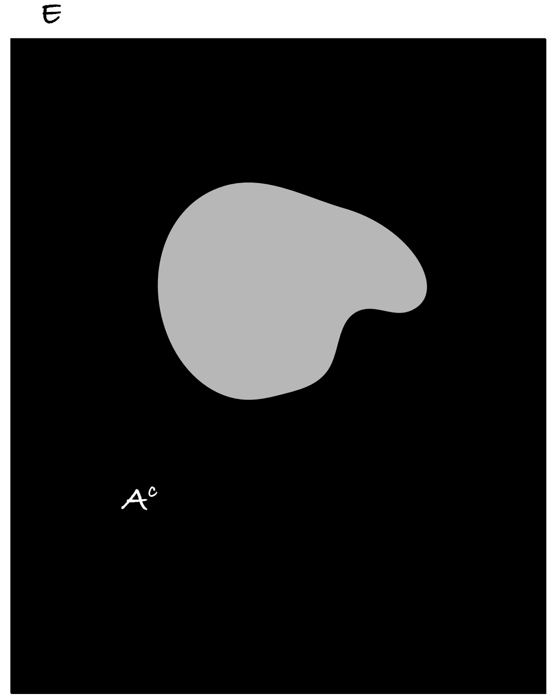


Análogamente, si $w_1=\varnothing$:

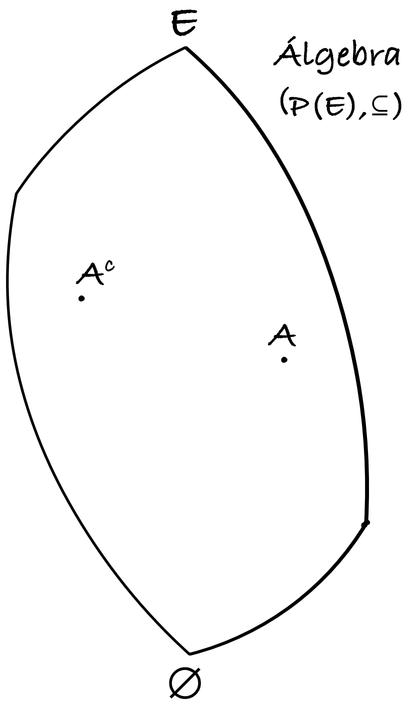
$\hat{g}_{\hat{w}}(A)=g(A)\Delta w_2\ \forall A\in\mathcal{P}(E)$

Ejemplo: extensión al álgebra $(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^{W})$ de la complementación en $(\mathcal{P}(E), \subseteq)$.





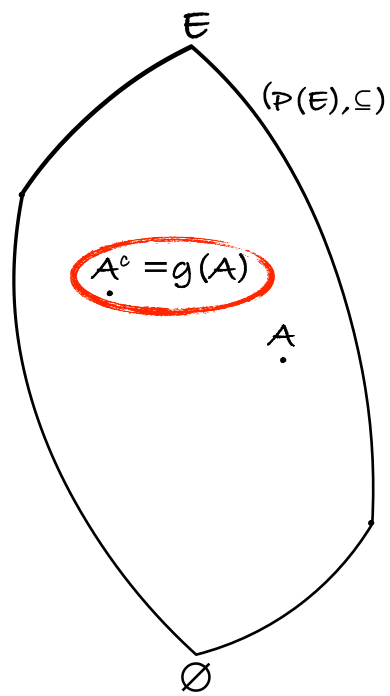
$= g(A)$

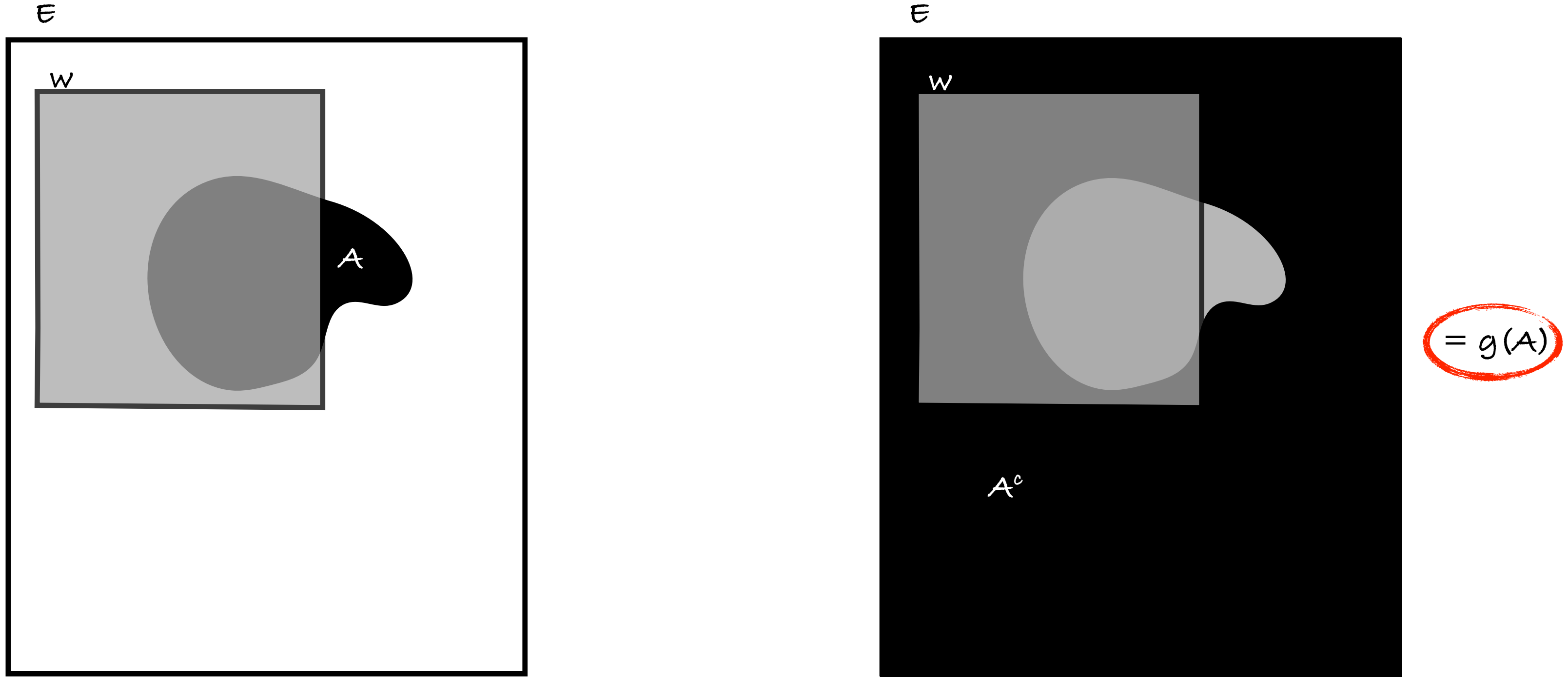


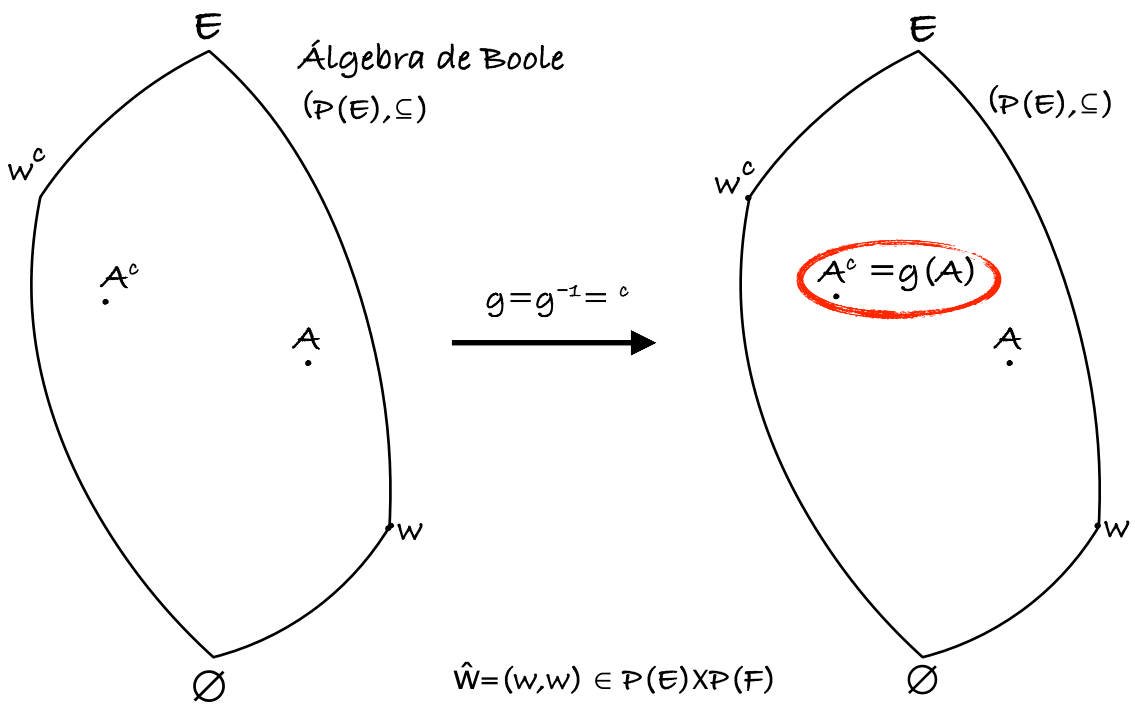
Álgebra de Boole

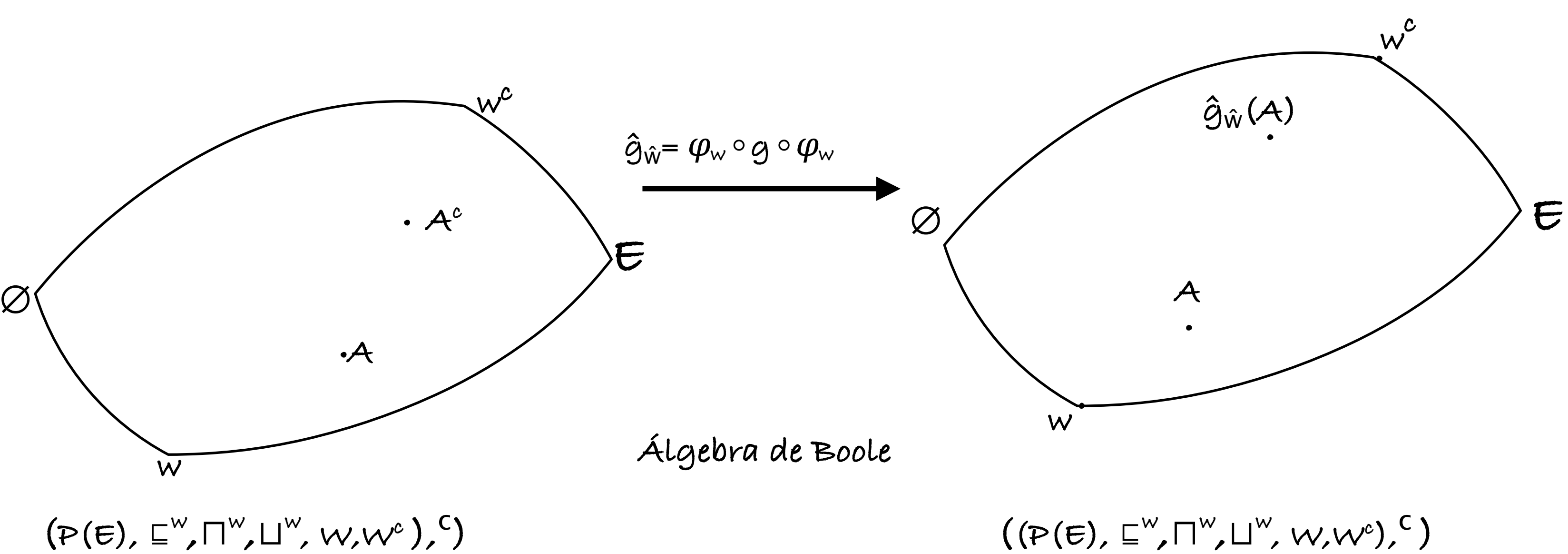
$(\mathcal{P}(E), \subseteq)$

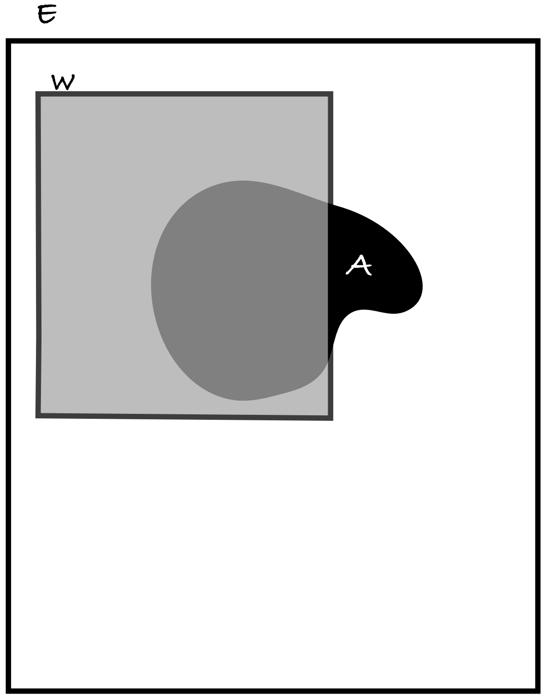
$\xrightarrow{g = g^{-1} = {}^c}$

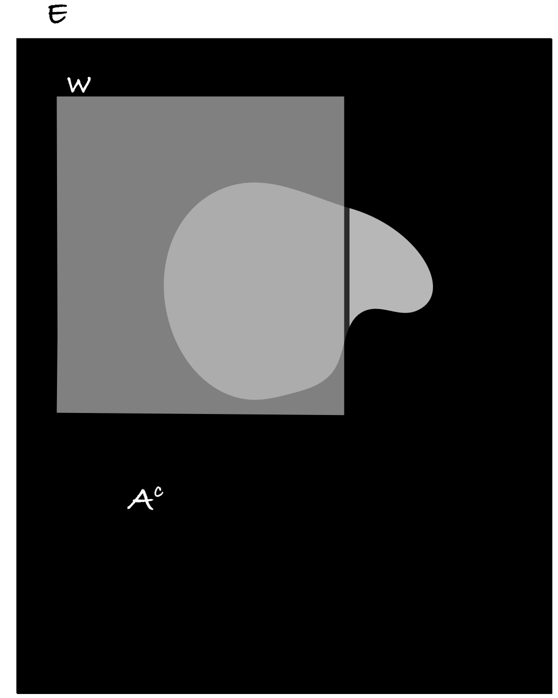



E
W
A
E
W
A^c
= g(A)


E
Álgebra de Boole
(P(E),⊆)
W^c
A^c
A
W
∅
$g=g^{-1}={}^c$
$\hat{W}=(W,W) \in P(E)XP(F)$
E
(P(E),⊆)
W^c
$A^c=g(A)$
A
W
∅


W^c
A^c
∅
E
A
W
$\hat{g}_{\hat{W}}=\varphi_W \circ g \circ \varphi_W$
Álgebra de Boole
$(P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), {}^c)$
W^c
$\hat{g}_{\hat{W}}(A)$
∅
E
A
W
$((P(E), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), {}^c)$

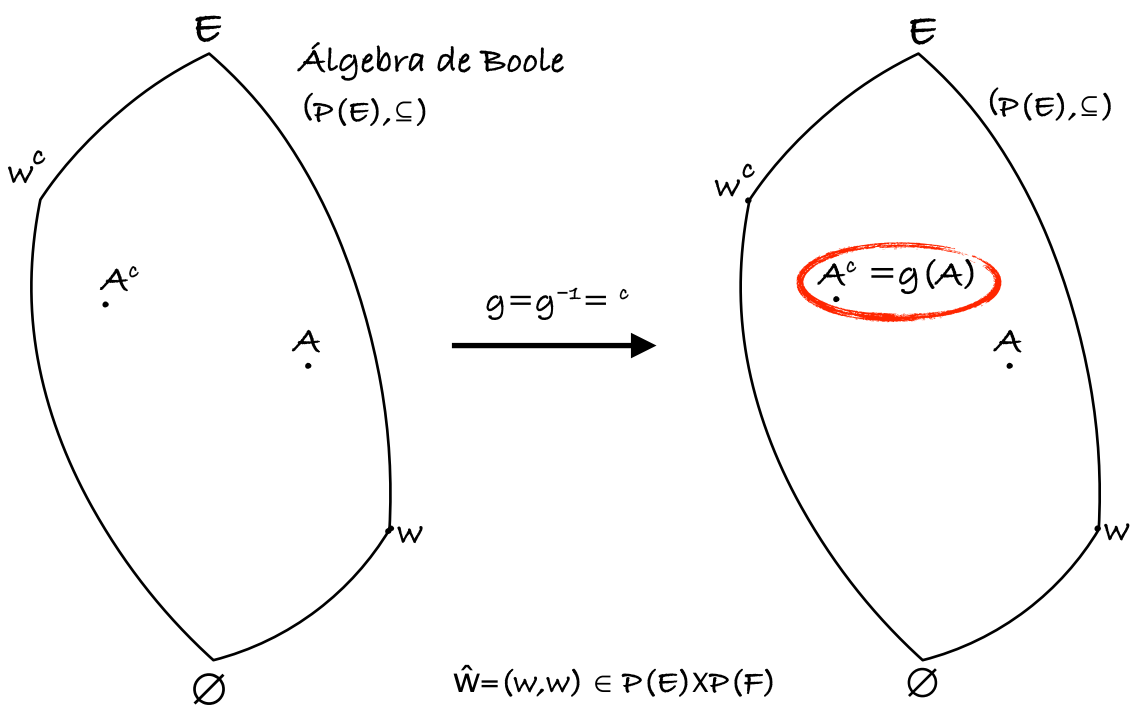


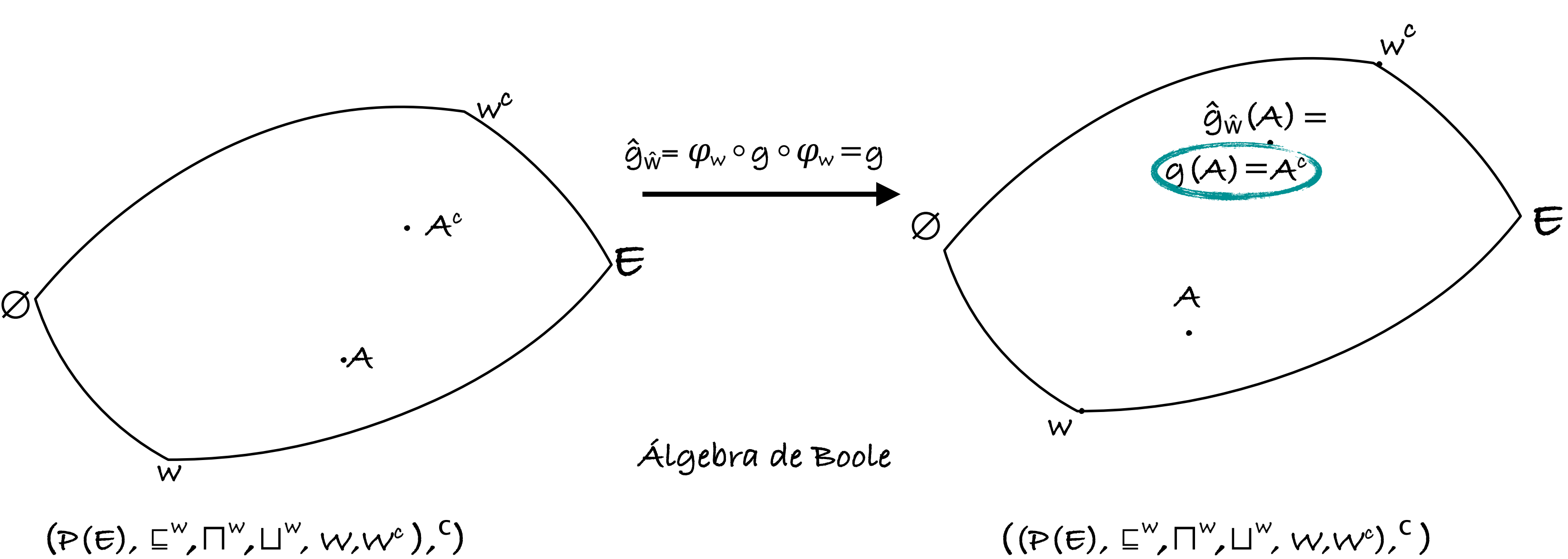


$= g(A) = \hat{g}_{\hat{W}}(A)$

<u>Proposición</u>

Si ${}^c: \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ es la complementación en $\mathcal{P}(E)$, se verifica $(A \triangle W)^c \triangle W = (A^c \triangle W) \triangle W = A^c$ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, es decir $\hat{c}_w = (\varphi_w \circ {}^c \circ \varphi_w) = {}^c$ $\forall W \in \mathcal{P}(E)$.





Ejemplo:

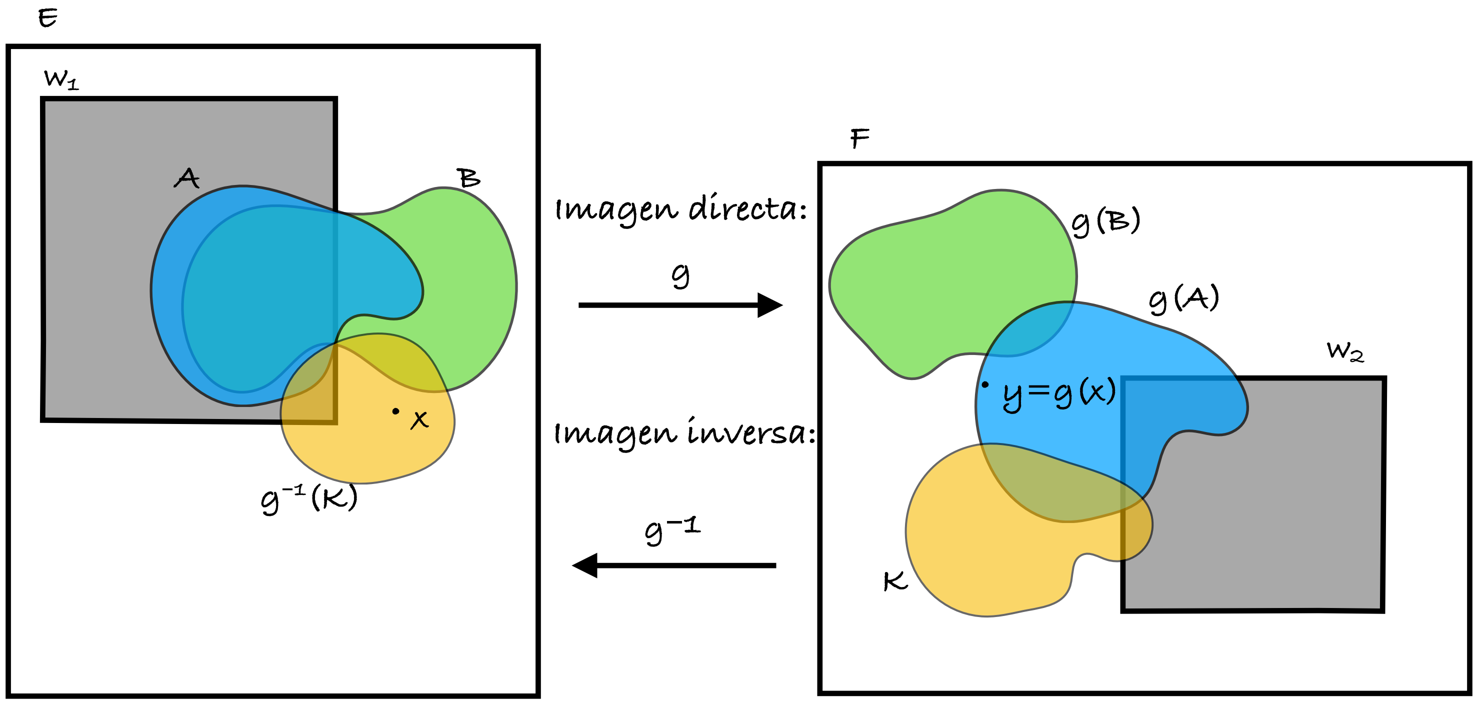
Expresión de la w-imágenes directa e inversa de una función mediante la w-pertenencia $\in^{w}$

$g: E \to F$,

$W_1 \in P(E)$, $W_2 \in P(F)$

$(y \in g(A)) \Leftrightarrow (\exists x \in A : g(x) = y)$

$(x \in g^{-1}(K)) \Leftrightarrow (g(x) \in K)$

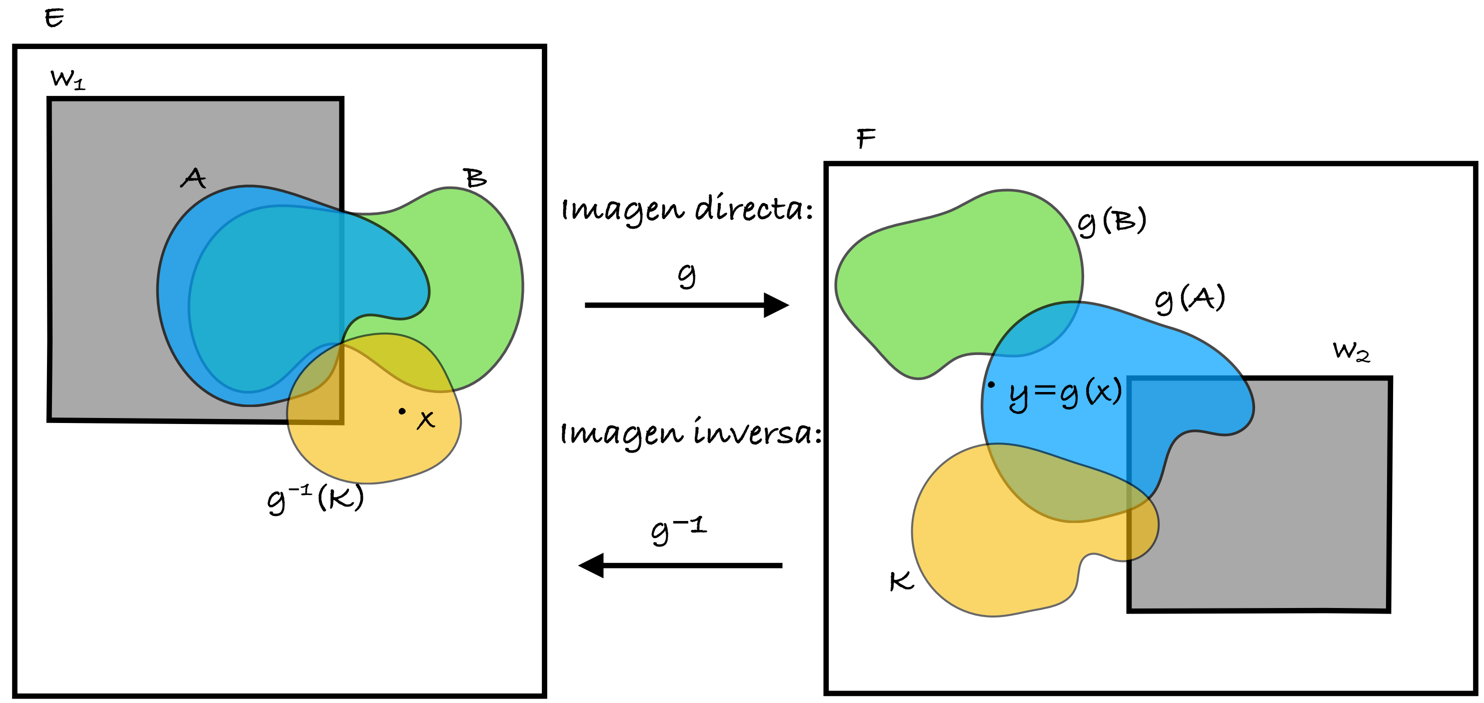


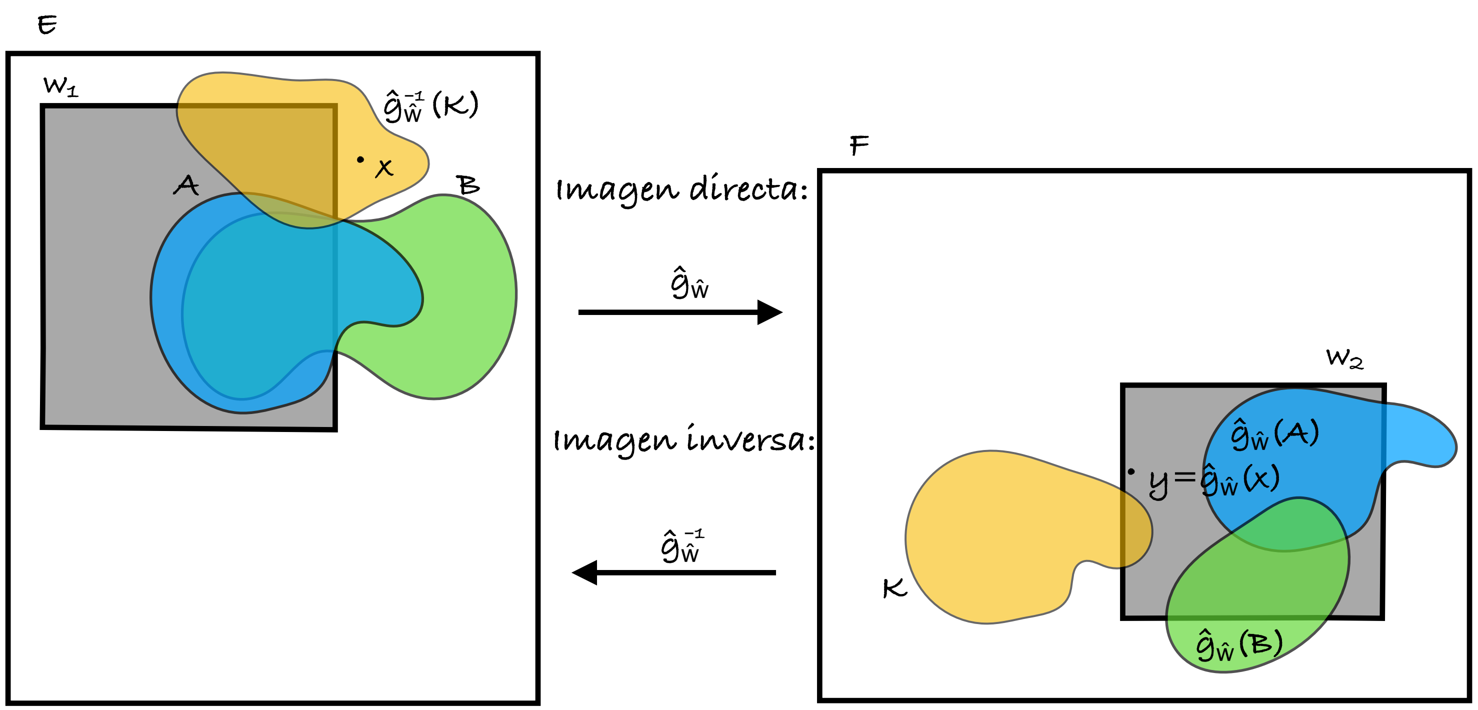
$g: E \to F$,

$W_1 \in \mathcal{P}(E),\ W_2 \in \mathcal{P}(F)$

$$(y \in g(A)) \Leftrightarrow (\exists x \in A : g(x) = y)$$

$$(x \in g^{-1}(K)) \Leftrightarrow (g(x) \in K)$$





$$(y \in^{W_2} \hat{g}_{\hat{w}}(A)) \Leftrightarrow (\exists x \in^{W_1} A : g(x) = y)$$

$$(x \in^{W_1} \hat{g}_{\hat{w}}^{-1}(K)) \Leftrightarrow (g(x) \in^{W_2} K)$$

$$\hat{W} = (W_2, W_1) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(F)$$

Caso general:

Función $\hat{g}_{\hat{w}}$ entre los retículos $(L_1, \sqsubseteq^{w_1})$ y $(L_2, \sqsubseteq^{w_2})$ obtenida de otra g entre los retículos $(L_1, \leq_1)$ y $(L_2, \leq_2)$.

Álgebras de Heyting completas con una negación fuerte, un nítido fijo y un operador diferencia:

$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$

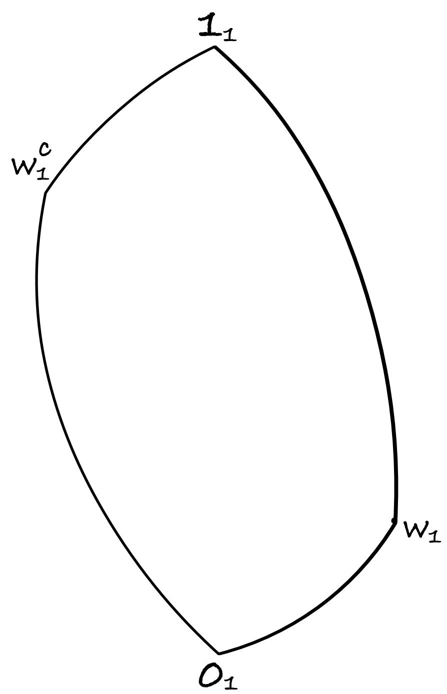
Para $i \in \{1,2\}$

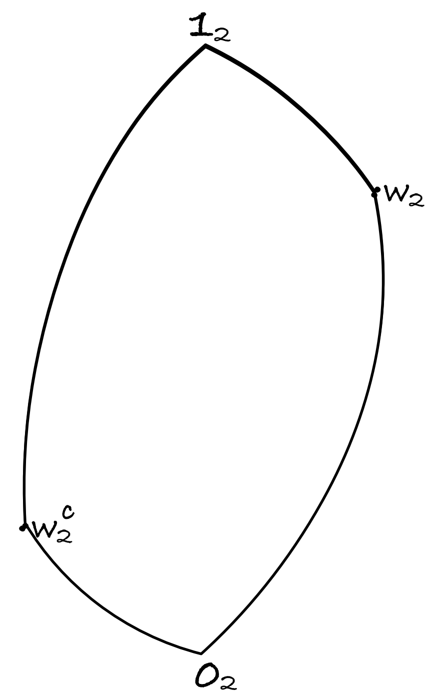
$w_i \in L_i$ t.q. $(w_i)'^i = (w_i)^c$

$z_i \,\Delta_i\, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall\, z_i \in L_i$

$(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$

Si $M \subseteq L_i$, $\sum_i M$ y $\prod_i M$ representan supremos e ínfimos de M en L_i





Álgebras de Heyting completas con una negación fuerte, un nítido fijo y un operador diferencia:

$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$

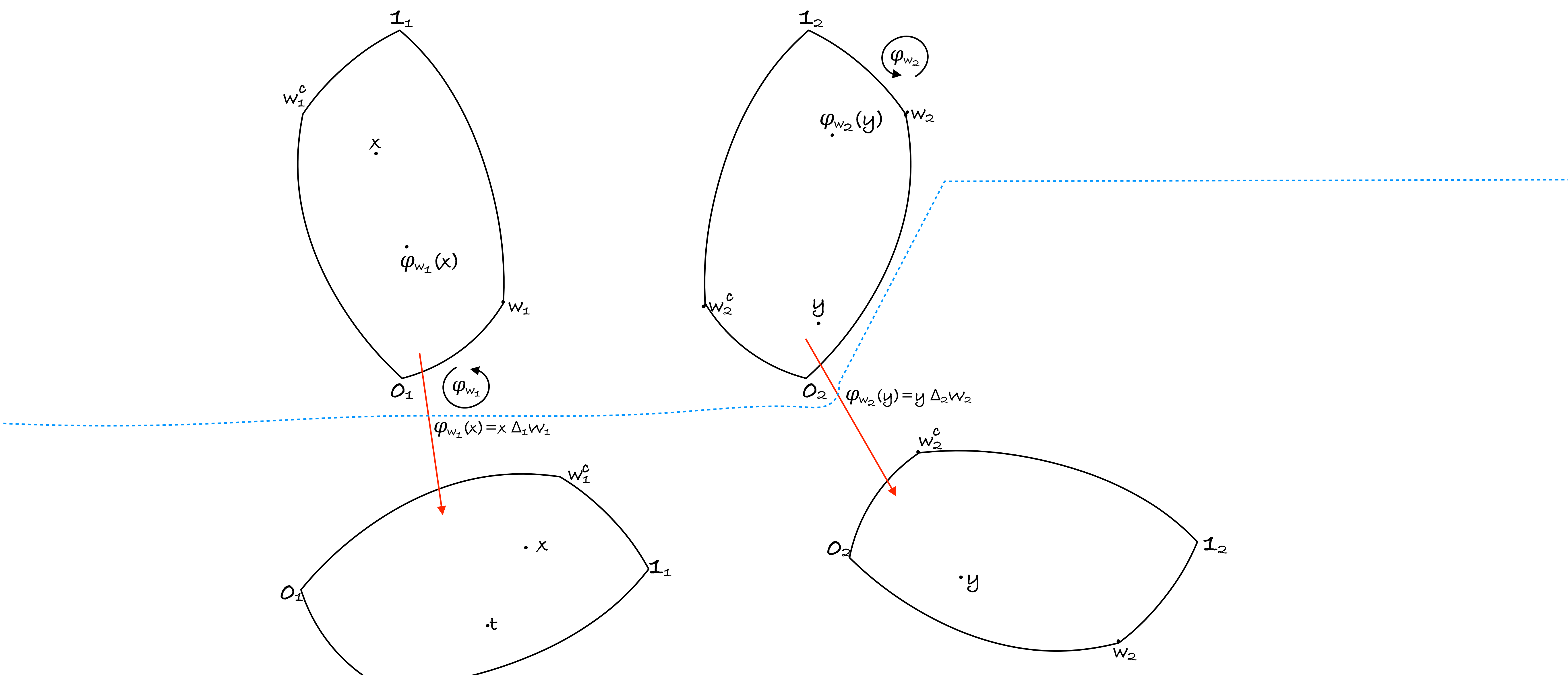
Para $i \in \{1,2\}$

$w_i \in L_i$ t.q. $(w_i)'^{i} = (w_i)^c$

$z_i \, \Delta_i \, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall z_i \in L_i$

$(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$

Si $M \subseteq L_i$, $\sum_i M$ y $\prod_i M$ representan supremos e ínfimos de M en L_i



Nuevas álgebras de Heyting completas, posiblemente con las mismas negaciones $'_1$ y $'_2$

$((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1)$

$((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$

Álgebras de Heyting completas con una negación fuerte, un nítido fijo y un operador diferencia:

$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$

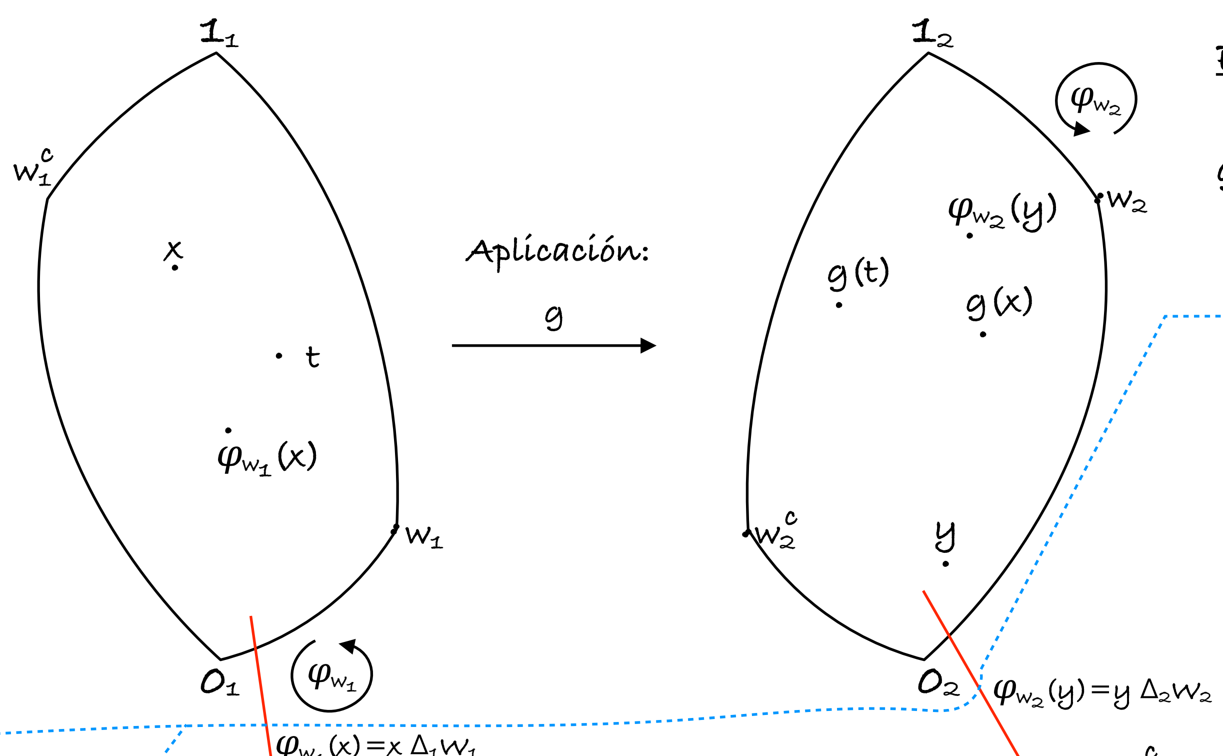
Para $i \in \{1,2\}$

$w_i \in L_i$ t.q. $(w_i)'^{i} = (w_i)^c$

$z_i \, \Delta_i \, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall z_i \in L_i$

$(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$

Si $M \subseteq L_i$, $\sum_i M$ y $\prod_i M$ representan supremos e ínfimos de M en L_i



<u>Posibles propiedades de la función</u> g:

$g(\sum_{1\, j\in J} x_j) = \sum_{2\, j\in J} g(x_j)$, $g(\prod_{1\, j\in J} x_j) = \prod_{2\, j\in J} g(x_j) \quad \forall (x_j)_{j\in J}$

$(x \leq_1 y) \Rightarrow (g(x) \leq_2 g(y))$, $g(0_1) = 0_2$, $g(1_1) = 1_2$, ...

$\hat{w} = (w_1, w_2) \in L_1 X L_2$

Relación R_g asociada a la función g:

$x R_g y \Leftrightarrow y = g(x)$

Luego su extensión es:

$x (R_g)_w y \Leftrightarrow \varphi_{w_1}(x) R_g \varphi_{w_2}(y)$,

es decir,

$\varphi_{w_2}(y) = g(\varphi_{w_1}(x))$

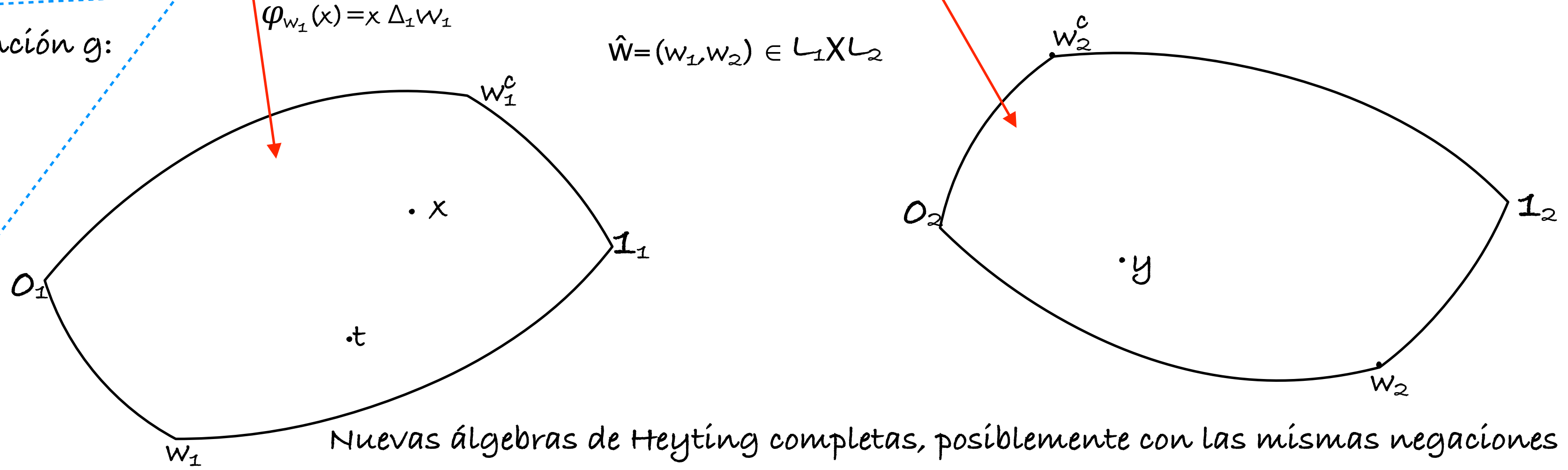
y en consecuencia

$y = \varphi_{w_2}(\varphi_{w_2}(y)) =$

$\varphi_{w_2}(g(\varphi_{w_1}(x)))$,

por lo que la propuesta de extensión $\hat{g}_{\hat{w}}$ es

$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1}$



Nuevas álgebras de Heyting completas, posiblemente con las mismas negaciones $'_1$ y $'_2$

$((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1)$

$((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$

Álgebras de Heyting completas con una negación fuerte, un nítido fijo y un operador diferencia:

$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$

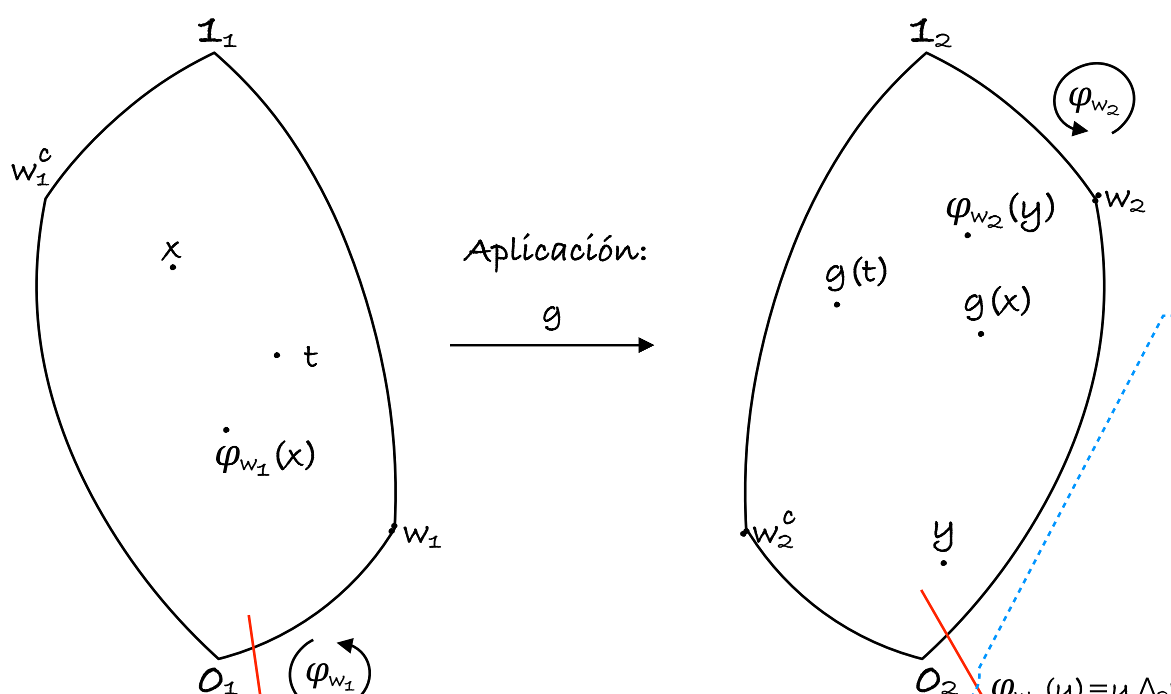
Para $i \in \{1,2\}$

$w_i \in L_i$ t.q. $(w_i)'^{i} = (w_i)^c$

$z_i \,\Delta_i\, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall\, z_i \in L_i$

$(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$

Si $M \subseteq L_i$, $\sum_i M$ y $\prod_i M$ representan supremos e ínfimos de M en L_i



<u>Posibles propiedades de la función</u> g:

$g(\sum_{1\, j\in J} x_j) = \sum_2 g(x_j)$, $g(\prod_{1\, j\in J} x_j) = \prod_{2\, j\in J} g(x_j) \quad \forall (x_j)_{j\in J}$

$(x \leq_1 y) \Rightarrow (g(x) \leq_2 g(y))$, $g(0_1) = 0_2$, $g(1_1) = 1_2$, ...

$\varphi_{w_2}(y) = y \,\Delta_2\, w_2$

$\varphi_{w_1}(x) = x \,\Delta_1\, w_1$

Relación R_g asociada a la función g:

$xR_g y \Leftrightarrow y = g(x)$

Luego su extensión es:

$x(R_g)_w y \Leftrightarrow \varphi_{w_1}(x) R_g \varphi_{w_2}(y)$,

es decir,

$\varphi_{w_2}(y) = g(\varphi_{w_1}(x))$

y en consecuencia

$y = \varphi_{w_2}(\varphi_{w_2}(y)) =$

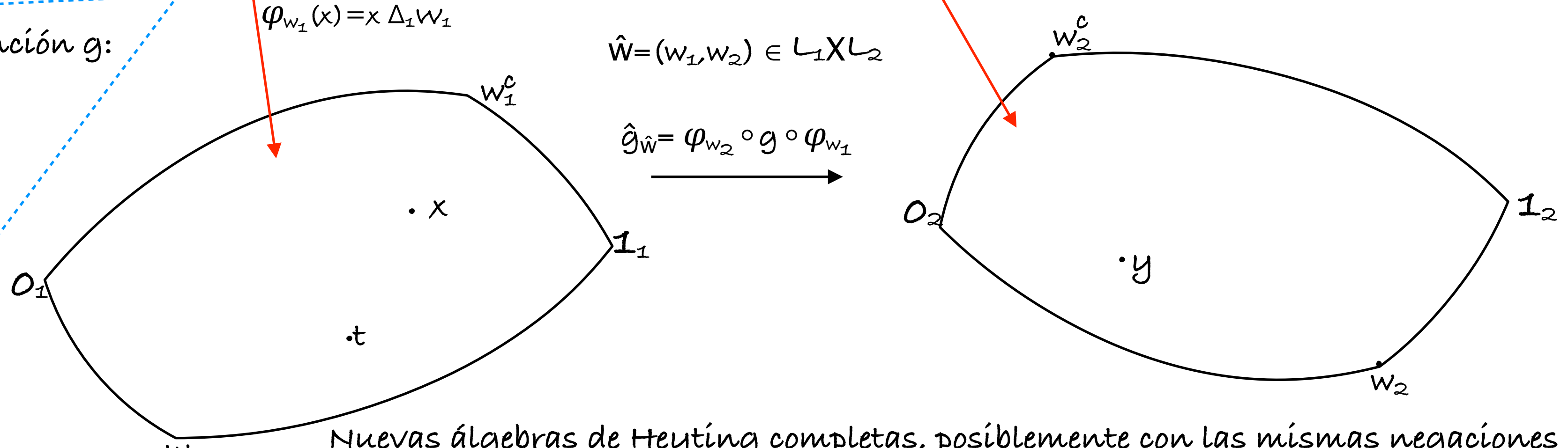
$\varphi_{w_2}(g(\varphi_{w_1}(x)))$,

por lo que la propuesta de extensión $\hat{g}_{\hat{w}}$ es

$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1}$

$\hat{w} = (w_1, w_2) \in L_1 X L_2$

$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1}$



Nuevas álgebras de Heyting completas, posiblemente con las mismas negaciones $'_1$ y $'_2$

$((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1)$

$((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$

Álgebras de Heyting completas con una negación fuerte, un nítido fijo y un operador diferencia:

$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$

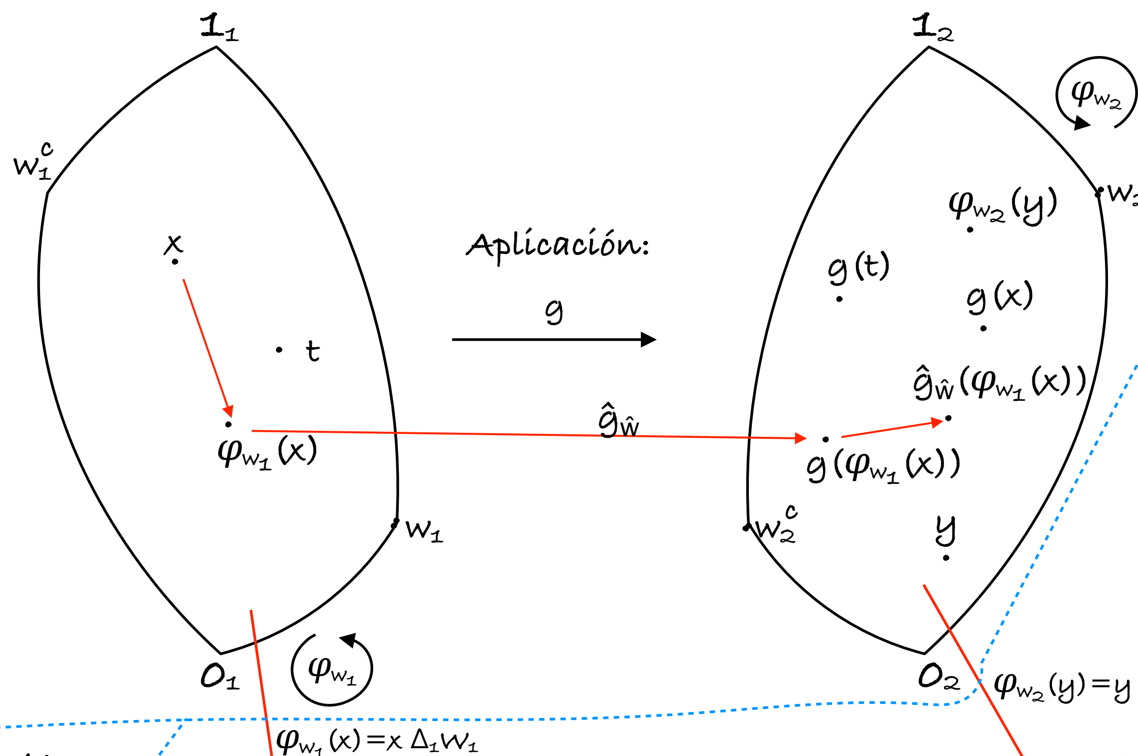
Para $i \in \{1,2\}$

$w_i \in L_i$ t.q. $(w_i)'^{i} = (w_i)^c$

$z_i \, \Delta_i \, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall z_i \in L_i$

$(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$

Si $M \subseteq L_i$, $\sum_i M$ y $\prod_i M$ representan supremos e ínfimos de M en L_i



<u>Posibles propiedades de la función</u> g:

$g(\sum_{1\, j\in J} x_j) = \sum_{2\, j\in J} g(x_j)$, $g(\prod_{1\, j\in J} x_j) = \prod_{2\, j\in J} g(x_j) \quad \forall (x_j)_{j\in J}$

$(x \leq_1 y) \Rightarrow (g(x) \leq_2 g(y))$, $g(0_1) = 0_2$, $g(1_1) = 1_2, \ldots$

<u>Propiedades análogas de las w-extensiones $\hat{g}_{\hat{w}}$ de</u> g:

$\hat{g}_{\hat{w}}(\bigsqcup^{w_1}_{j\in J} x_j) = \bigsqcup^{w_2}_{j\in J} \hat{g}_{\hat{w}}(x_j)$, $\hat{g}_{\hat{w}}(\bigsqcap^{w_1}_{j\in J} x_j) = (\bigsqcap^{w_2}_{j\in J} \hat{g}_{\hat{w}}(A_j)) \forall (x_j)_{j\in J}$,

$(x \sqsubseteq^{w_1} y) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}}(x) \sqsubseteq^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(y))$, $\hat{g}_{\hat{w}}(W_1) = W_2$, $\hat{g}_{\hat{w}}(W_1^c) = W_2^c, \ldots$

Relación R_g asociada a la función g:

$xR_g y \Leftrightarrow y = g(x)$

Luego su extensión es:

$x(R_g)_w y \Leftrightarrow \varphi_{w_1}(x) R_g \varphi_{w_2}(y)$,

es decir,

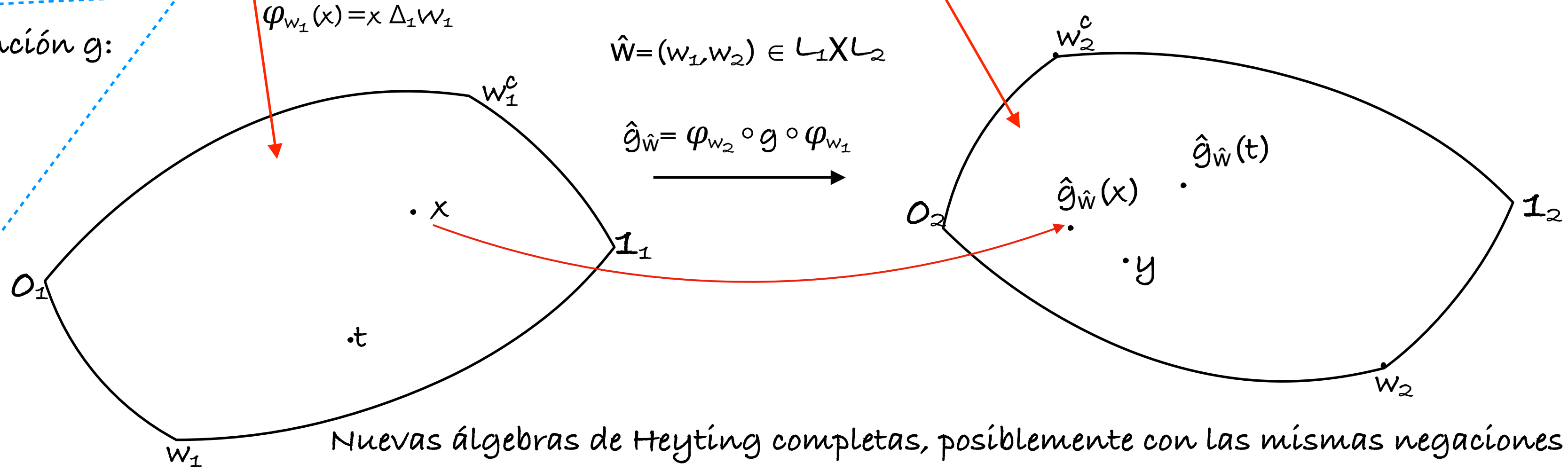
$\varphi_{w_2}(y) = g(\varphi_{w_1}(x))$

y en consecuencia

$y = \varphi_{w_2}(\varphi_{w_2}(y)) = \varphi_{w_2}(g(\varphi_{w_1}(x)))$,

por lo que la propuesta de extensión $\hat{g}_{\hat{w}}$ es

$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1}$



Nuevas álgebras de Heyting completas, posiblemente con las mismas negaciones $'_1$ y $'_2$

$((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1)$

$((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$

Álgebras de Heyting completas con una negación fuerte, un nítido fijo y un operador diferencia:

$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$

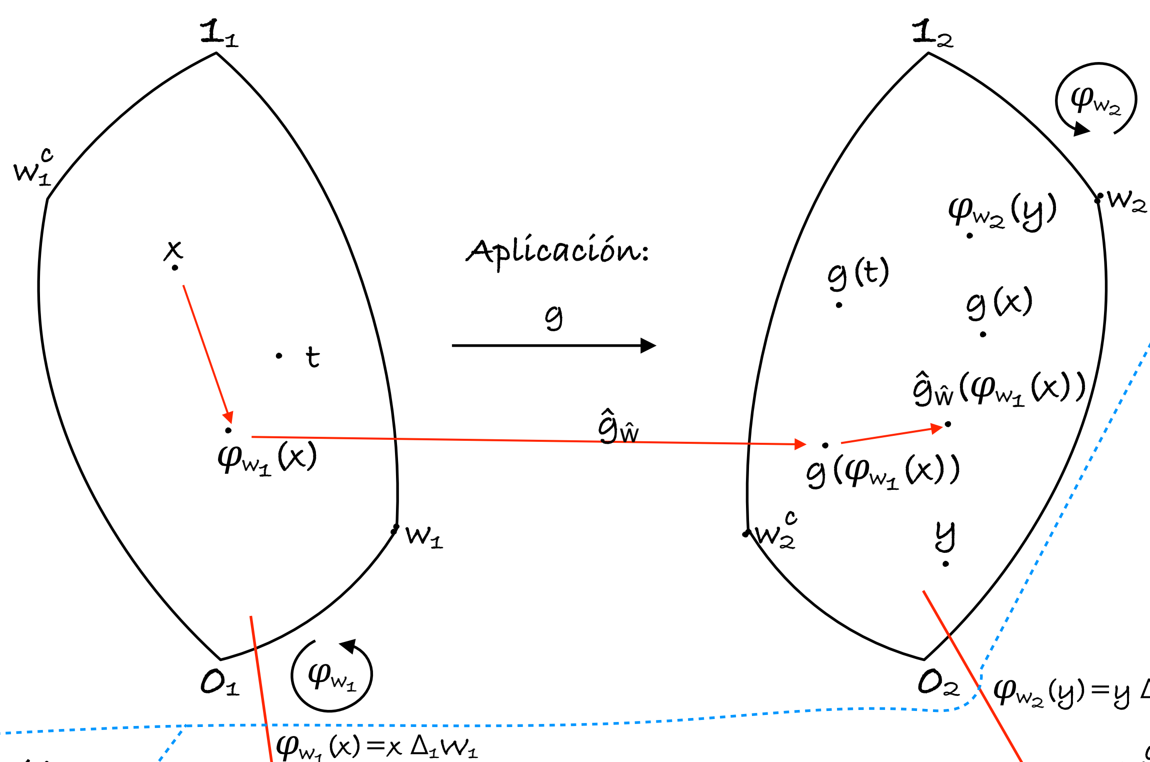
Para $i \in \{1,2\}$

$w_i \in L_i$ t.q. $(w_i)'^{i} = (w_i)^c$

$z_i \, \Delta_i \, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall z_i \in L_i$

$(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$

Si $M \subseteq L_i$, $\Sigma_i M$ y $\Pi_i M$ representan supremos e ínfimos de M en L_i



Posibles propiedades de la función g:

$g(\sum_{j\in J} {}_1 x_j) = \sum_{j\in J} {}_2 g(x_j),\ g(\prod_{j\in J} {}_1 x_j) = \prod_{j\in J} {}_2 g(x_j) \quad \forall (x_j)_{j\in J}$

$(x \leq_1 y) \Rightarrow (g(x) \leq_2 g(y)),\ g(0_1)=0_2,\ g(1_1)=1_2, \ldots$

Propiedades análogas de las w-extensiones $\hat{g}_{\hat{w}}$ de g:

$\hat{g}_{\hat{w}}(\bigsqcup_{j\in J}^{w_1} x_j) = \bigsqcup_{j\in J}^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(x_j),\ \hat{g}_{\hat{w}}(\bigsqcap_{j\in J}^{w_1} x_j) = (\bigsqcap_{j\in J}^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(A_j)) \forall (x_j)_{j\in J},$

$(x \sqsubseteq^{w_1} y) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}}(x) \sqsubseteq^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(y)),\ \hat{g}_{\hat{w}}(w_1)=w_2,\ \hat{g}_{\hat{w}}(w_1^c)=w_2^c, \ldots$

Relación R_g asociada a la función g:

$x R_g y \Leftrightarrow y=g(x)$

Luego su extensión es:

$x (R_g)_w y \Leftrightarrow \varphi_{w_1}(x) R_g \varphi_{w_2}(y),$

es decir,

$\varphi_{w_2}(y)=g(\varphi_{w_1}(x))$

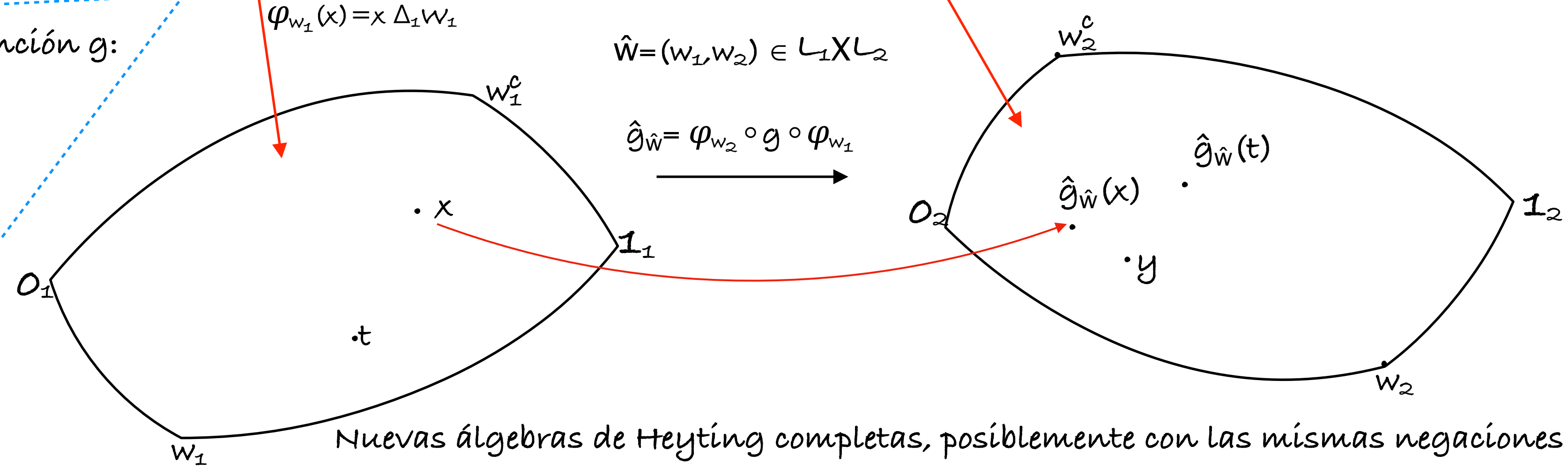
y en consecuencia

$y=\varphi_{w_2}(\varphi_{w_2}(y))=$

$\varphi_{w_2}(g(\varphi_{w_1}(x))),$

por lo que la propuesta de extensión $\hat{g}_{\hat{w}}$ es

$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1}$



Nuevas álgebras de Heyting completas, posiblemente con las mismas negaciones $'_1$ y $'_2$

$((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1)$

$((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$

Se verifica: $\varphi_{w_2} \circ \hat{g}_{\hat{w}} = g \circ \varphi_{w_1}$, $\hat{g}_{\hat{w}} \circ \varphi_{w_1} = \varphi_{w_2} \circ g$,

y $\varphi_{w_2} \circ \hat{g}_{\hat{w}} \circ \varphi_{w_1} = g$, es decir: $\widehat{(\hat{g}_{\hat{w}})}_{\hat{w}} = g$

Álgebras de Heyting completas con una negación fuerte, un nítido fijo y un operador diferencia:

$$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$$

Para $i \in \{1,2\}$

$w_i \in L_i$ t.q. $(w_i)'^{i} = (w_i)^c$

$z_i \,\Delta_i\, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall z_i \in L_i$

$$(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$$

Si $M \subseteq L_i$, $\sum_i M$ y $\prod_i M$ representan supremos e ínfimos de M en L_i

$$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1}$$

$\hat{g}_{\hat{w}}(\bigsqcup\limits_{j \in J}^{w_1} x_j) = \bigsqcup\limits_{j \in J}^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(x_j)$, $\hat{g}_{\hat{w}}(\bigsqcap\limits_{j \in J}^{w_1} x_j) = (\bigsqcap\limits_{j \in J}^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(A_j)) \,\forall (x_j)_{j \in J}$,

$(x \sqsubseteq^{w_1} y) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}}(x) \sqsubseteq^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(y))$, $\hat{g}_{\hat{w}}(w_1) = w_2$, $\hat{g}_{\hat{w}}(w_1^c) = w_2^c$,...

Relación R_g asociada a la función g:

$x R_g y \Leftrightarrow y = g(x)$

Luego su extensión es:

$x (R_g)_w y \Leftrightarrow \varphi_{w_1}(x) R_g \varphi_{w_2}(y)$,

es decir,

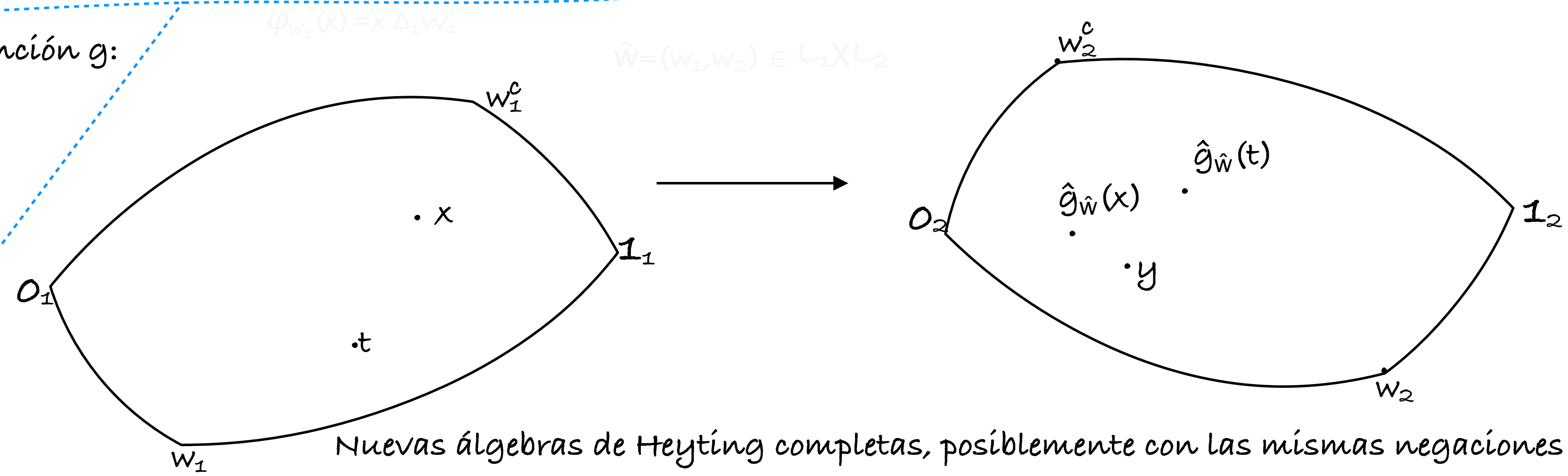
$\varphi_{w_2}(y) = g(\varphi_{w_1}(x))$

y en consecuencia

$y = \varphi_{w_2}(\varphi_{w_2}(y)) = \varphi_{w_2}(g(\varphi_{w_1}(x)))$,

por lo que la propuesta de extensión $\hat{g}_{\hat{w}}$ es

$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1}$



Nuevas álgebras de Heyting completas, posiblemente con las mismas negaciones $'_1$ y $'_2$

$((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1)$ $\qquad$ $((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$

Se verifica: $\varphi_{w_2} \circ \hat{g}_{\hat{w}} = g \circ \varphi_{w_1}$, $\hat{g}_{\hat{w}} \circ \varphi_{w_1} = \varphi_{w_2} \circ g$,

y $\varphi_{w_2} \circ \hat{g}_{\hat{w}} \circ \varphi_{w_1} = g$, es decir: $\widehat{(\hat{g}_{\hat{w}})}_{\hat{w}} = g$

Álgebras de Heyting completas con una negación fuerte, un nítido fijo y un operador diferencia:

$$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$$

Para $i \in \{1,2\}$

$w_i \in L_i$ t.q. $(w_i)'^{i} = (w_i)^c$

$z_i \, \Delta_i \, w_i = (z_i \cdot_i (w_i)^c) +_i (z' \cdot_i w_i) \quad \forall z_i \in L_i$

$$(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$$

Si $M \subseteq L_i$, $\sum_i M$ y $\prod_i M$ representan supremos e ínfimos de M en L_i

$$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1}$$

Casos particulares:

$w_1 = 0 : \hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_{w_2} \circ g$

$w_2 = 0 : \hat{g}_{\hat{w}} = g \circ \varphi_{w_1}$

$\hat{g}_{\hat{w}}(\bigsqcup_{j \in J}^{w_1} x_j) = \bigsqcup_{j \in J}^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(x_j)$, $\hat{g}_{\hat{w}}(\prod_{j \in J}^{w_1} x_j) = (\prod_{j \in J}^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(A_j)) \forall (x_j)_{j \in J}$,

$(x \sqsubseteq^{w_1} y) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}}(x) \sqsubseteq^{w_2} \hat{g}_{\hat{w}}(y))$, $\hat{g}_{\hat{w}}(w_1) = w_2$, $\hat{g}_{\hat{w}}(w_1^c) = w_2^c, \ldots$

Relación R_g asociada a la función g:

$x R_g y \Leftrightarrow y = g(x)$

Luego su extensión es:

$x (R_g)_w y \Leftrightarrow \varphi_{w_1}(x) R_g \varphi_{w_2}(y)$,

es decir,

$\varphi_{w_2}(y) = g(\varphi_{w_1}(x))$

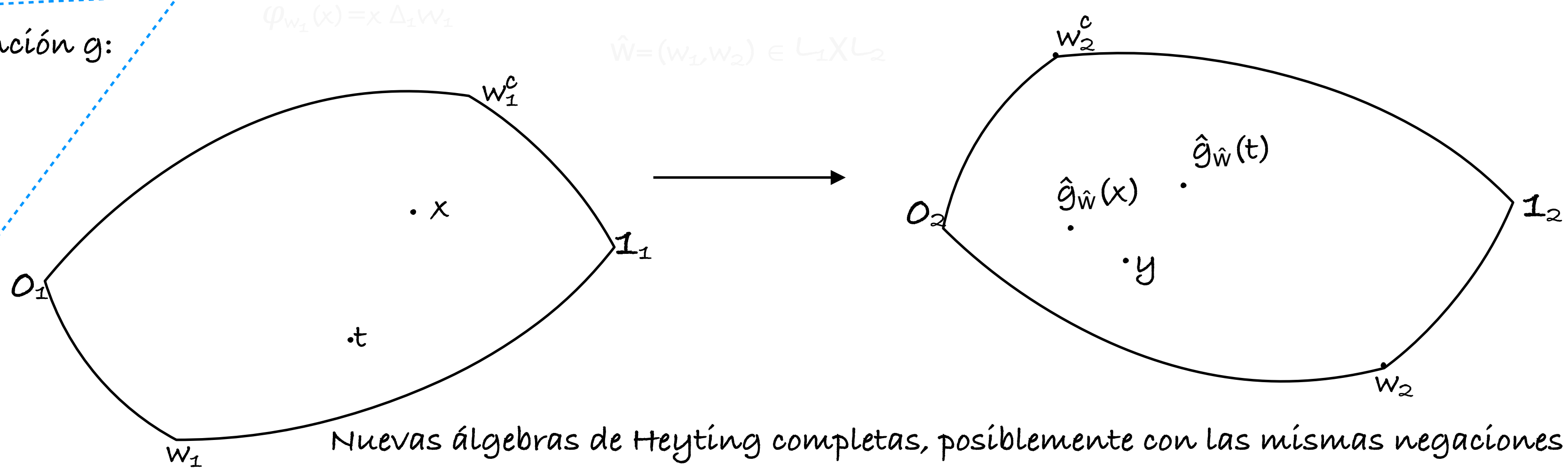
y en consecuencia

$y = \varphi_{w_2}(\varphi_{w_2}(y)) =$

$\varphi_{w_2}(g(\varphi_{w_1}(x)))$,

por lo que la propuesta de extensión $\hat{g}_{\hat{w}}$ es

$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1}$



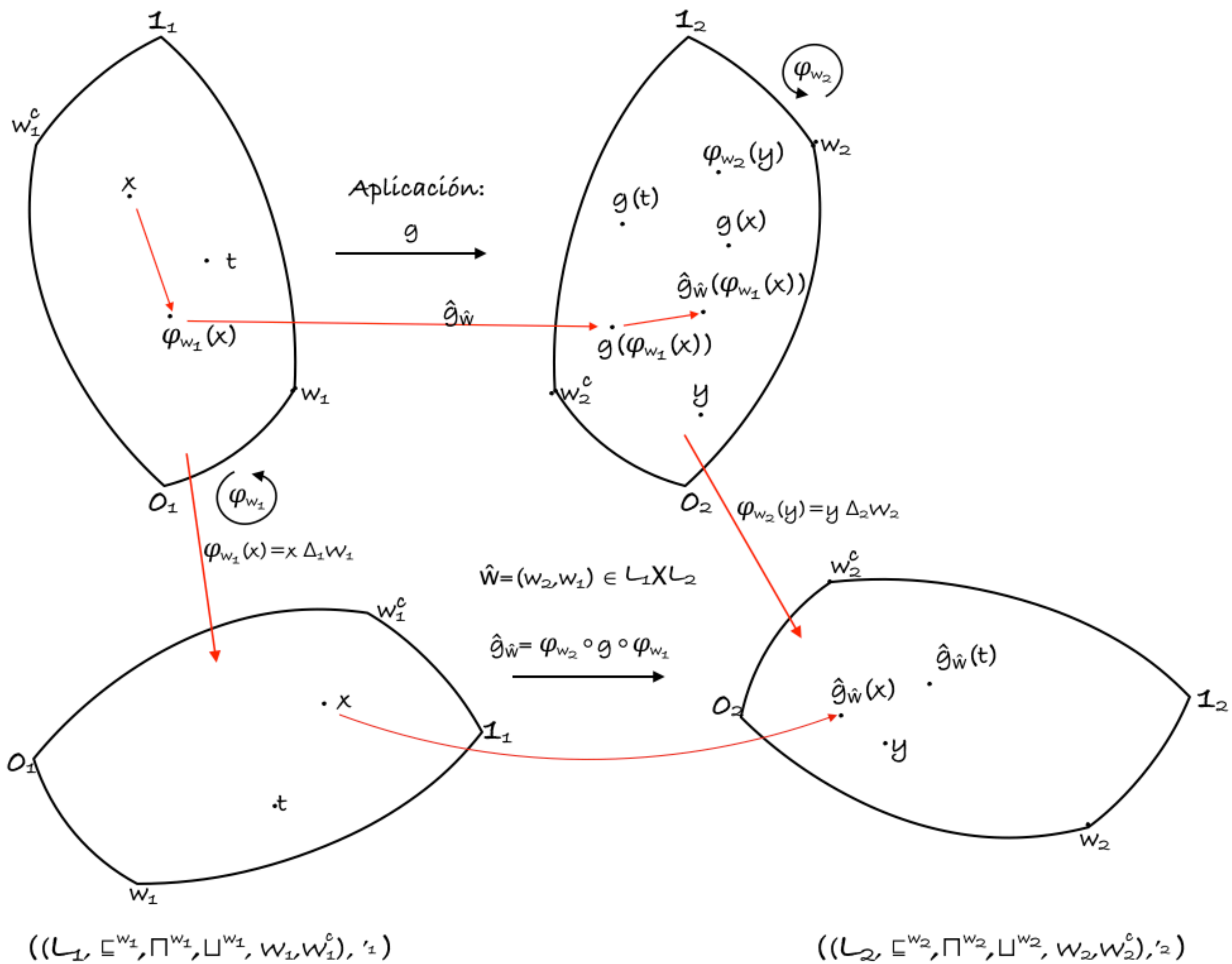
Nuevas álgebras de Heyting completas, posiblemente con las mismas negaciones $'_1$ y $'_2$

$((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1)$ $\qquad$ $((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$

Se verifica: $\varphi_{w_2} \circ \hat{g}_{\hat{w}} = g \circ \varphi_{w_1}$, $\hat{g}_{\hat{w}} \circ \varphi_{w_1} = \varphi_{w_2} \circ g$,

y $\varphi_{w_2} \circ \hat{g}_{\hat{w}} \circ \varphi_{w_1} = g$, es decir: $\widehat{(\hat{g}_{\hat{w}})}_{\hat{w}} = g$

Otras propiedades de $\hat{g}_{\hat{W}}$ entre los retículos $(L_1, \sqsubseteq^{W_1})$ y $(L_2, \sqsubseteq^{W_2})$ en función de g entre los retículos $(L_1, \leq_1)$ y $(L_2, \leq_2)$.



1_1
w_1^c
x
t
$\varphi_{w_1}(x)$
w_1
0_1
φ_{w_1}
Aplicación:
g
$\hat{g}_{\hat{w}}$
1_2
φ_{w_2}
w_2
$\varphi_{w_2}(y)$
$g(t)$
$g(x)$
$\hat{g}_{\hat{w}}(\varphi_{w_1}(x))$
$g(\varphi_{w_1}(x))$
w_2^c
y
0_2
$\varphi_{w_1}(x) = x \,\Delta_1 w_1$
$\varphi_{w_2}(y) = y \,\Delta_2 w_2$
$\hat{w} = (w_2, w_1) \in L_1 X L_2$
$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1}$
w_1^c
x
1_1
0_1
t
w_1
w_2^c
$\hat{g}_{\hat{w}}(t)$
$\hat{g}_{\hat{w}}(x)$
0_2
1_2
y
w_2
$((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1)$
$((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$

Posibles propiedades de una función g:

$g: ((L_1, \le_1, \cdot_1, +_1), '_1) \to ((L_2, \le_2, \cdot_2, +_2), '_2)$

g es inyectiva: $(x \neq y) \Rightarrow (g(x) \neq g(y))$

g es suprayectiva: $\forall y \in L_2 \ \exists x \in L_1 : y = g(x)$

g es biyectiva, (tiene inversa g^{-1})

$\hat{w} = (w_2, w_1) \in L_1 X L_2$

$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1}$

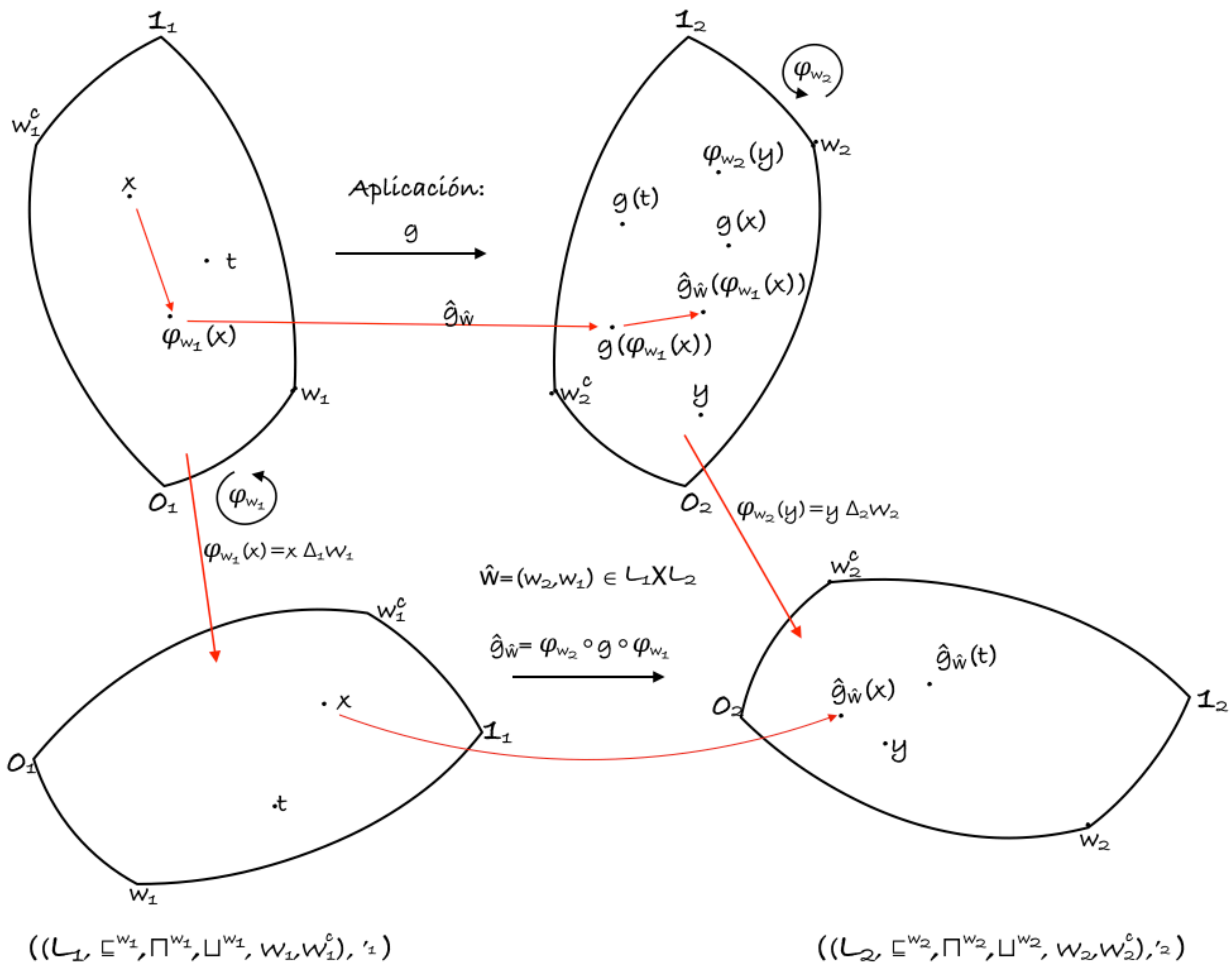
Propiedades correspondientes de sus ŵ-extensiones $\hat{g}_{\hat{w}}$:

$\hat{g}_{\hat{w}}: ((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1) \to ((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$

$\hat{g}_{\hat{w}}$ es inyectiva: $(x \neq y) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}}(x) \neq (y))$

$\hat{g}_{\hat{w}}$ es suprayectiva: $\forall y \in L_2 \ \exists x \in L_1 : y = \hat{g}_{\hat{w}}(x)$

$\hat{g}_{\hat{w}}$ es biyectiva (y su inversa verifica: $(\hat{g}_{\hat{w}})^{-1} = (\widehat{g^{-1}})_{\hat{w}}$).



Posibles propiedades de una función g:

$g: ((L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1), '_1) \rightarrow ((L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2), '_2)$

g es inyectiva: $(x \neq y) \Rightarrow (g(x) \neq g(y))$

g es suprayectiva: $\forall y \in L_2 \ \exists x \in L_1 : y = g(x)$

g es biyectiva, (tiene inversa g^{-1})

$\hat{w} = (w_2, w_1) \in L_1 X L_2$

$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1}$

Propiedades correspondientes de sus $\hat{w}$-extensiones $\hat{g}_{\hat{w}}$:

$\hat{g}_{\hat{w}}: ((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1) \rightarrow ((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$

$\hat{g}_{\hat{w}}$ es inyectiva: $(x \neq y) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}}(x) \neq (y))$

$\hat{g}_{\hat{w}}$ es suprayectiva: $\forall y \in L_2 \ \exists x \in L_1 : y = \hat{g}_{\hat{w}}(x)$

$\hat{g}_{\hat{w}}$ es biyectiva (y su inversa verifica: $(\hat{g}_{\hat{w}})^{-1} = (\widehat{g^{-1}})_{\hat{w}}$).

En particular, si $L_1 = L_2 = L$ y $w_1 = w_2 = w$:

y si $g = i$, (identidad en L, $i(x) = x \ \forall x \in L$)

o si $g = (')$, (negación fuerte en L: $g(x) = x' \ \forall x \in L$)

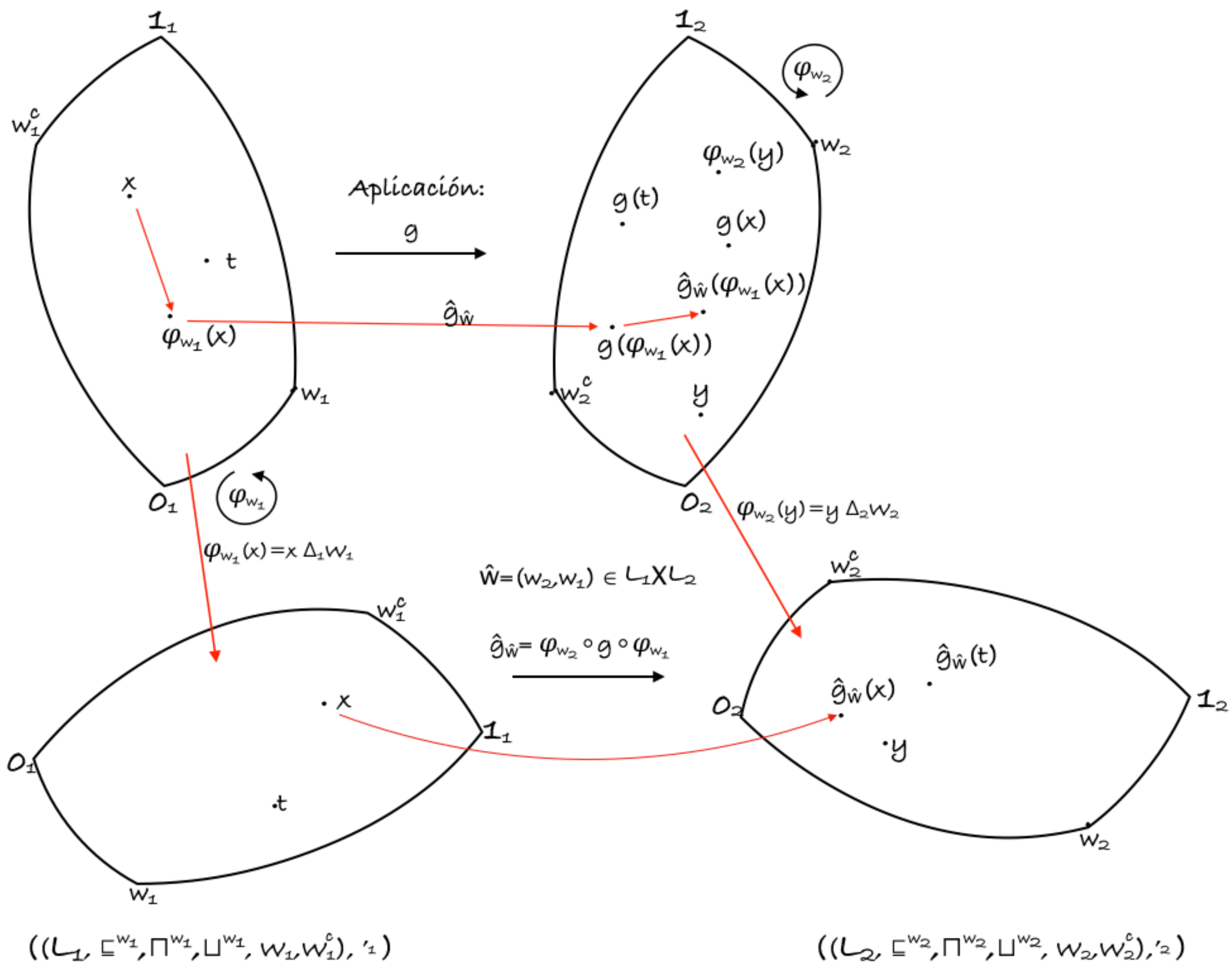
$\hat{w} = (w, w) \in L X L$

$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_w \circ g \circ \varphi_w$

las extensiones $\hat{i}_{\hat{w}}$ y $\hat{'}_{\hat{w}}$ en L con $\hat{w} = (w, w)$:

$\hat{i}_{\hat{w}} = i$, ($\hat{i}_{\hat{w}}(x) = x \ \forall x \in L$)

$\hat{'}_{\hat{w}} = (')$, (es decir, $\hat{'}_{\hat{w}}(x) = x' \ \forall x \in L$)



Posibles propiedades de una función g:

$g: ((L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1), '_1) \to ((L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2), '_2)$

g es inyectiva: $(x \neq y) \Rightarrow (g(x) \neq g(y))$

g es suprayectiva: $\forall y \in L_2\ \ \exists x \in L_1 : y = g(x)$

g es biyectiva, (tiene inversa g^{-1})

$\hat{w} = (w_2, w_1) \in L_1 X L_2$

$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1}$

Propiedades correspondientes de sus $\hat{w}$-extensiones $\hat{g}_{\hat{w}}$:

$\hat{g}_{\hat{w}}: ((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1) \to ((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$

$\hat{g}_{\hat{w}}$ es inyectiva: $(x \neq y) \Rightarrow (\hat{g}_{\hat{w}}(x) \neq (y))$

$\hat{g}_{\hat{w}}$ es suprayectiva: $\forall y \in L_2\ \ \exists x \in L_1 : y = \hat{g}_{\hat{w}}(x)$

$\hat{g}_{\hat{w}}$ es biyectiva (y su inversa verifica: $(\hat{g}_{\hat{w}})^{-1} = (\widehat{g^{-1}})_{\hat{w}}$) .

En particular, si $L_1 = L_2 = L$ y $w_1 = w_2 = w$:

y si $g = i$, (identidad en L, $i(x) = x\ \ \forall x \in L$)

o si $g = (')$, (negación fuerte en L: $g(x) = x'\ \forall x \in L$)

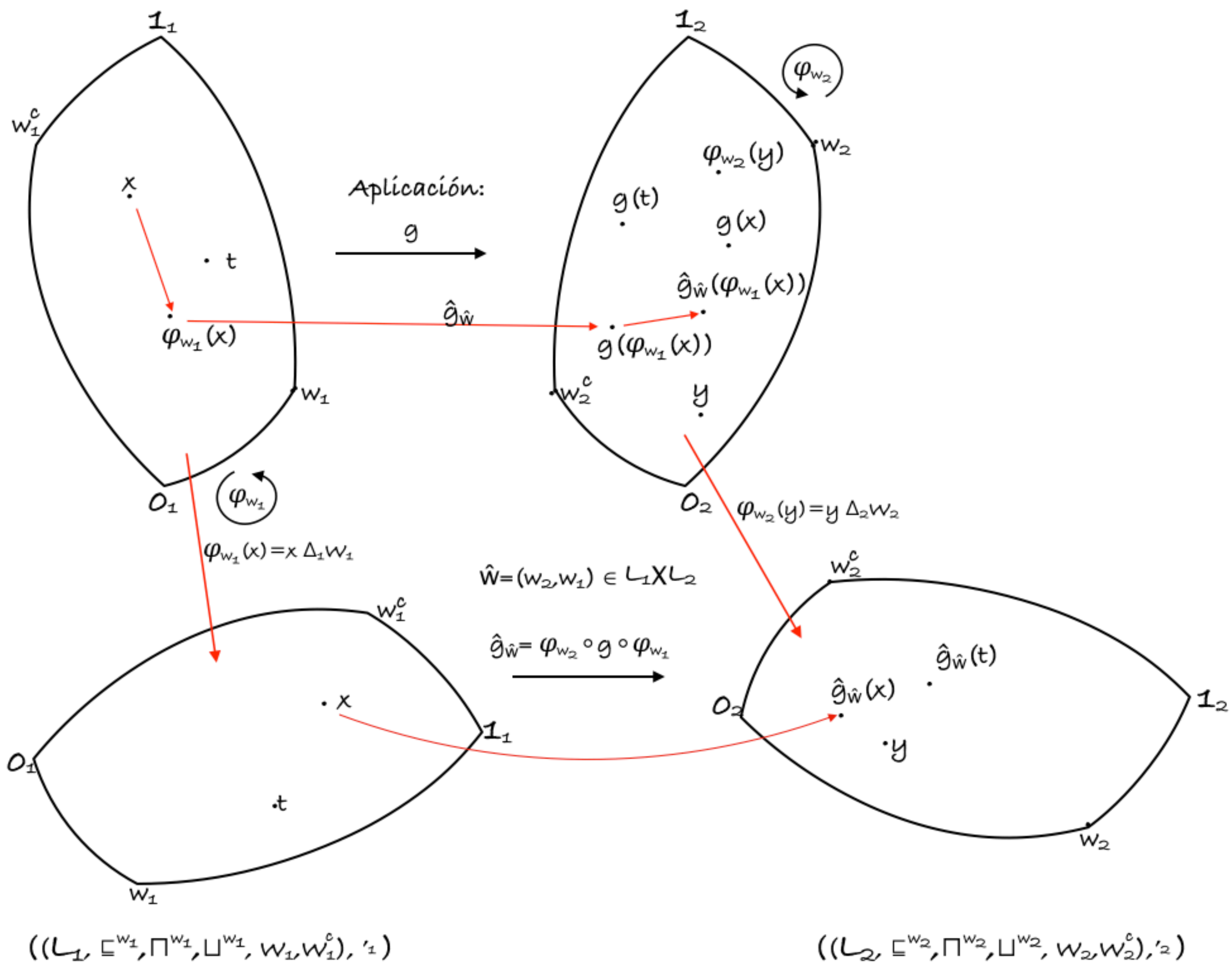
$\hat{w} = (w, w) \in LXL$

$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_w \circ g \circ \varphi_w$

las extensiones $\hat{i}_{\hat{w}}$ y $\hat{'}_{\hat{w}}$ en L con $\hat{W} = (w, w)$:

$\hat{i}_{\hat{w}} = i$, ($\hat{i}_{\hat{w}}(x) = x\ \ \forall x \in L$)

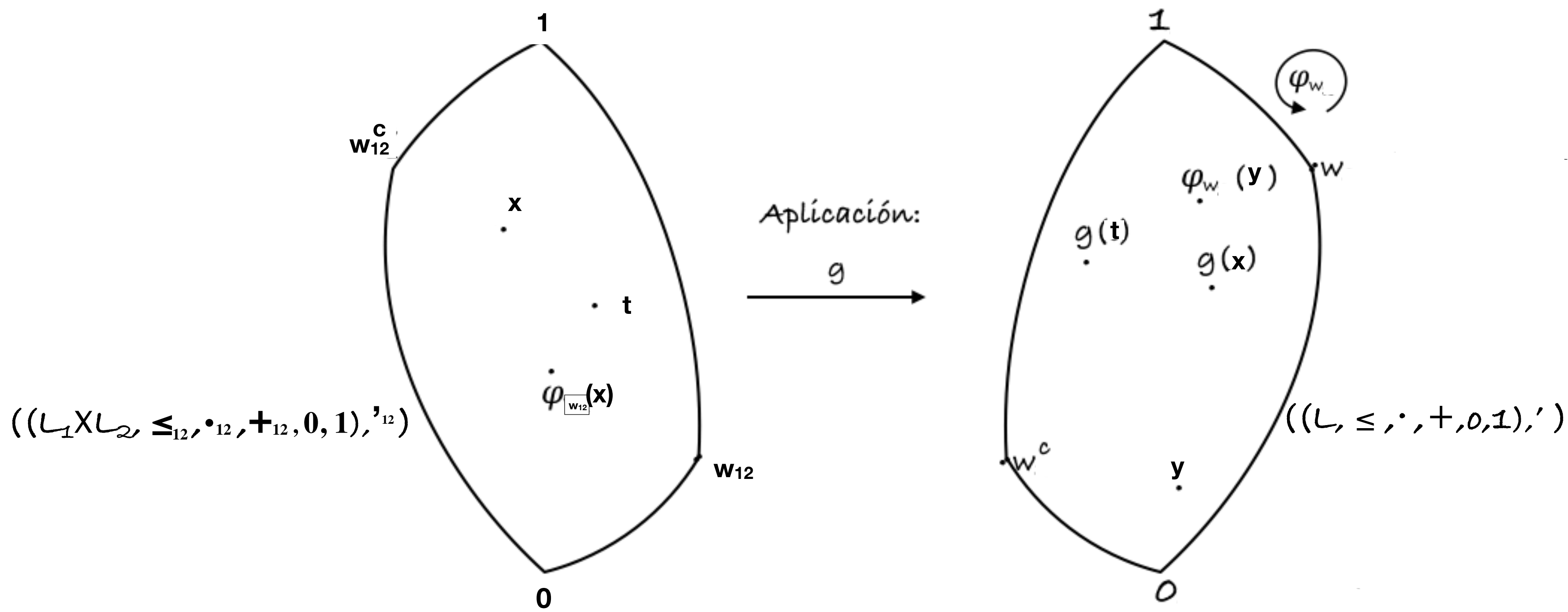
$\hat{'}_{\hat{w}} = (')$, (es decir, $\hat{'}_{\hat{w}}(x) = x'\ \forall x \in L$)



Algunas propiedades de la extensión $\hat{g}_{\hat{w}}$ de una función g definida en un producto de retículos $(L_1 X L_2, \leq_{12})$.

Funciones g tipo operaciones binarias:

$g: ((L_1 X L_2, \leq_{12}, \cdot_{12}, +_{12}, 0, 1), '_{12}) \rightarrow ((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$



Funciones g tipo operaciones binarias:

$g: ((L_1 X L_2, \leq_{12}, \cdot_{12}, +_{12}, 0, 1), '_{12}) \to ((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$

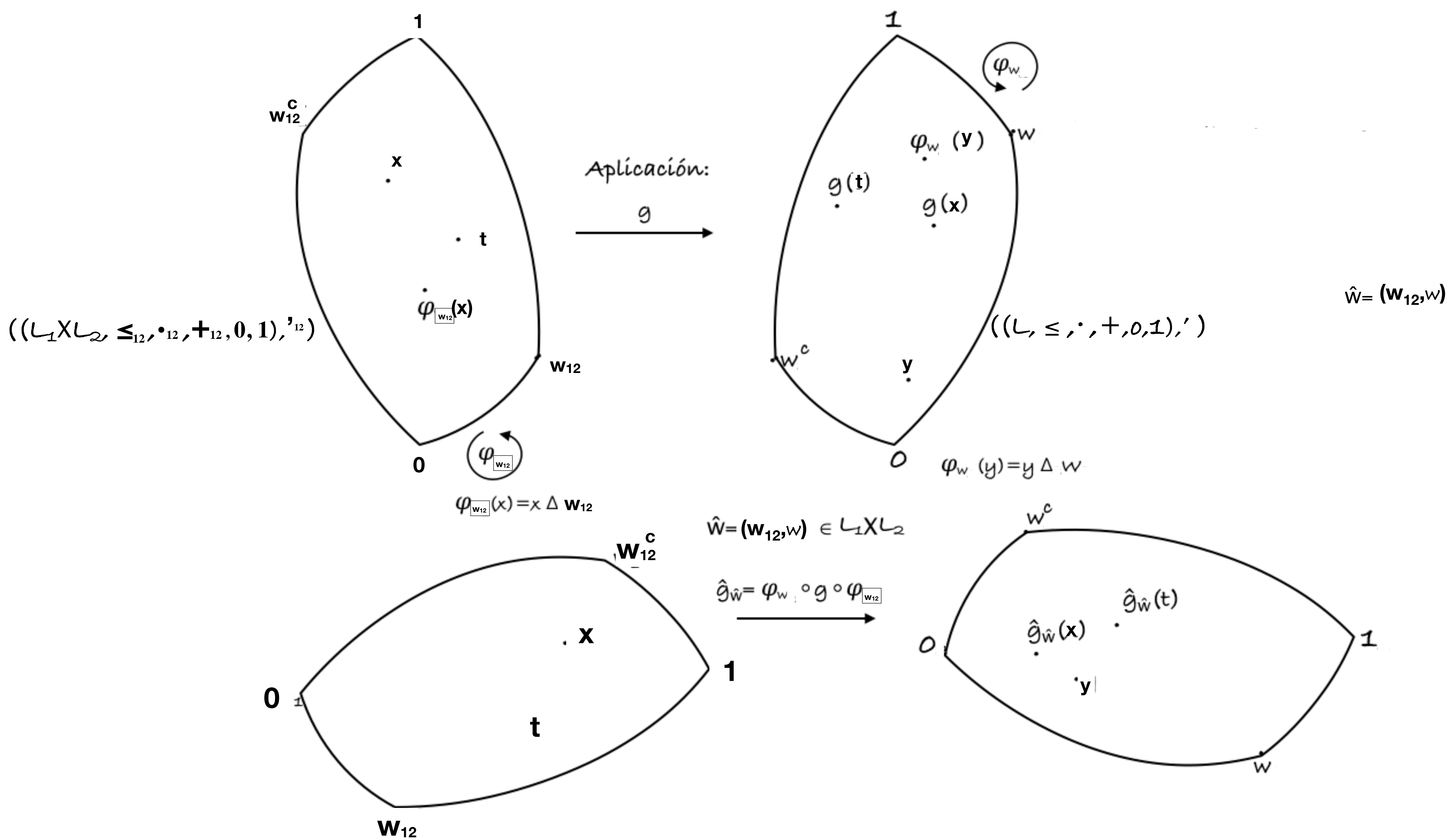
$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_w \circ g \circ \varphi_{w_{12}}$

$w_{12} = (w_1, w_2) \in (L_1 X L_2)$

$\hat{w} = (w_{12}, w) \in (L_1 X L_2) X L$

Sus $\hat{w}$-extensiones $\hat{g}_{\hat{w}}$:

$\hat{g}_{\hat{w}}: ((L_1 X L_2, \sqsubseteq^{w_{12}} \sqcap^{w_{12}}, \sqcup^{w_{12}}, w_{12}, w_{12}^c), '_{12}) \to ((L, \sqsubseteq^{w}, \sqcap^{w}, \sqcup^{w}, w, w^c), ')$



Funciones g tipo operaciones binarias:

$g: ((L_1XL_2, \leq_{12}, \cdot_{12}, +_{12}, 0, 1), '_{12}) \to ((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$

$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_w \circ g \circ \varphi_{w_{12}}$

$w_{12} = (w_1, w_2) \in (L_1XL_2)$

$\hat{w} = (w_{12}, w) \in (L_1XL_2)XL$

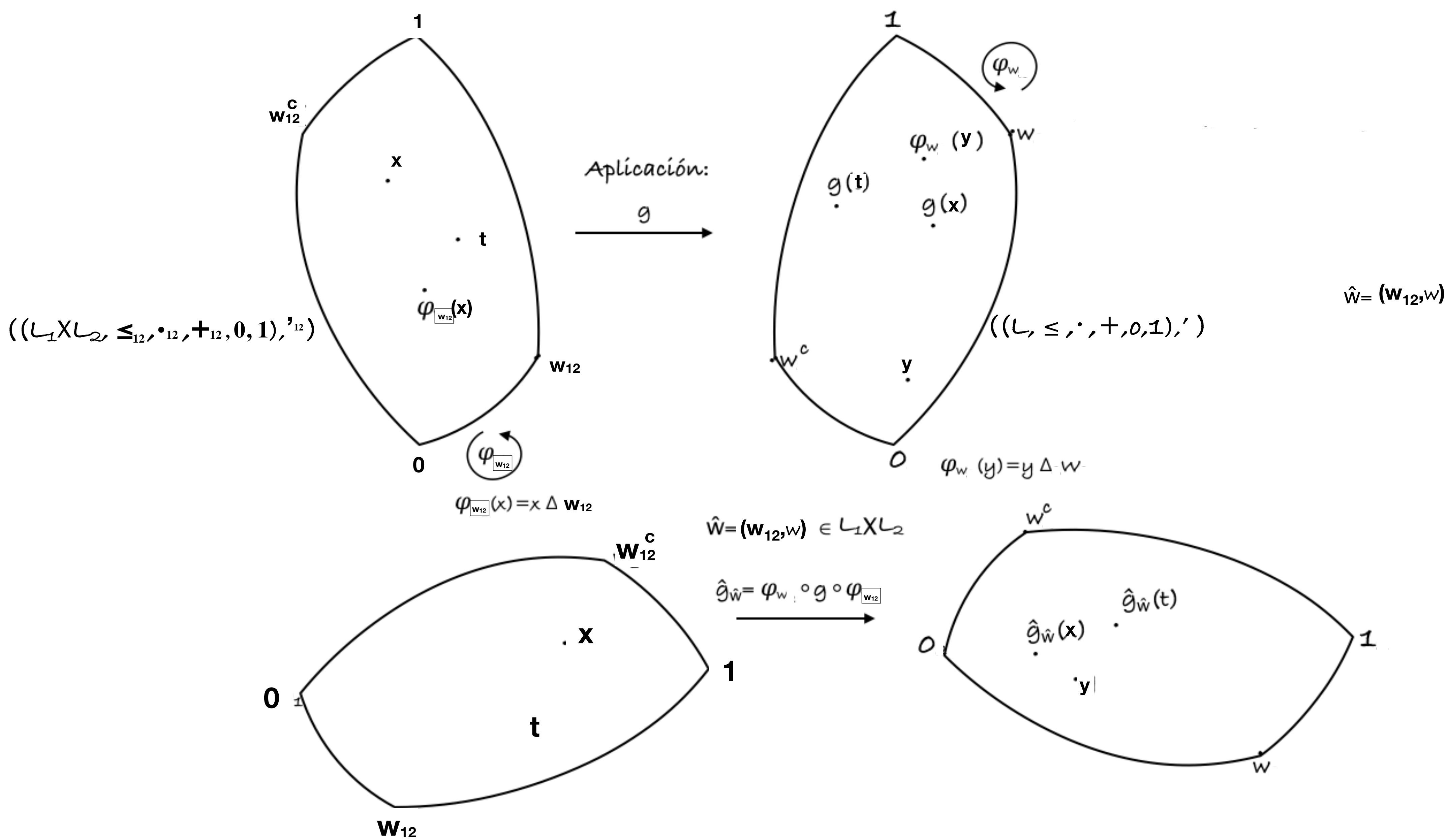
Sus $\hat{w}$-extensiones $\hat{g}_{\hat{w}}$:

$\hat{g}_{\hat{w}}: ((L_1XL_2, \sqsubseteq^{w_{12}} \sqcap^{w_{12}}, \sqcup^{w_{12}}, w_{12}, w_{12}^c), '_{12}) \to ((L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ')$

Ejemplo1: $(L_1 = L,\ L_2 = N(L))$ y g diferencia simétrica:

$\triangle: ((LXN(L), \leq, \cdot, +, 0, 1), ') \to ((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$

tal que $\triangle(x, s) = x \triangle s = x \cdot s^c + x' \cdot s \quad \forall (x, s) \in LXN(L)$.



Funciones g tipo operaciones binarias:

$g: ((L_1 X L_2, \le_{12}, \cdot_{12}, +_{12}, 0, 1), '_{12}) \to ((L, \le, \cdot, +, 0, 1), ')$

Ejemplo1: ($L_1 = L$, $L_2 = N(L)$) y g diferencia simétrica:

$\triangle: ((L X N(L), \le, \cdot, +, 0, 1), ') \to ((L, \le, \cdot, +, 0, 1), ')$

tal que $\triangle(x, s) = x \triangle s = x \cdot s^c + x' \cdot s \quad \forall (x, s) \in L X N(L)$.

$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_w \circ g \circ \varphi_{w_{12}}$

$w_{12} = (w_1, w_2) \in (L_1 X L_2)$

$\hat{w} = (w_{12}, w) \in (L_1 X L_2) X L$

$\hat{w} = ((w, w), w) \in L X L X L$

$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_w \circ g \circ \varphi_{(w,w)}$

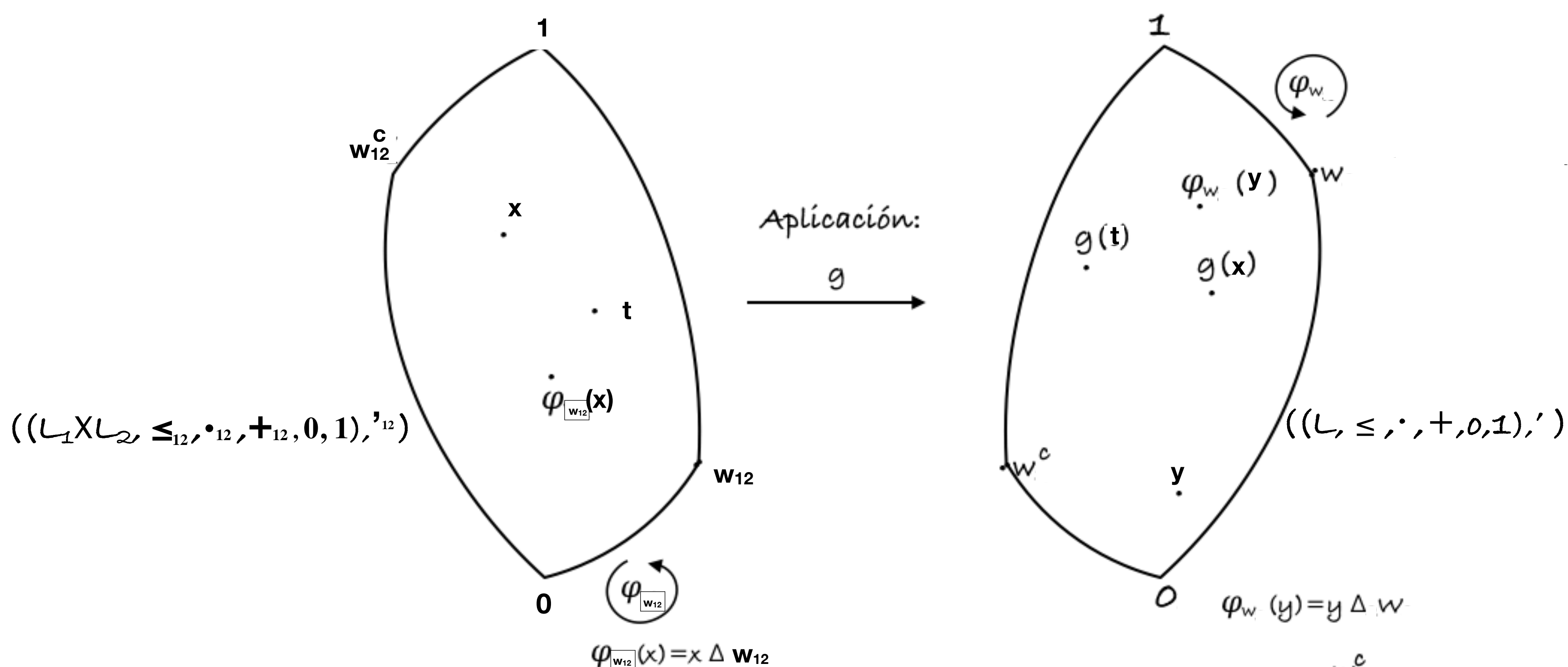
Sus $\hat{w}$-extensiones $\hat{g}_{\hat{w}}$:

$\hat{g}_{\hat{w}}: ((L_1 X L_2, \sqsubseteq^{w_{12}}, \sqcap^{w_{12}}, \sqcup^{w_{12}}, w_{12}, w_{12}^c), '_{12}) \to ((L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ')$

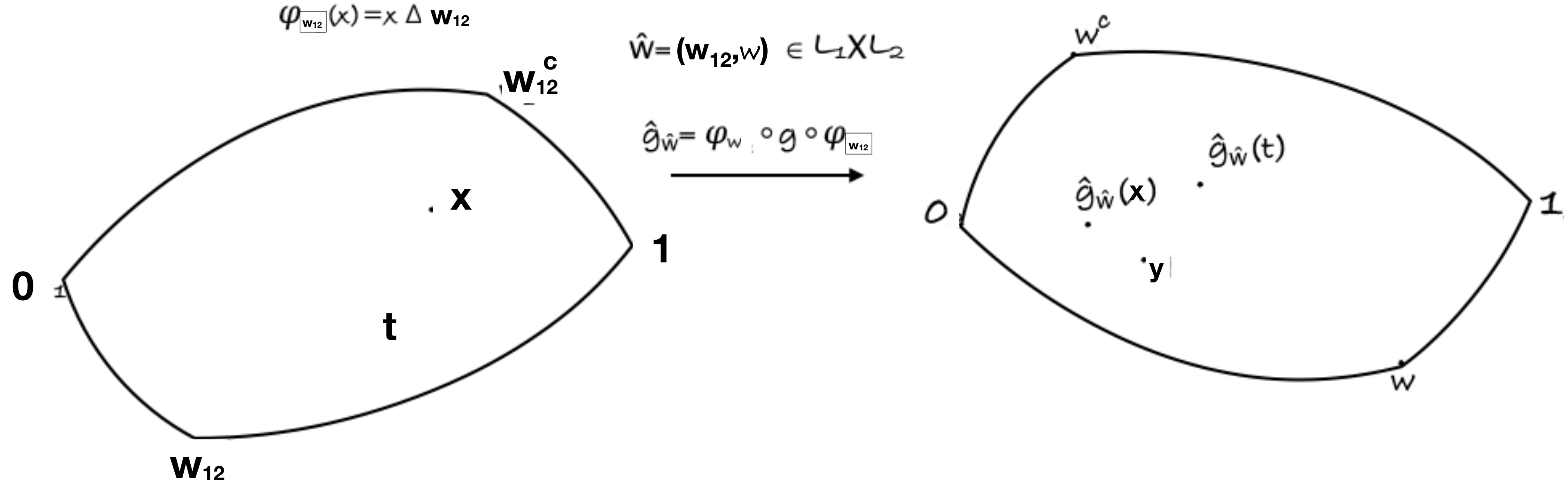
Ejemplo1': Su w-extensión $\hat{\triangle}_{\hat{w}}$

Si $w_1 = w_2 = w$: $\hat{\triangle}_{\hat{w}} = \triangle^w$ (w-diferencia simétrica en $(L, \sqsubseteq^w)$),

es decir: $\hat{\triangle}_{\hat{w}}(x, s) = (x \triangle^w s) = (x \triangle s \triangle w) \quad \forall (x, s) \in L X N(L)$.



$\hat{w} = (w_{12}, w)$



Funciones g tipo operaciones binarias:

$g: ((L_1 X L_2, \leq_{12}, \cdot_{12}, +_{12}, 0, 1), '_{12}) \rightarrow ((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$

$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_w \circ g \circ \varphi_{w_{12}}$

$w_{12} = (w_1, w_2) \in (L_1 X L_2)$

$\hat{w} = (w_{12}, w) \in (L_1 X L_2) X L$

Sus $\hat{w}$-extensiones $\hat{g}_{\hat{w}}$:

$\hat{g}_{\hat{w}}: ((L_1 X L_2, \sqsubseteq^{w_{12}}, \sqcap^{w_{12}}, \sqcup^{w_{12}}, w_{12}, w_{12}^c), '_{12}) \rightarrow ((L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ')$

Ejemplo1: $(L_1 = L,\ L_2 = N(L))$ y g diferencia simétrica:

$\triangle: ((L X N(L), \leq, \cdot, +, 0, 1), ') \rightarrow ((L, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$

tal que $\triangle(x, s) = x \triangle s = x \cdot s^c + x' \cdot s \quad \forall (x, s) \in L X N(L)$.

$\hat{w} = ((w, w), w) \in L X L X L$

$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_w \circ g \circ \varphi_{(w,w)}$

Ejemplo1': Su w-extensión $\hat{\triangle}_{\hat{w}}$

Si $w_1 = w_2 = w$: $\hat{\triangle}_{\hat{w}} = \triangle^w$ (w-diferencia simétrica en $(L, \sqsubseteq^w)$),

es decir: $\hat{\triangle}_{\hat{w}}(x, s) = (x \triangle^w s) = (x \triangle s \triangle w) \quad \forall (x, s) \in L X N(L)$.

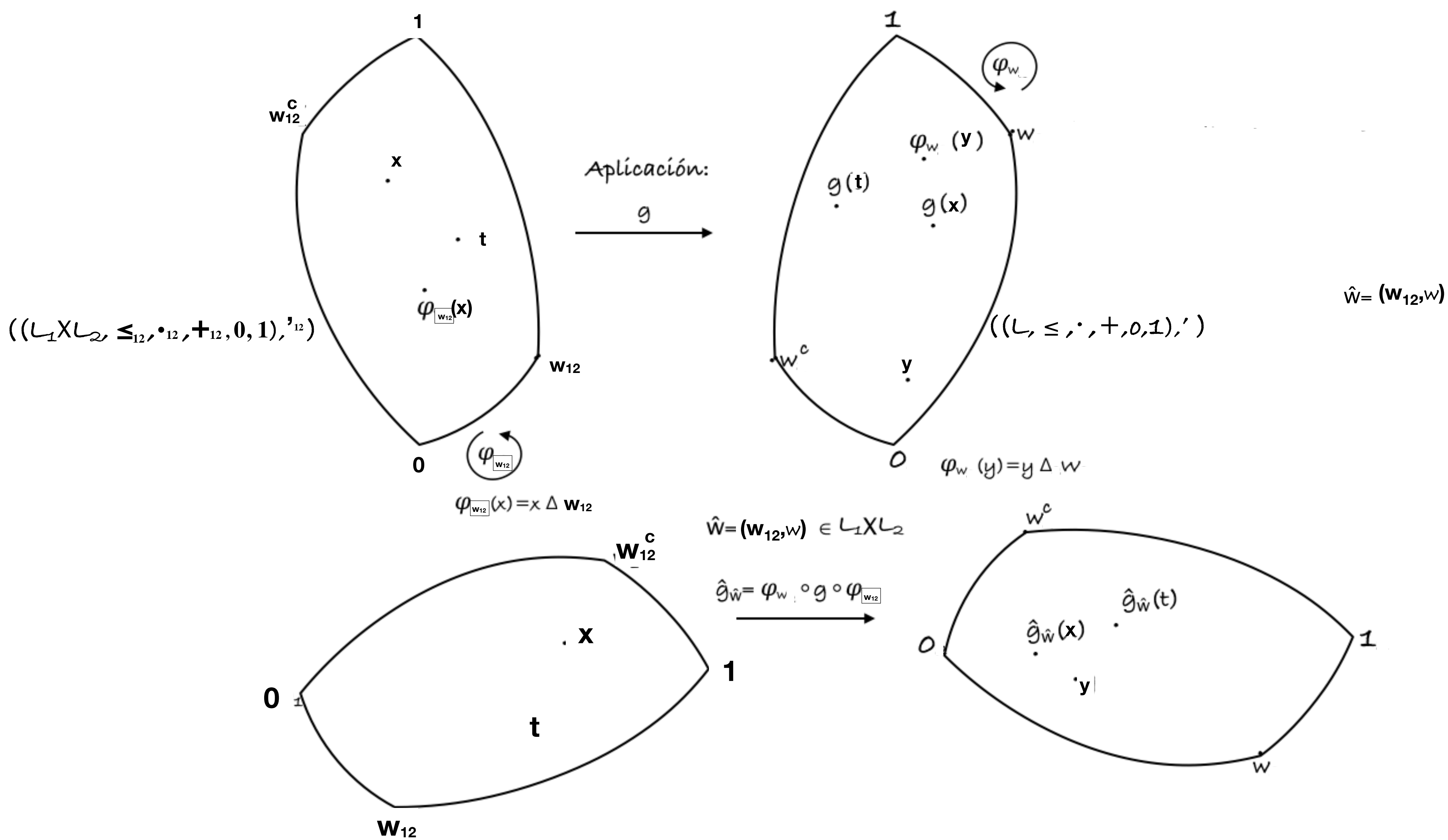
Ejemplo2: $(L_1 = L_2 = L)$ y $g = (\cdot)$ (ínfimo en L).

$g(x, y) = x \cdot y \quad \forall (x, y) \in L X L$.

Ejemplo2': Su w-extensión $\hat{\cdot}_{\hat{w}}$

Si $w_1 = w_2 = w$: $\hat{\cdot}_{\hat{w}} = \sqcap^w$ (w-ínfimo en $(L, \sqsubseteq^w)$),

es decir: $\hat{\cdot}_{\hat{w}}(x, y) = (x \sqcap^w y) = x \cdot y + w \cdot (x + y) \quad \forall (x, y) \in L X L$.



Funciones g tipo operaciones binarias:

$g: ((L_1XL_2, \le_{12}, \cdot_{12}, +_{12}, 0, 1), '_{12}) \to ((L, \le, \cdot, +, 0, 1), ')$

Ejemplo1: $(L_1=L,\ L_2=N(L))$ y g diferencia simétrica:

$\triangle: ((LXN(L), \le, \cdot, +, 0, 1), ') \to ((L, \le, \cdot, +, 0, 1), ')$

tal que $\triangle(x, s) = x \triangle s = x \cdot s^c + x' \cdot s \quad \forall (x, s) \in LXN(L)$.

Ejemplo2: $(L_1=L_2=L)$ y $g=(\cdot)$ (ínfimo en L) .

$g(x, y) = x \cdot y \quad \forall (x, y) \in LXL$.

Ejemplo3: $(L_1=L_2=L)$ y $g=(+)$ (supremo en L) .

$g(x, y) = x + y \quad \forall (x, y) \in LXL$.

$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_w \circ g \circ \varphi_{w_{12}}$

$w_{12} = (w_1, w_2) \in (L_1XL_2)$

$\hat{w} = (w_{12}, w) \in (L_1XL_2)XL$

$\hat{w} = ((w,w),w) \in LXLXL$

$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_w \circ g \circ \varphi_{(w,w)}$

Sus $\hat{w}$-extensiones $\hat{g}_{\hat{w}}$:

$\hat{g}_{\hat{w}}: ((L_1XL_2, \sqsubseteq^{w_{12}}, \sqcap^{w_{12}}, \sqcup^{w_{12}}, w_{12}, w_{12}^c), '_{12}) \to ((L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ')$

Ejemplo1': Su w-extensión $\hat{\triangle}_{\hat{w}}$

Si $w_1 = w_2 = w$: $\hat{\triangle}_{\hat{w}} = \triangle^w$ (w-diferencia simétrica en $(L, \sqsubseteq^w)$),

es decir: $\hat{\triangle}_{\hat{w}}(x, s) = (x \triangle^w s) = (x \triangle s \triangle w) \quad \forall (x, s) \in LXN(L)$.

Ejemplo2': Su w-extensión $\hat{\cdot}_{\hat{w}}$

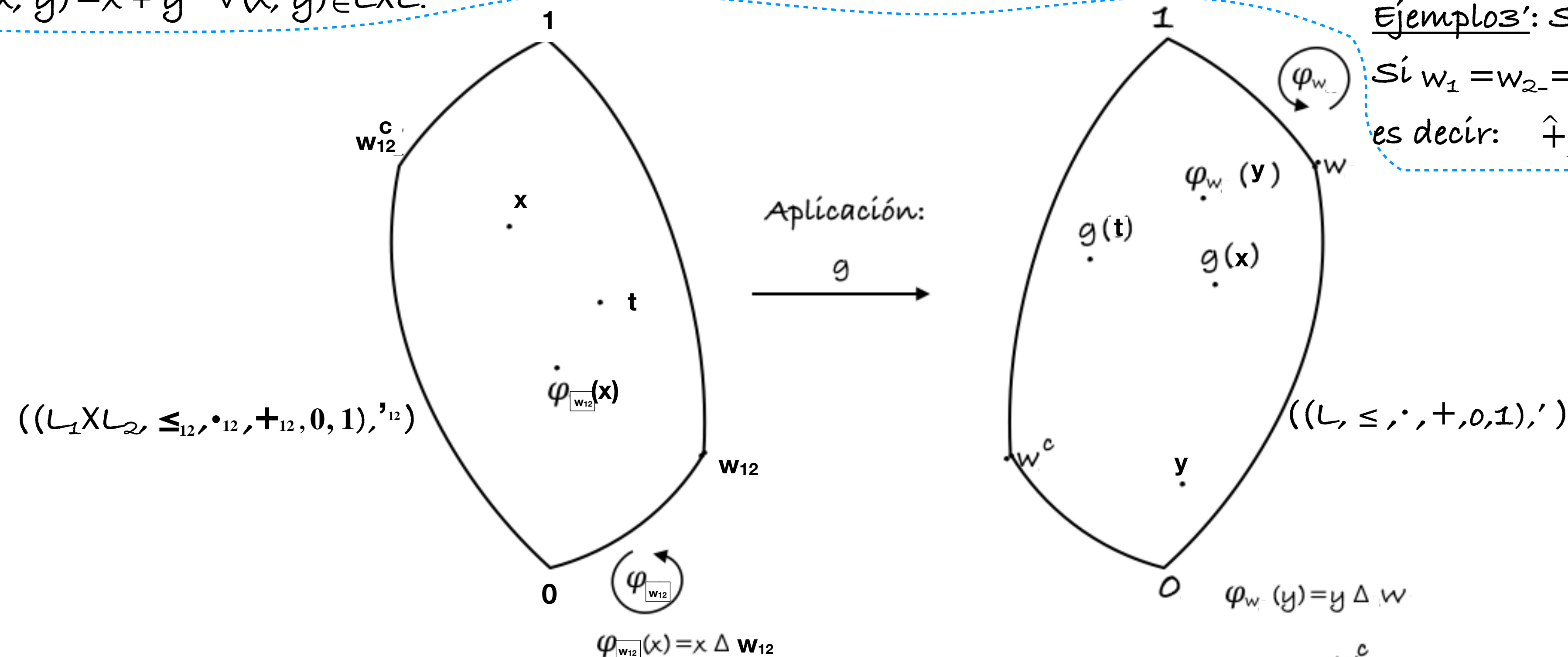
Si $w_1 = w_2 = w$: $\hat{\cdot}_{\hat{w}} = \sqcap^w$ (w-ínfimo en $(L, \sqsubseteq^w)$),

es decir: $\hat{\cdot}_{\hat{w}}(x, y) = (x \sqcap^w y) = x \cdot y + w \cdot (x+y) \quad \forall (x, y) \in LXL$.

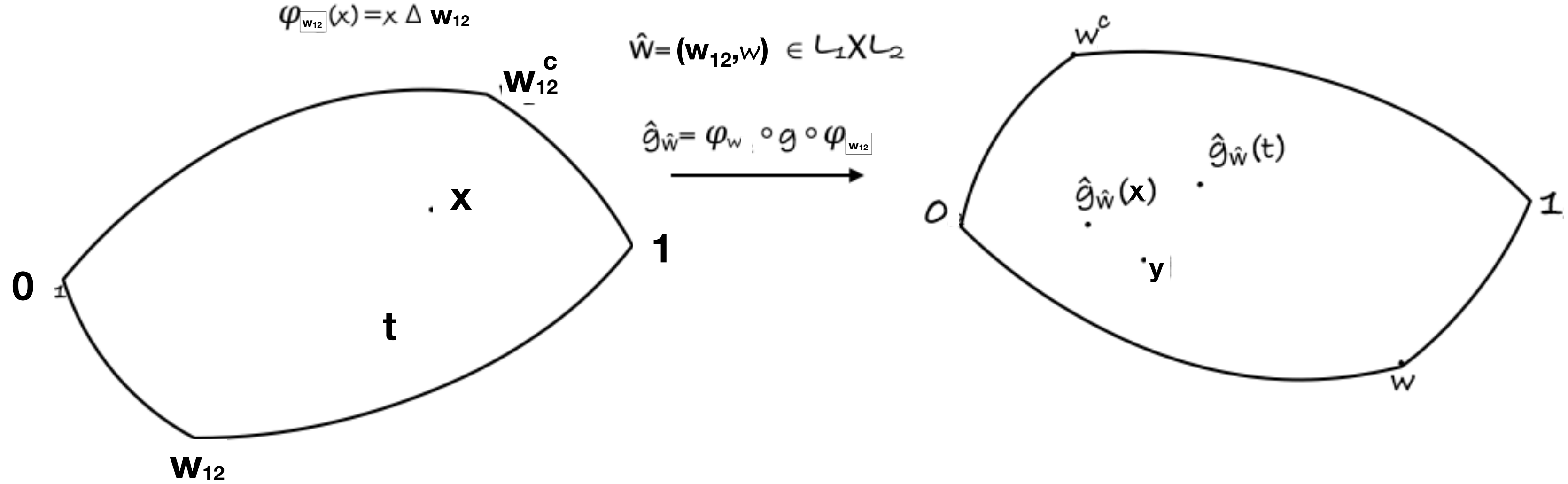
Ejemplo3': Su w-extensión $\hat{+}_{\hat{w}}$

Si $w_1 = w_2 = w$: $\hat{+}_{\hat{w}} = \sqcup^w$ (w-ínfimo en $(L, \sqsubseteq^w)$),

es decir: $\hat{+}_{\hat{w}}(x, y) = (x \sqcup^w y) = x \cdot y + w^c \cdot (x+y) \quad \forall (x, y) \in LXL$.



$\hat{w} = (w_{12}, w)$



Extensiones $\hat{i}_{\hat{w}}$ y $\widehat{(\,')}_{\hat{w}}$ de la función identidad $i:L \rightarrow L$ y de una negación fuerte $(\,'):L \rightarrow L$ respectivamente.

UN CASO PARTICULAR: $(L_1, \leq_1) = (L_2, \leq_2) = (L, \leq)$ con una negación fuerte $' : L \to L$. Sea $N_{'}(L) \subseteq L$ tal que

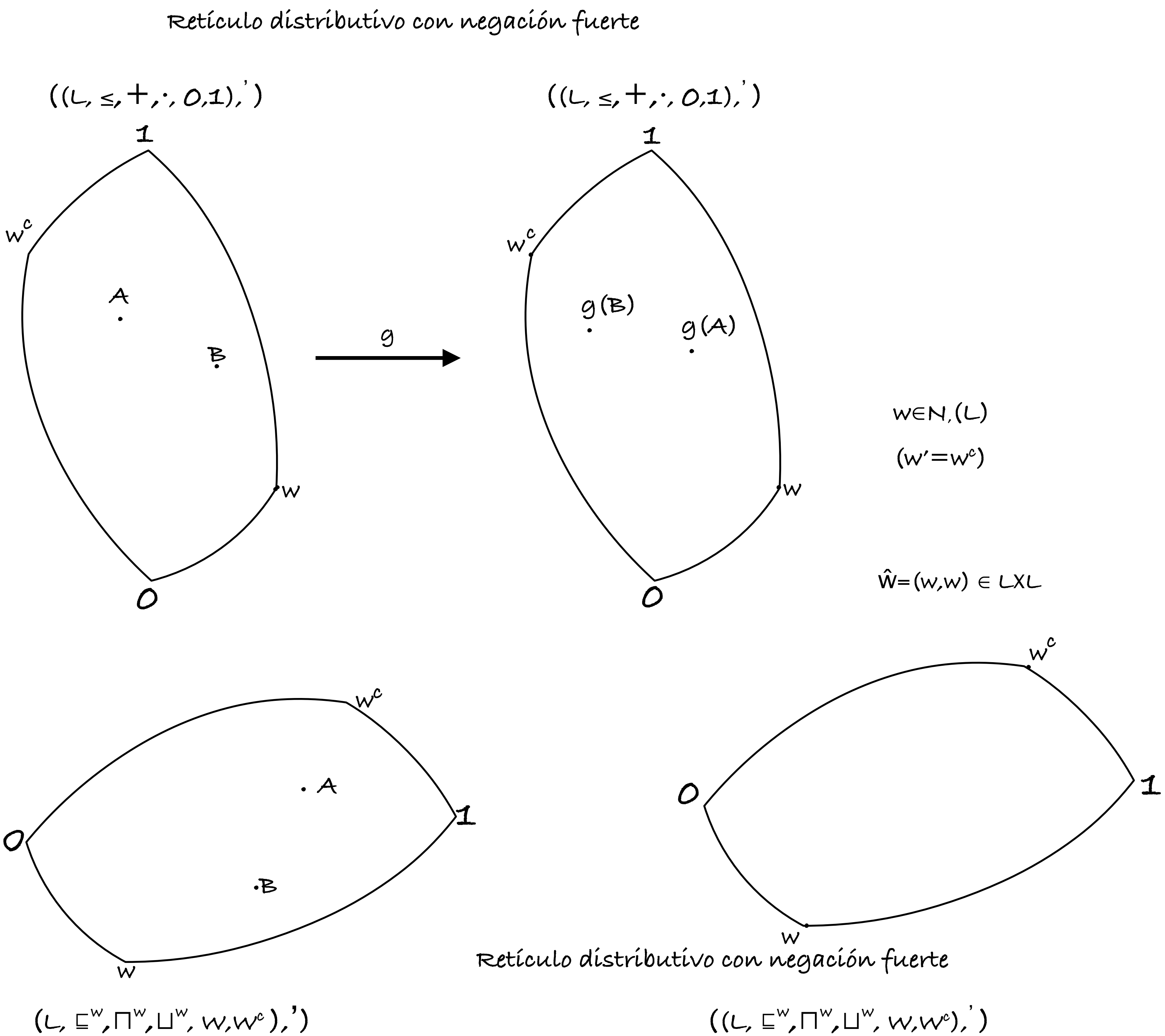
$$N_{'}(L) = \{w \in L \,/\, (w \text{ es complementado}) \,\&\, (w' = w^c)\}$$

UN CASO PARTICULAR: $(L_1, \leq_1) = (L_2, \leq_2) = (L, \leq)$ con una negación fuerte $' : L \to L$. Sea $N_{'}(L) \subseteq L$ tal que

$$N_{'}(L) = \{w \in L \,/\, (w \text{ es complementado}) \,\&\, (w' = w^c)\}$$

Sea $g : L \to L$ y sea $w \in N_{'}(L)$.

Para $\hat{w} = (w,w) \in LXL$, la función extensión $\hat{g}_{\hat{w}} : L \to L$ de g al retículo $(L, \sqsubseteq^w)$ responde al siguiente esquema:



UN CASO PARTICULAR: $(L_1, \leq_1) = (L_2, \leq_2) = (L, \leq)$ con una negación fuerte $':L \to L$. Sea $N_{'}(L) \subseteq L$ tal que

$$N_{'}(L) = \{w \in L \,/\, (w \text{ es complementado}) \,\&\, (w' = w^c)\}$$

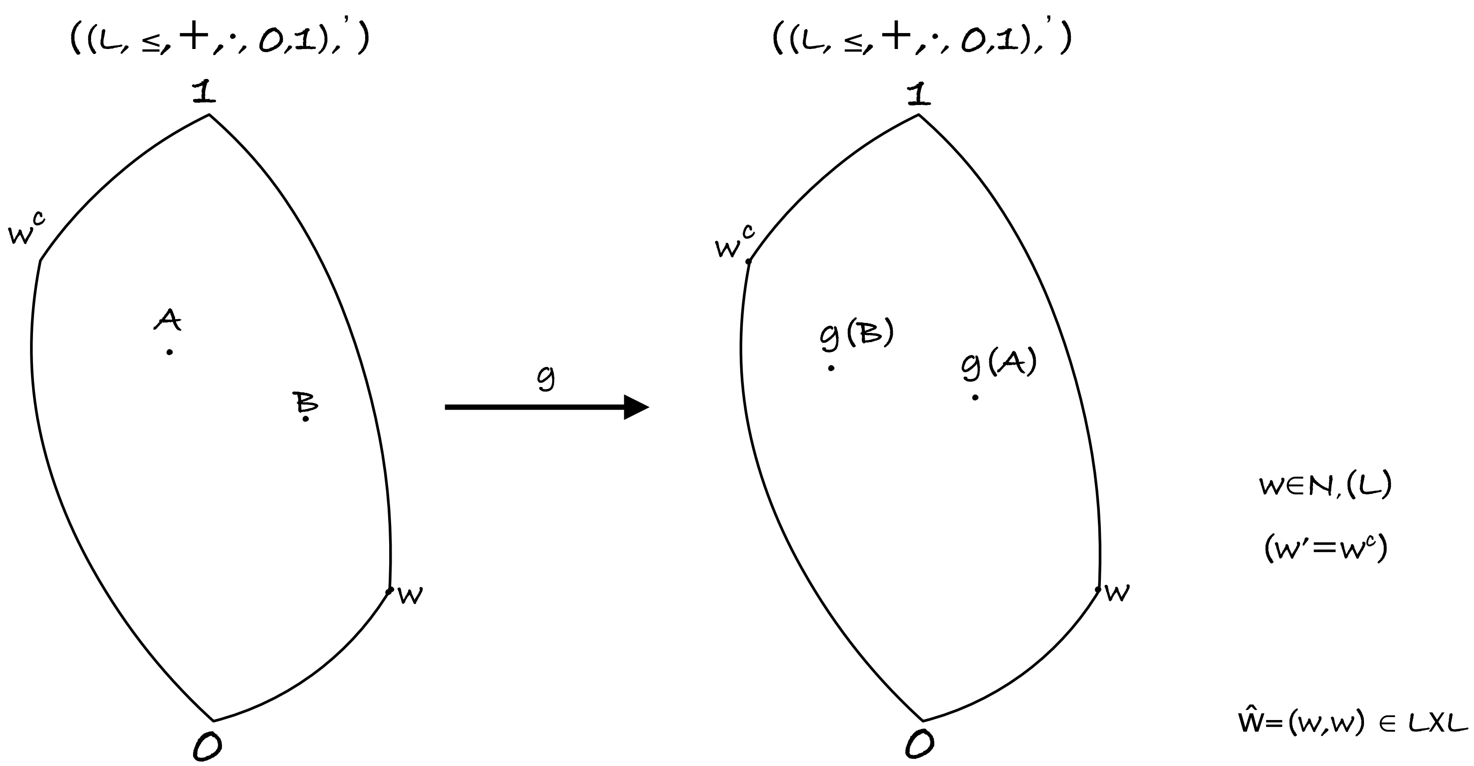
Sea $g:L \to L$ y sea $w \in N_{'}(L)$.

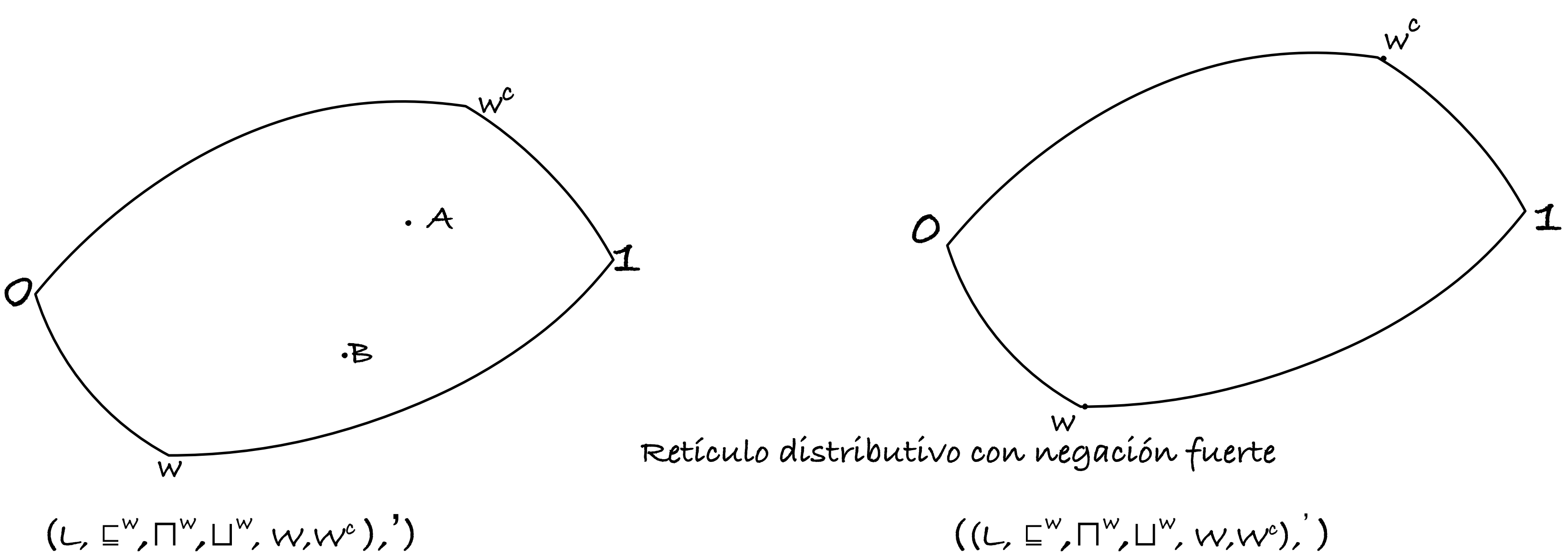
Para $\hat{W} = (w,w) \in L\mathrm{X}L$, la función extensión $\hat{g}_{\hat{W}}:L \to L$ de g al retículo $(L, \sqsubseteq^w)$ responde al siguiente esquema:

$\hat{g}_{\hat{W}} = \varphi_w \circ g \circ \varphi_w$, luego

$\hat{g}_{\hat{W}}(A) = [g(A \triangle W)] \triangle W \quad \forall A \in L,\ \forall w \in N_{'}(L)$

Retículo distributivo con negación fuerte





UN CASO PARTICULAR: $(L_1, \leq_1) = (L_2, \leq_2) = (L, \leq)$ con una negación fuerte $':L \to L$. Sea $N_,(L) \subseteq L$ tal que

$$N_,(L) = \{w \in L \,/\, (w \text{ es complementado}) \,\&\, (w' = w^c)\}$$

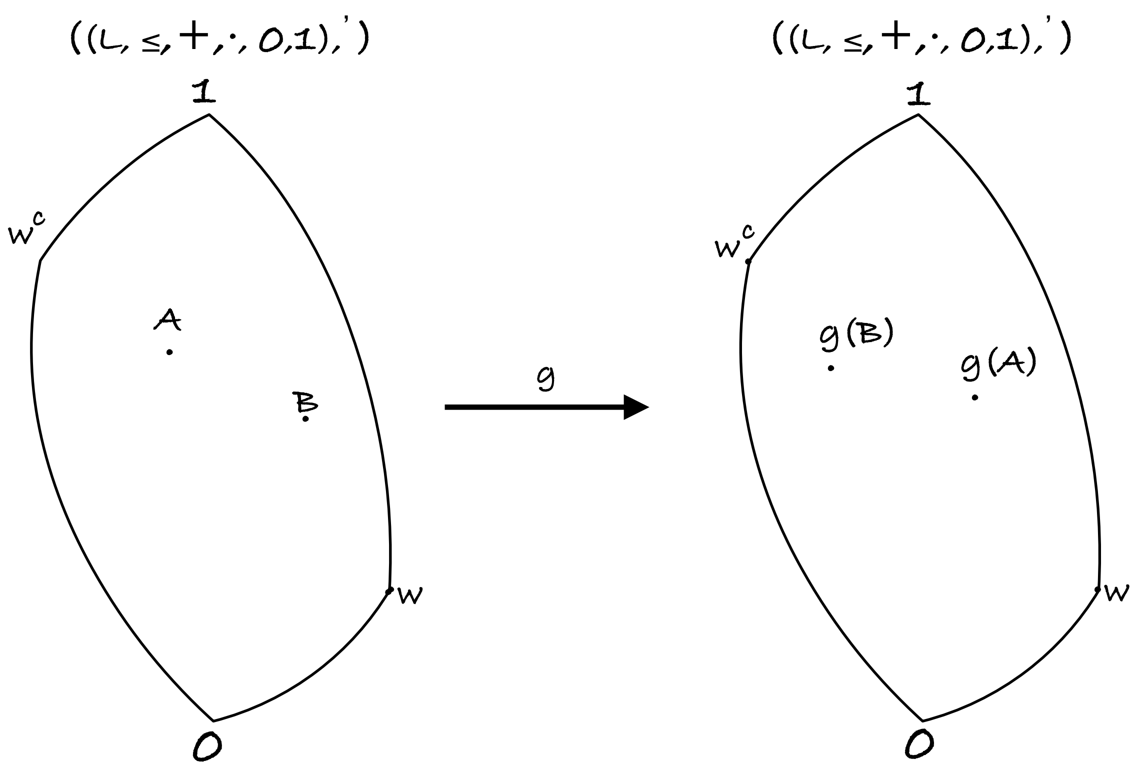
Sea $g: L \to L$ y sea $w \in N_,(L)$.

Para $\hat{W} = (w,w) \in L X L$, la función extensión $\hat{g}_{\hat{W}}: L \to L$ de g al retículo $(L, \sqsubseteq^w)$ responde al siguiente esquema:

$\hat{g}_{\hat{W}} = \varphi_w \circ g \circ \varphi_w$, luego

$\hat{g}_{\hat{W}}(A) = [g(A \triangle W)] \triangle W \quad \forall A \in L,\ \forall w \in N_,(L)$

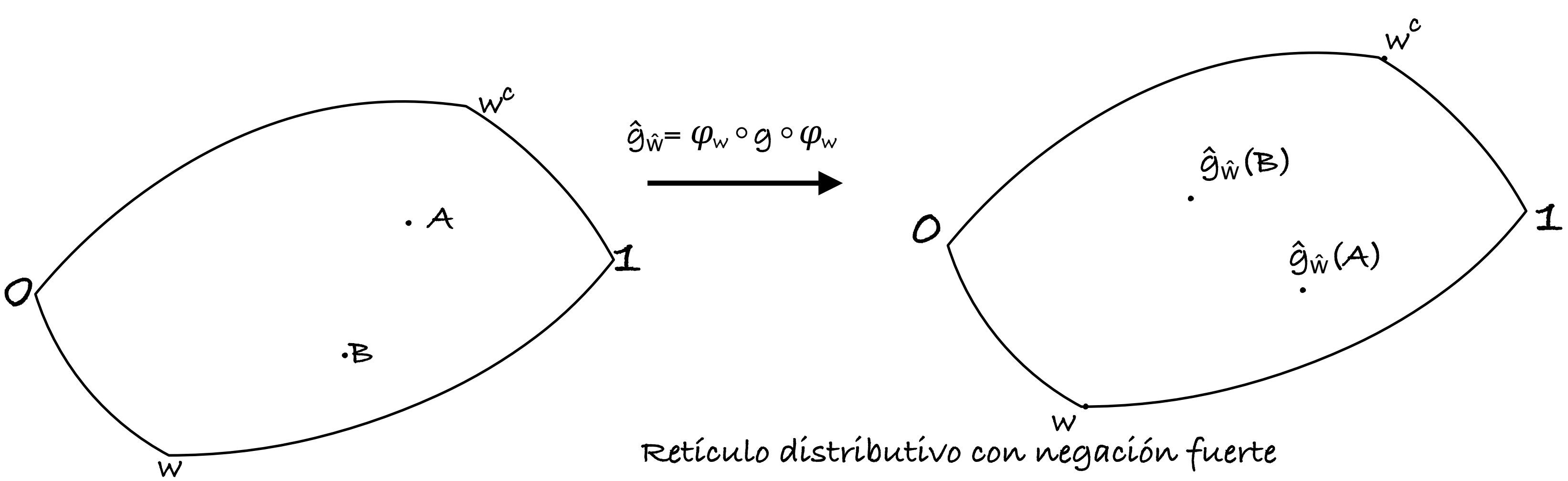
Retículo distributivo con negación fuerte



$w \in N_,(L)$

$(w' = w^c)$

$\hat{W} = (w,w) \in L X L$



Retículo distributivo con negación fuerte

$(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ')$

$((L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ')$

UN CASO PARTICULAR: $(L_1, \leq_1) = (L_2, \leq_2) = (L, \leq)$ con una negación fuerte $':L \to L$. Sea $N'(L) \subseteq L$ tal que

$$N'(L) = \{w \in L \,/\, (w \text{ es complementado}) \,\&\, (w' = w^c)\}$$

Sea $g: L \to L$ y sea $w \in N'(L)$.

Para $\hat{W} = (w,w) \in L \times L$, la función extensión $\hat{g}_{\hat{W}}: L \to L$ de g al retículo $(L, \sqsubseteq^w)$ responde al siguiente esquema:

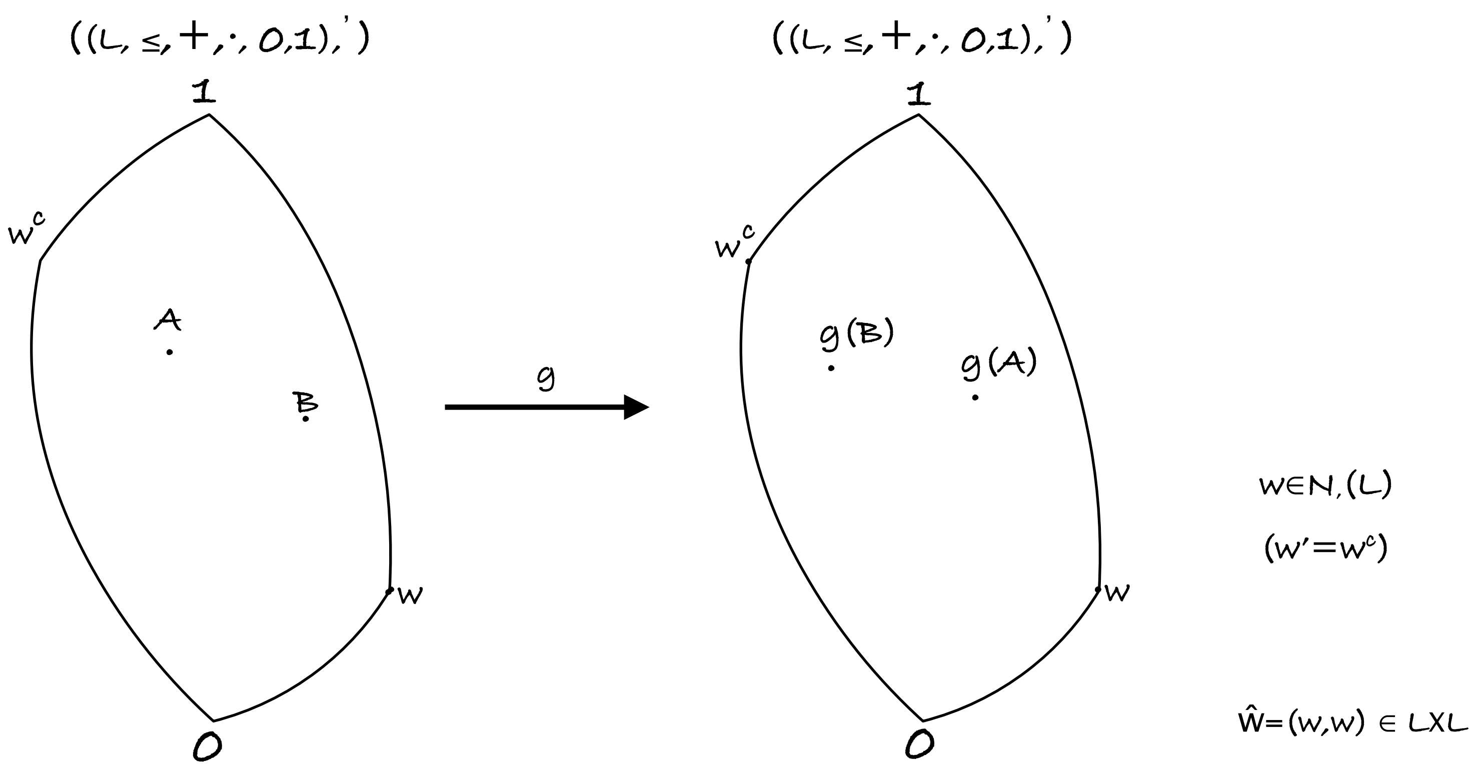
$\hat{g}_{\hat{W}} = \varphi_w \circ g \circ \varphi_w$, luego

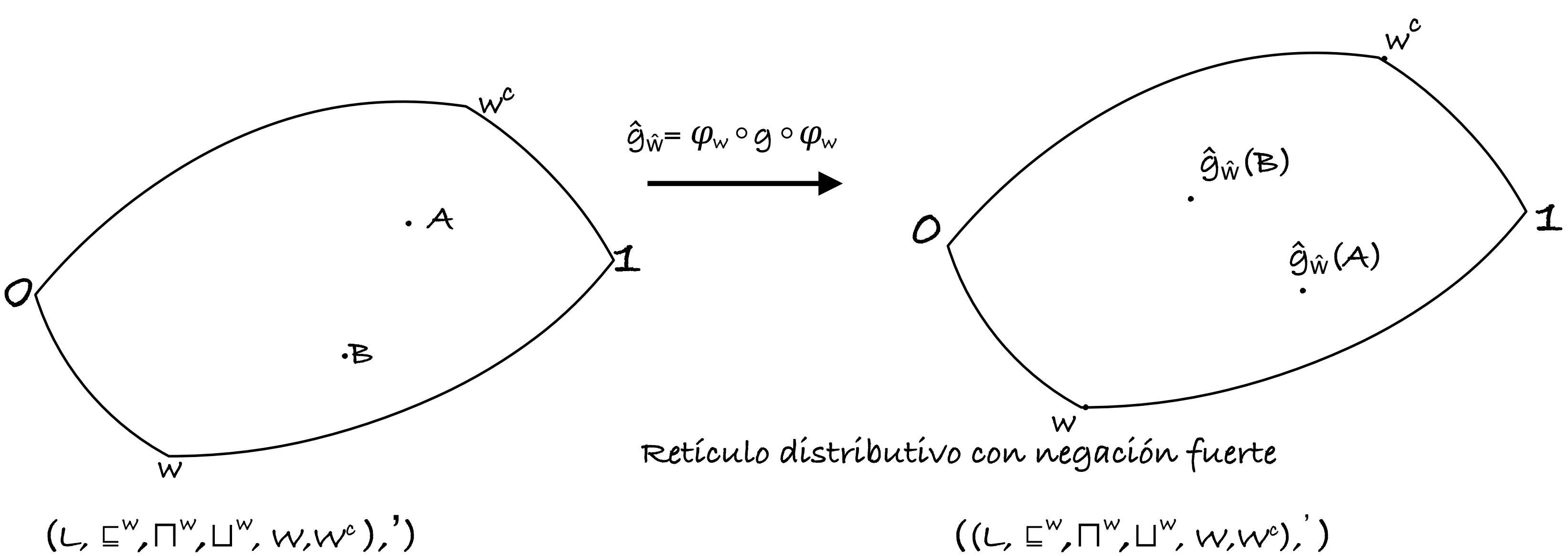
$$\hat{g}_{\hat{W}}(A) = [g(A \triangle w)] \triangle w \quad \forall A \in L,\ \forall w \in N'(L)$$

Si $g = i$, siendo $i: L \to L$ la identidad en L, es evidente que se verifica

$$\hat{i}_w = (\varphi_w \circ i \circ \varphi_w) = i \quad \forall w \in N'(L).$$

Retículo distributivo con negación fuerte





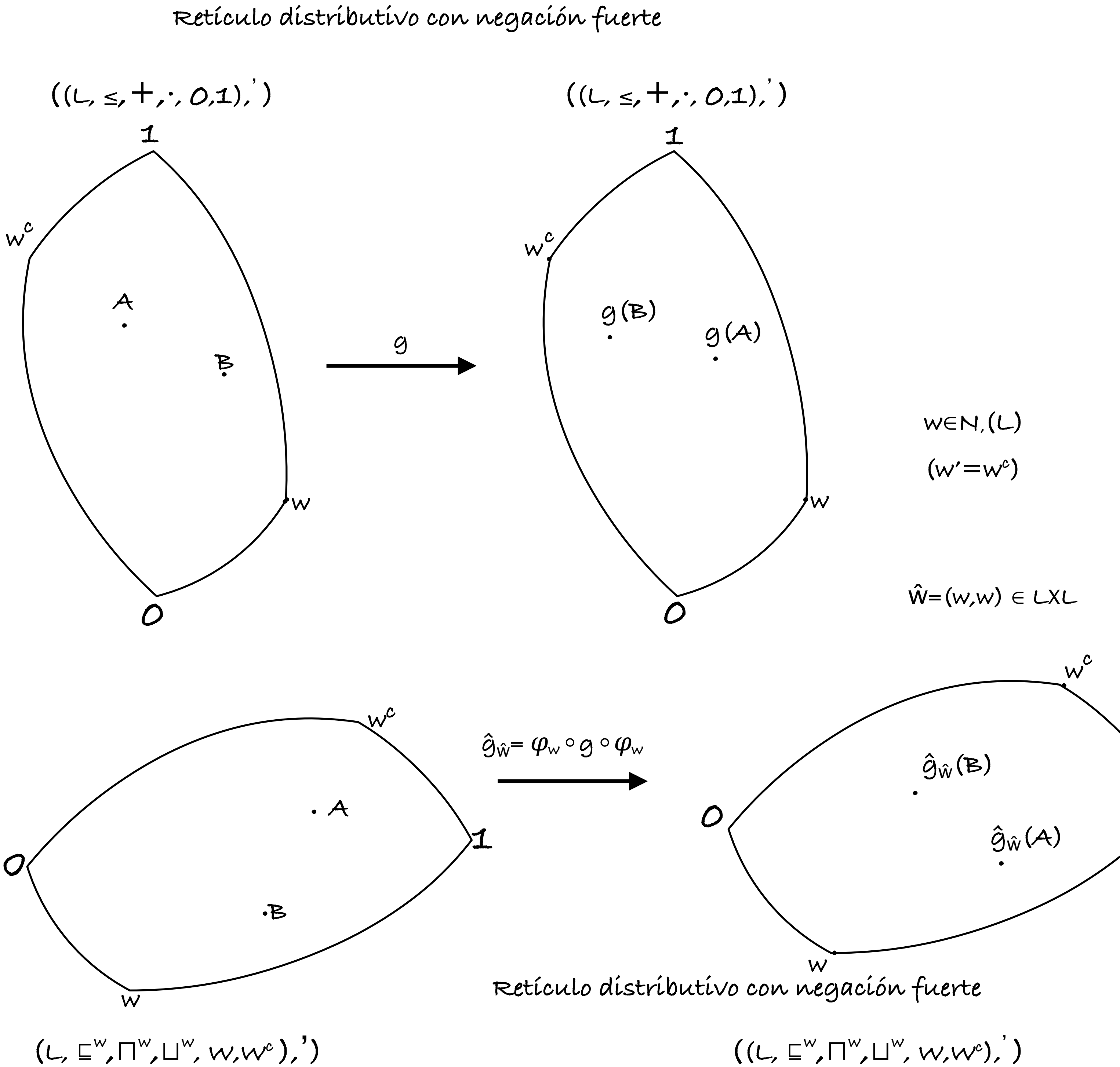
Retículo distributivo con negación fuerte

UN CASO PARTICULAR: $(L_1, \leq_1) = (L_2, \leq_2) = (L, \leq)$ con una negación fuerte $':L \to L$. Sea $N_{,}(L) \subseteq L$ tal que

$$N_{,}(L) = \{w \in L \,/\, (w \text{ es complementado}) \,\&\, (w' = w^c)\}$$

Sea $g: L \to L$ y sea $w \in N_{,}(L)$.

Para $\hat{W} = (w,w) \in L\mathrm{X}L$, la función extensión $\hat{g}_{\hat{W}}: L \to L$ de g al retículo $(L, \sqsubseteq^{w})$ responde al siguiente esquema:



$\hat{g}_{\hat{W}} = \varphi_w \circ g \circ \varphi_w$, luego

$$\hat{g}_{\hat{W}}(A) = [g(A \triangle W)] \triangle W \quad \forall A \in L, \ \forall W \in N_{,}(L)$$

Si $g = i$, siendo $i: L \to L$ la identidad en L, es evidente que se verifica

$$\hat{i}_{W} = (\varphi_w \circ i \circ \varphi_w) = i \quad \forall W \in N_{,}(L).$$

Veamos el caso en que g es una negación fuerte en $(L, \leq)$.

Proposición. Si L es distributivo y si $W \in N_{,}(L)$ entonces se verifica:

$$(A \triangle W)' = (A' \triangle W) \quad \forall A \in L$$

Demostración. $(A \triangle W)' = (A \cdot W^c + A' \cdot W)' =$
$(A' + W) \cdot (A + W^c) = A' \cdot A + A' \cdot W^c + A \cdot W + W \cdot W^c$
$= A' \cdot A \cdot 1 + A' \cdot W^c + A \cdot W + 0 =$
$A' \cdot A \cdot (W + W^c) + A' \cdot W^c + A \cdot W =$
$A' \cdot A \cdot W + A' \cdot A \cdot W^c + A' \cdot W^c + A \cdot W =$
$(A' \cdot A \cdot W + A \cdot W) + (A' \cdot A \cdot W^c + A' \cdot W^c) =$
$(A \cdot W + A' \cdot W^c) = (A' \triangle W)$. ∎

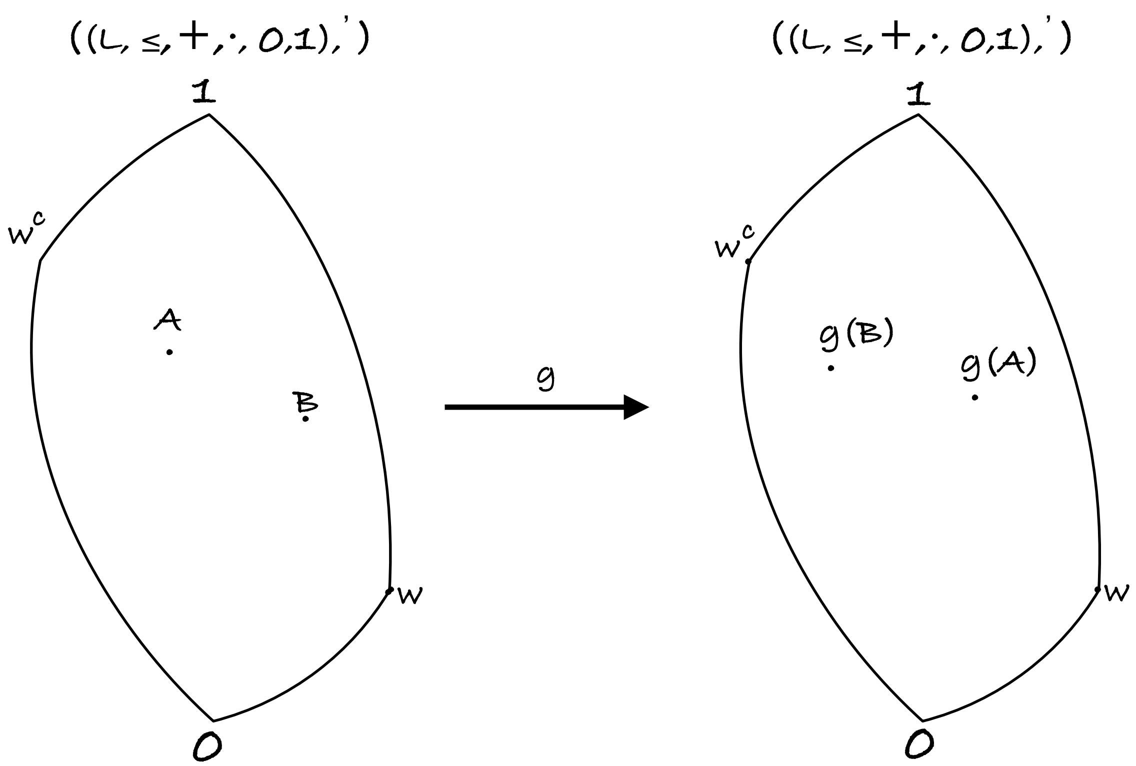
UN CASO PARTICULAR: $(L_1, \leq_1) = (L_2, \leq_2) = (L, \leq)$ con una negación fuerte $':L \rightarrow L$. Sea $N'(L) \subseteq L$ tal que

$$N'(L) = \{w \in L \,/\, (w \text{ es complementado}) \,\&\, (w' = w^c)\}$$

Sea $g:L \rightarrow L$ y sea $w \in N'(L)$.

Para $\hat{w} = (w,w) \in L \times L$, la función extensión $\hat{g}_{\hat{w}}: L \rightarrow L$ de g al retículo $(L, \sqsubseteq^w)$ responde al siguiente esquema:

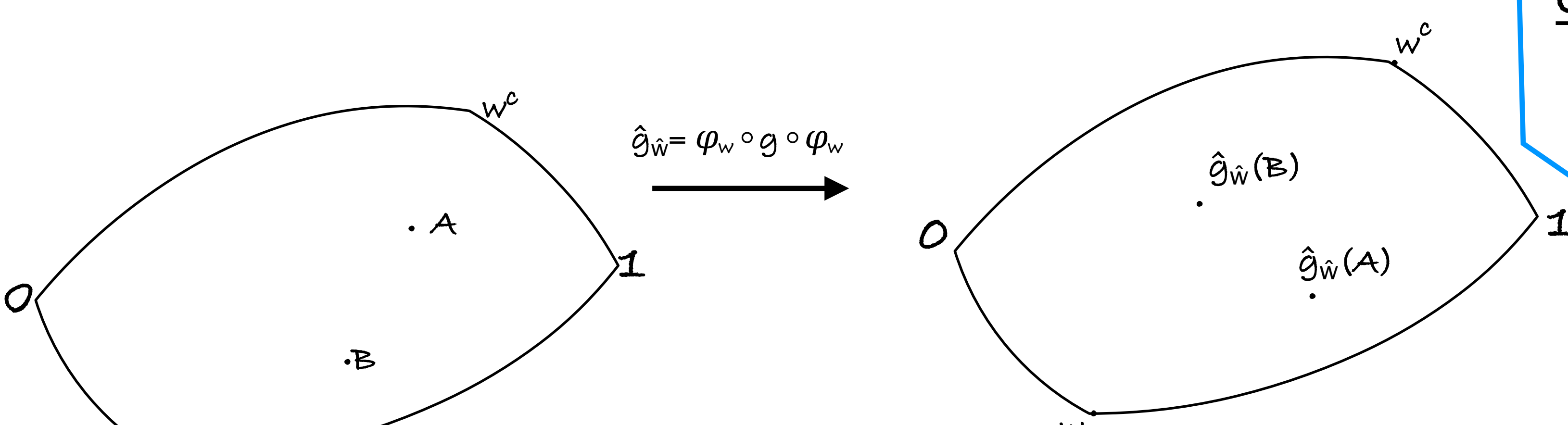
Retículo distributivo con negación fuerte



$w \in N'(L)$

$(w' = w^c)$

$\hat{w} = (w,w) \in L \times L$



Retículo distributivo con negación fuerte

$(L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ')$

$((L, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ')$

$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_w \circ g \circ \varphi_w$, luego

$\hat{g}_{\hat{w}}(A) = [g(A \triangle W)] \triangle W \quad \forall A \in L, \forall W \in N'(L)$

Si $g = i$, siendo $i:L \rightarrow L$ la identidad en L, es evidente que se verifica

$$\hat{i}_w = (\varphi_w \circ i \circ \varphi_w) = i \quad \forall W \in N'(L).$$

Veamos el caso en que g es una negación fuerte en $(L, \leq)$.

Proposición. Si L es distributivo y si $W \in N'(L)$ entonces se verifica:

$$(A \triangle W)' = (A' \triangle W) \quad \forall A \in L$$

Demostración. $(A \triangle W)' = (A \cdot W^c + A' \cdot W)' =$
$(A' + W) \cdot (A + W^c) = A' \cdot A + A' \cdot W^c + A \cdot W + W \cdot W^c$
$= A' \cdot A \cdot 1 + A' \cdot W^c + A \cdot W + 0 =$
$A' \cdot A \cdot (W + W^c) + A' \cdot W^c + A \cdot W =$
$A' \cdot A \cdot W + A' \cdot A \cdot W^c + A' \cdot W^c + A \cdot W =$
$(A' \cdot A \cdot W + A \cdot W) + (A' \cdot A \cdot W^c + A' \cdot W^c) =$
$(A \cdot W + A' \cdot W^c) = (A' \triangle W).$ ∎

Corolario. Si g es una negación fuerte $':L \rightarrow L$, entonces:

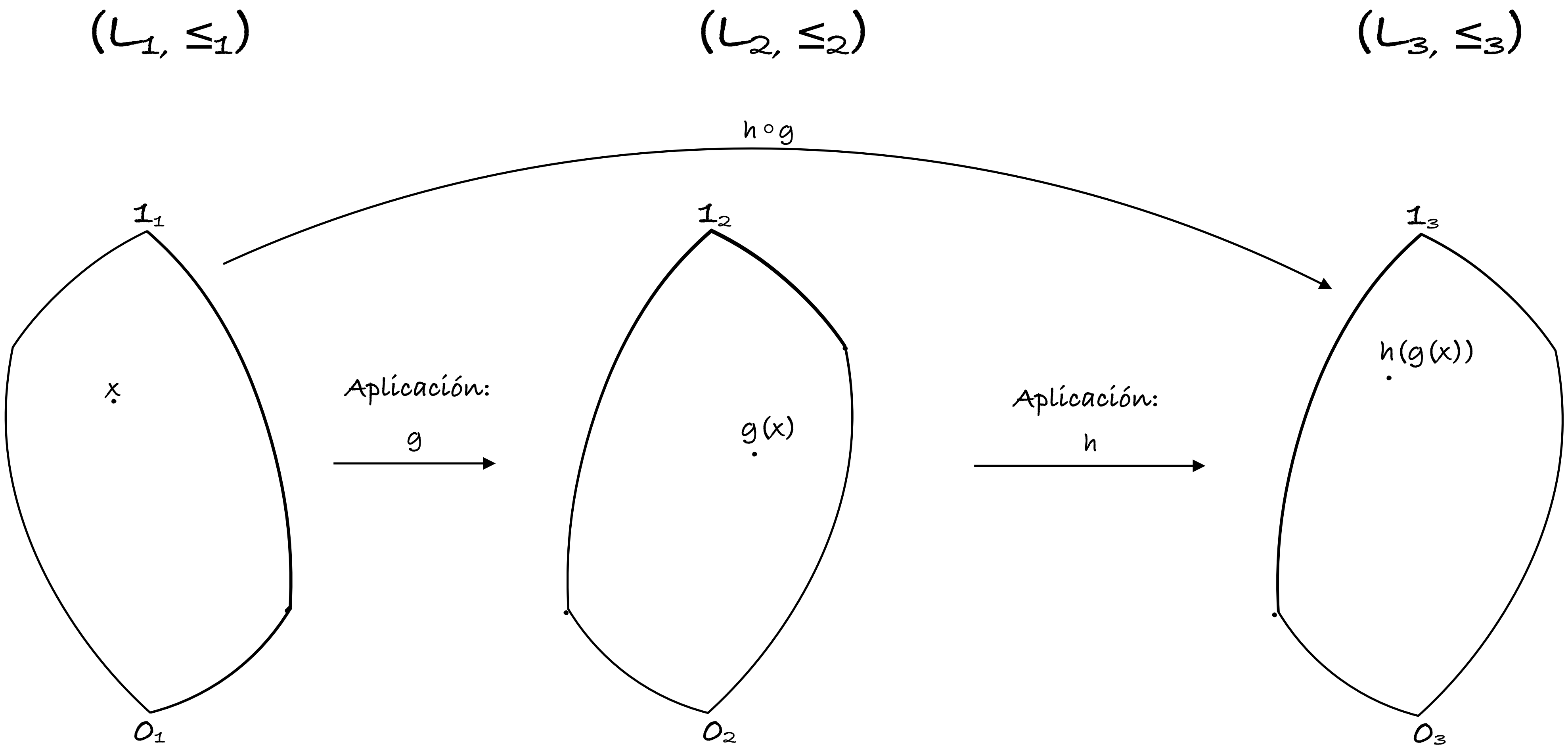
$$\hat{g}_{\hat{w}} = \hat{(')}_{\hat{w}} = (\varphi_w \circ (') \circ \varphi_w) = (') \quad \forall W \in N'(L)$$

Demostración. $\hat{g}_{\hat{w}}(A) = (A)^{\hat{(')}}{}_{\hat{w}} =$
$(A \triangle W)' \triangle W = (A' \triangle W) \triangle W = A'.$ ∎

La composición de la funciones $\hat{g}_{\hat{W}_{21}}$ y $\hat{h}_{\hat{W}_{32}}$ entre retículos $(L_i, \sqsubseteq^{W_i})$, $(i=1,2,3)$, en función de las correspondientes funciones g y h entre los retículos $(L_i, \leq_i)$, $(i=1,2,3)$.

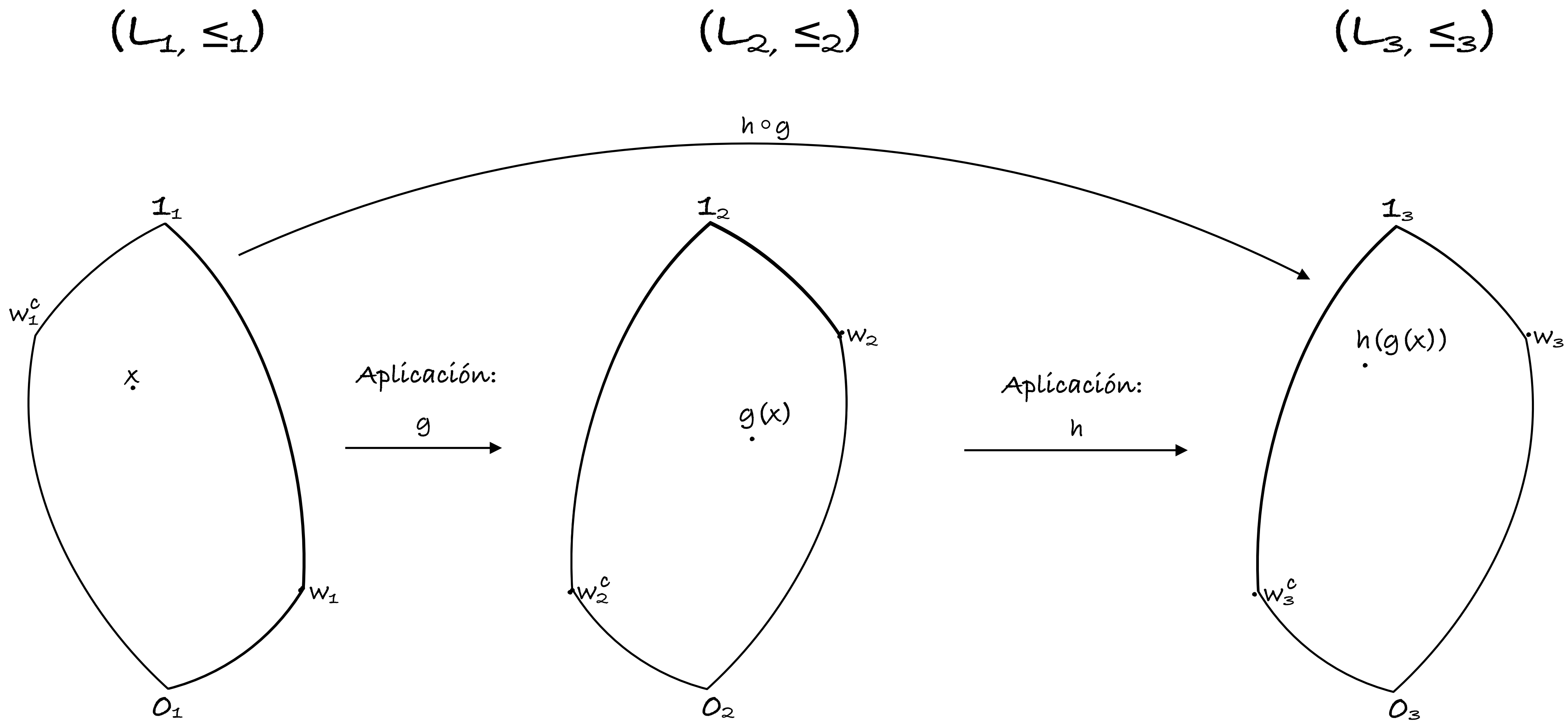
Álgebras de Heyting L_i completas con una negación fuerte $'_2$, un nítido fijo w_i y un operador diferencia Δ_i:

$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$ $(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$ $(L_3, \leq_3, \cdot_3, +_3, 0_3, 1_2), '_3, w_3, \Delta_3)$



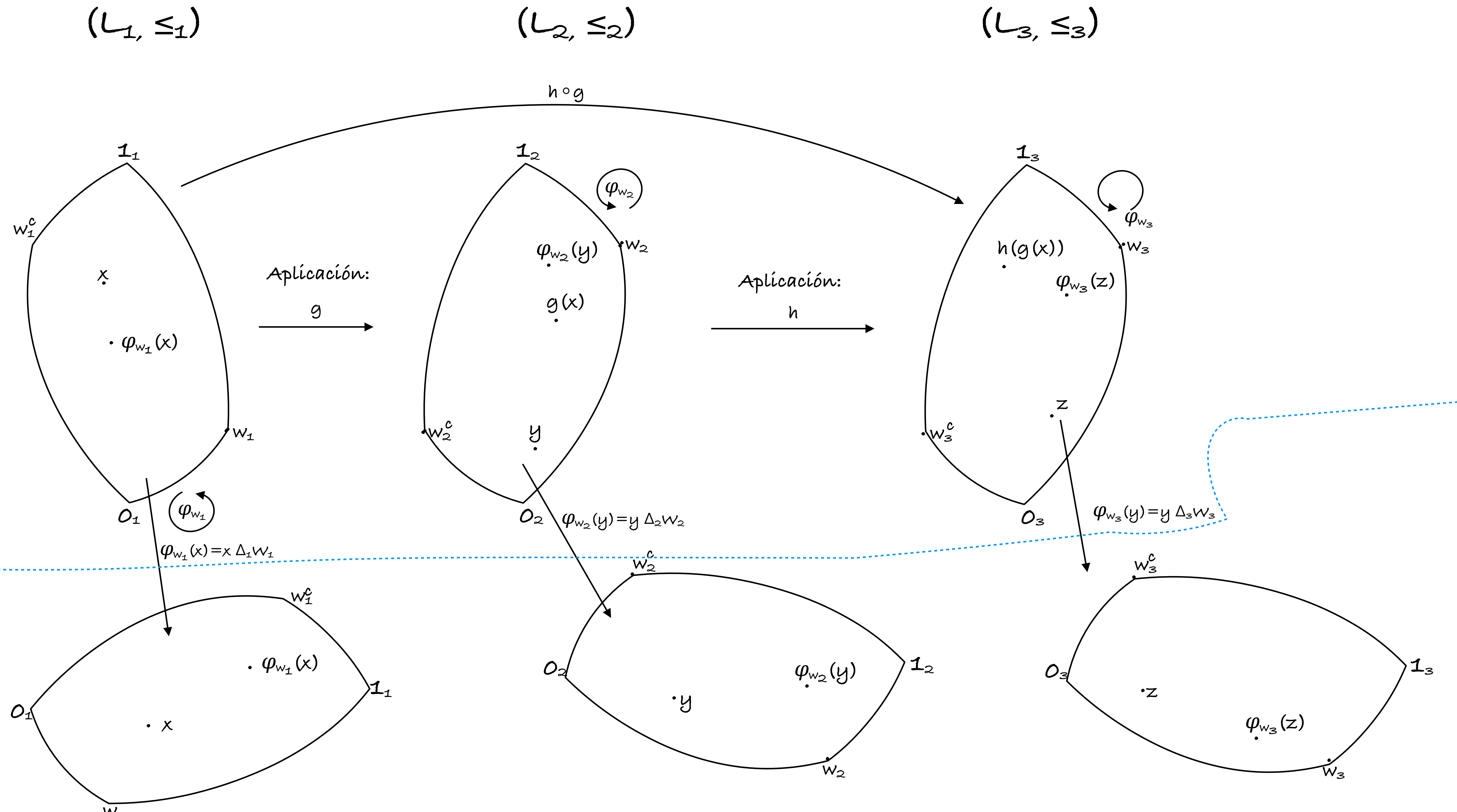
Álgebras de Heyting L_i completas con una negación fuerte $'_2$, un nítido fijo w_i y un operador diferencia Δ_i:

$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$ $(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$ $(L_3, \leq_3, \cdot_3, +_3, 0_3, 1_2), '_3, w_3, \Delta_3)$



Álgebras de Heyting L_i completas con una negación fuerte $'_2$, un nítido fijo w_i y un operador diferencia Δ_i:

$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$ $(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$ $(L_3, \leq_3, \cdot_3, +_3, 0_3, 1_2), '_3, w_3, \Delta_3)$

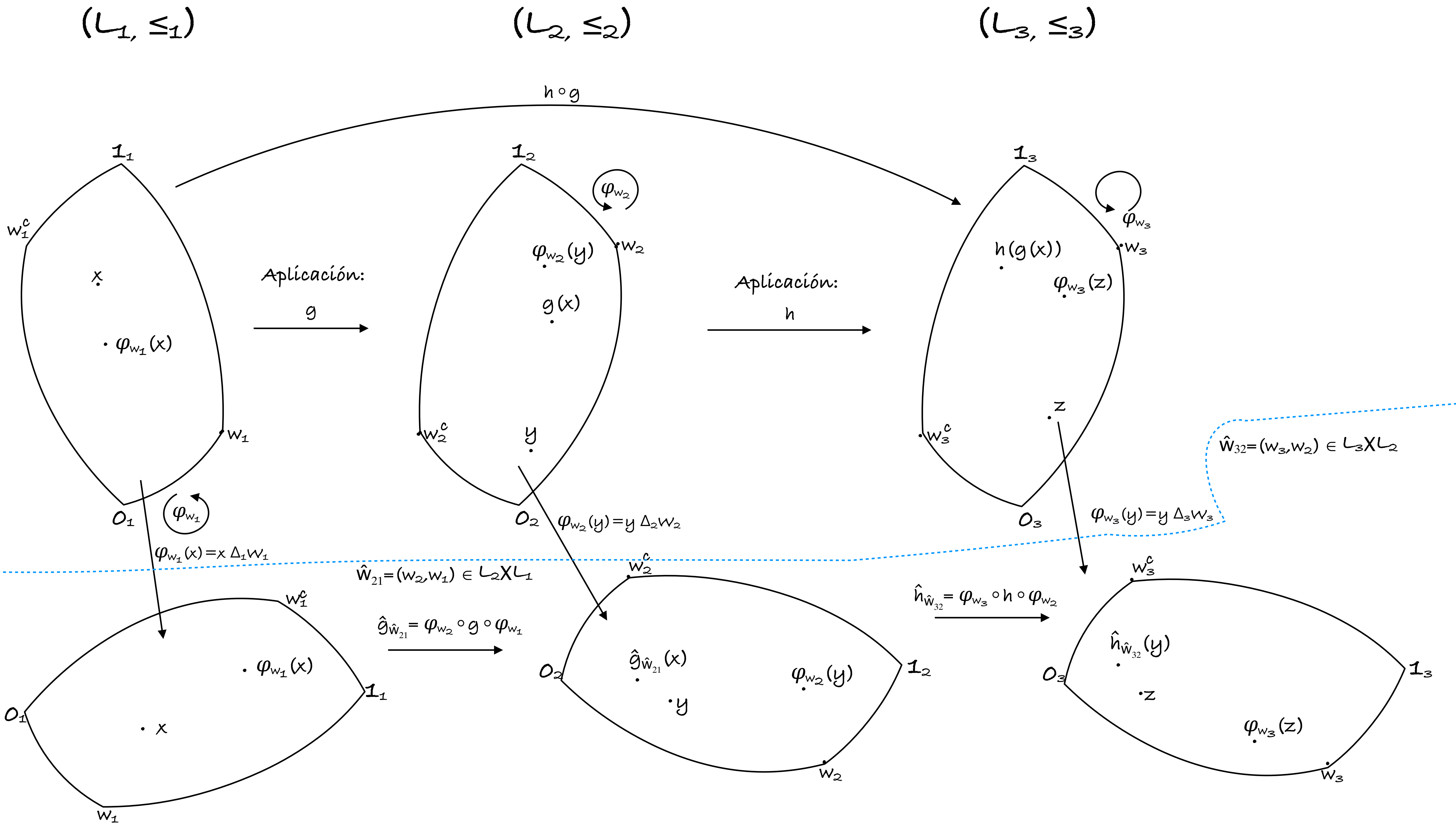


Nuevas álgebras de Heyting completas con las mismas negaciones

$((L_1, \sqsubseteq^{w_1}, \sqcap^{w_1}, \sqcup^{w_1}, w_1, w_1^c), '_1)$ $((L_2, \sqsubseteq^{w_2}, \sqcap^{w_2}, \sqcup^{w_2}, w_2, w_2^c), '_2)$ $((L_3, \sqsubseteq^{w_3}, \sqcap^{w_3}, \sqcup^{w_3}, w_3, w_3^c), '_3)$

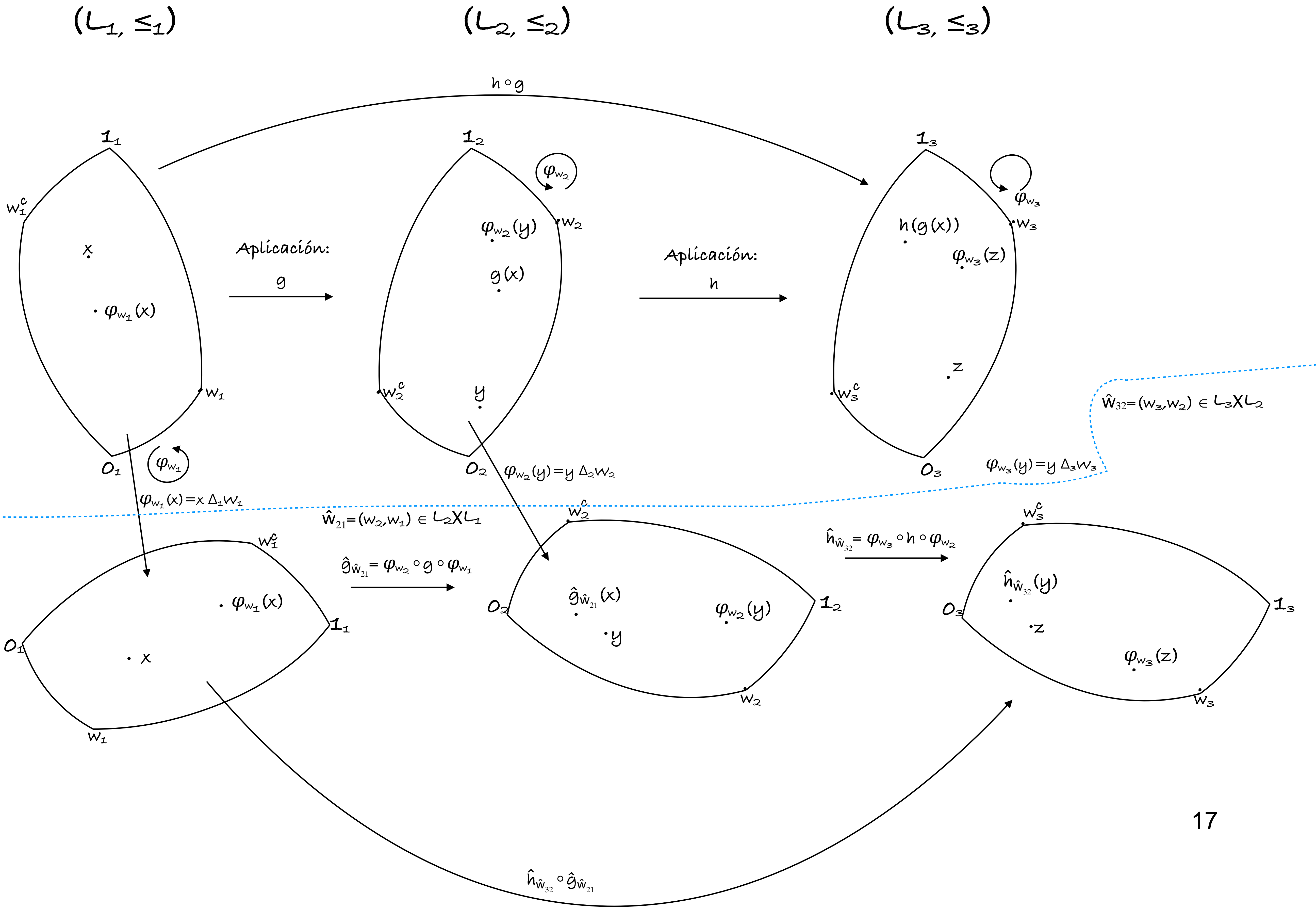
Álgebras de Heyting L_i completas con una negación fuerte $'_2$, un nítido fijo w_i y un operador diferencia Δ_i:

$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$ $(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$ $(L_3, \leq_3, \cdot_3, +_3, 0_3, 1_2), '_3, w_3, \Delta_3)$



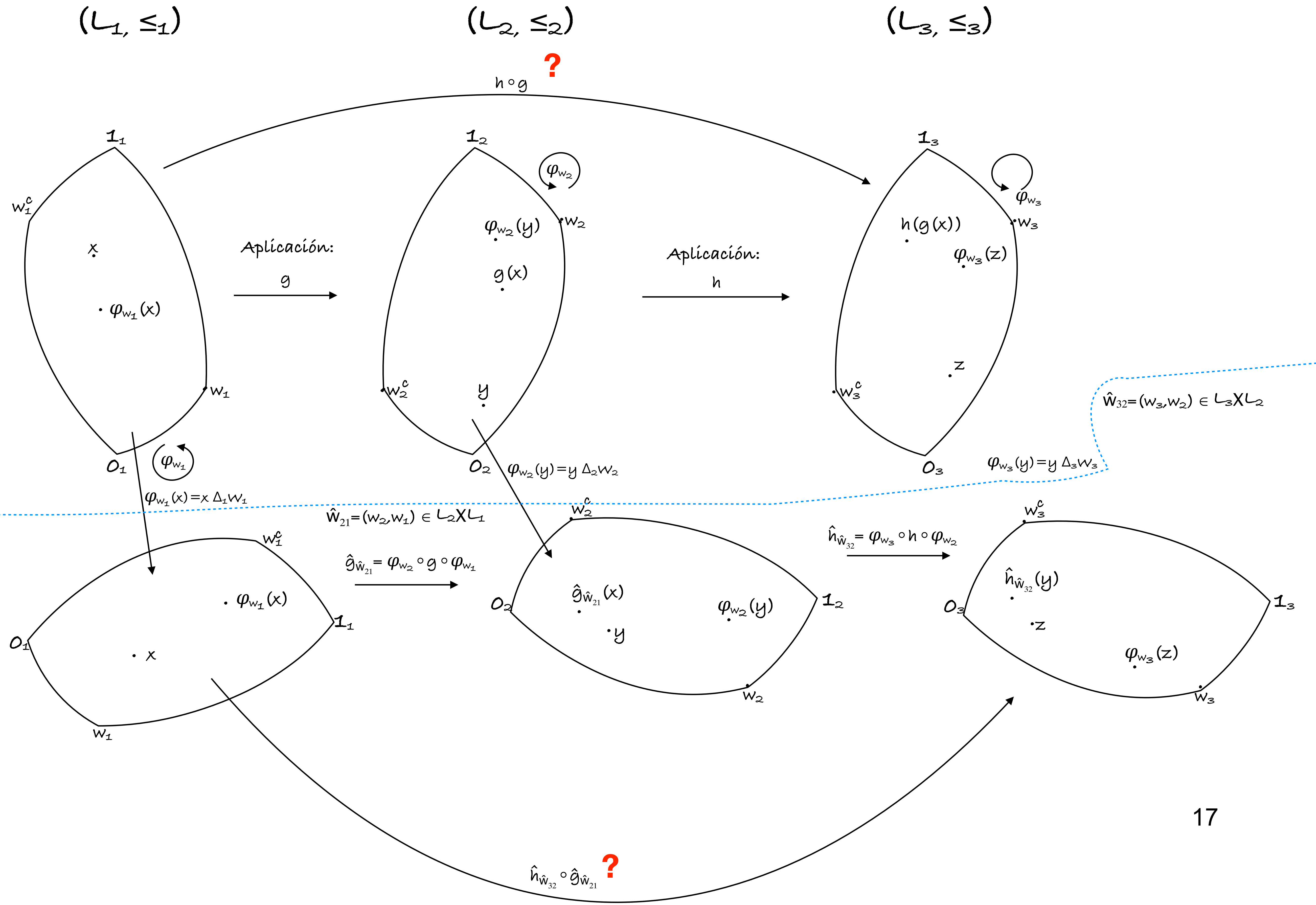
Álgebras de Heyting L_i completas con una negación fuerte $'_2$, un nítido fijo w_i y un operador diferencia Δ_i:

$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$ $(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$ $(L_3, \leq_3, \cdot_3, +_3, 0_3, 1_2), '_3, w_3, \Delta_3)$



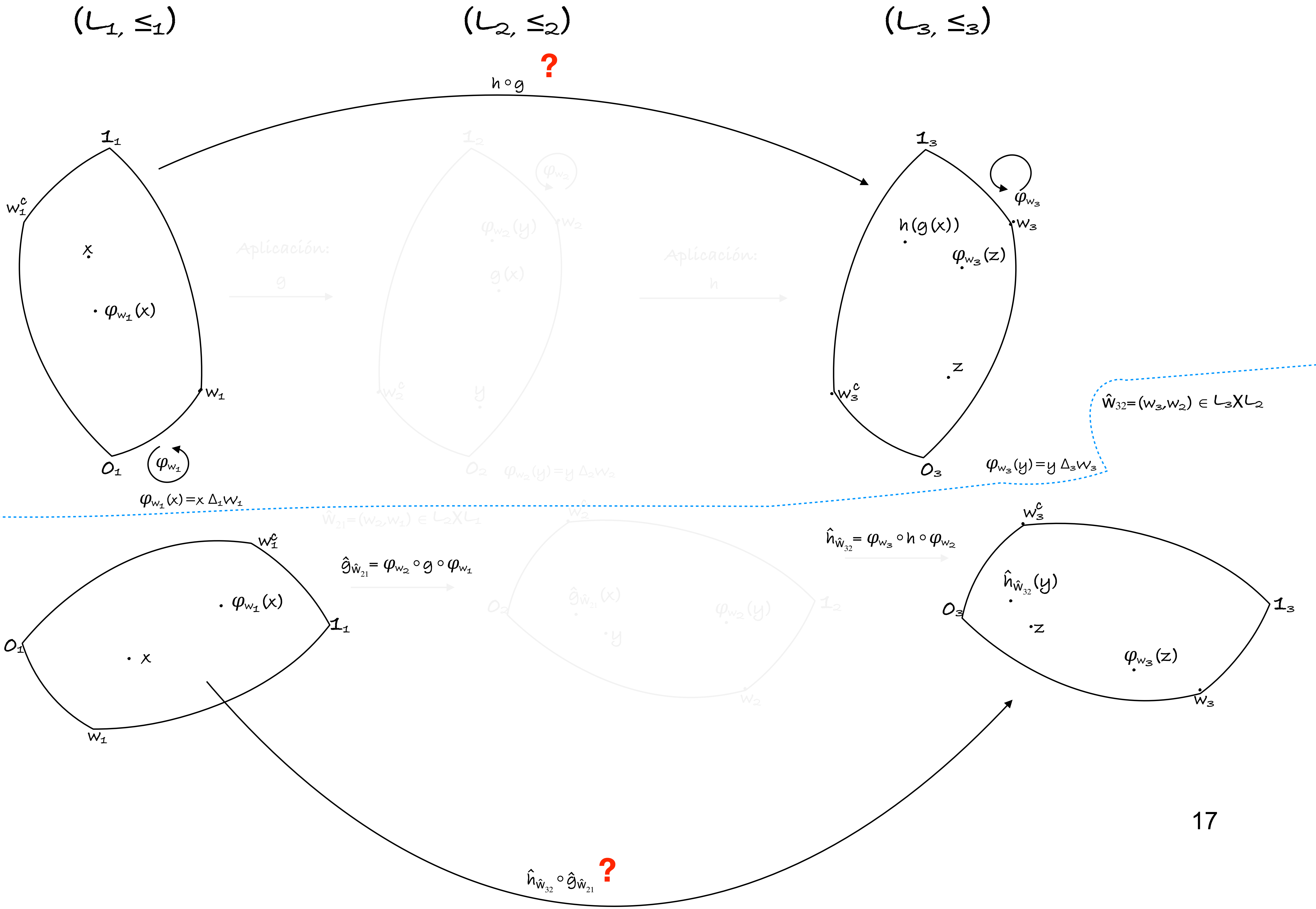
Álgebras de Heyting L_i completas con una negación fuerte $'_2$, un nítido fijo w_i y un operador diferencia Δ_i:

$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$ $(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$ $(L_3, \leq_3, \cdot_3, +_3, 0_3, 1_2), '_3, w_3, \Delta_3)$



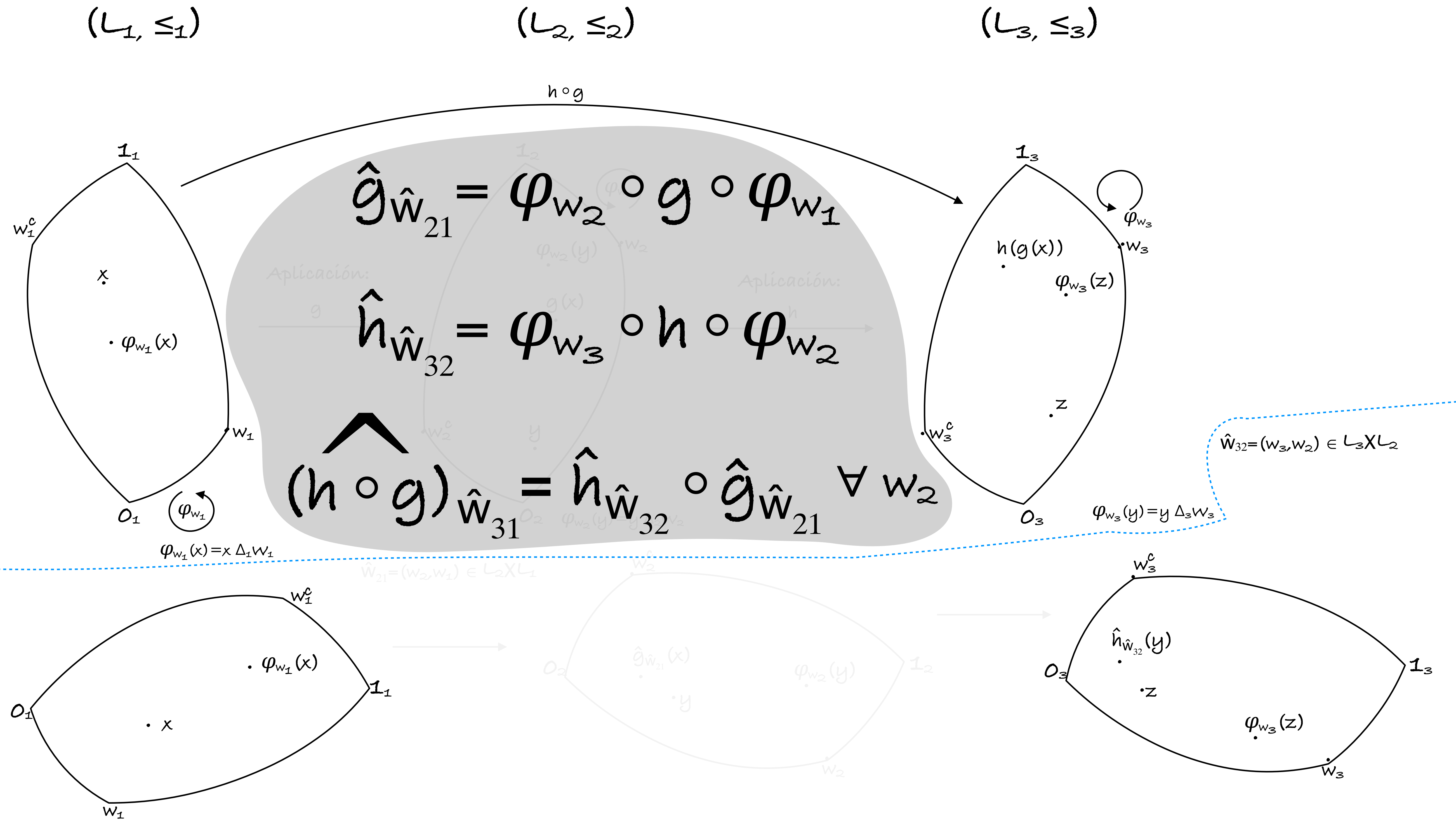
Álgebras de Heyting L_i completas con una negación fuerte $'_2$, un nítido fijo w_i y un operador diferencia Δ_i:

$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$ $(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$ $(L_3, \leq_3, \cdot_3, +_3, 0_3, 1_2), '_3, w_3, \Delta_3)$



Álgebras de Heyting L_i completas con una negación fuerte $'_2$, un nítido fijo w_i y un operador diferencia Δ_i:

$(L_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1), '_1, w_1, \Delta_1)$ $(L_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2), '_2, w_2, \Delta_2)$ $(L_3, \leq_3, \cdot_3, +_3, 0_3, 1_2), '_3, w_3, \Delta_3)$



$$\hat{g}_{\hat{w}_{21}} = \varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1}$$

$$\hat{h}_{\hat{w}_{32}} = \varphi_{w_3} \circ h \circ \varphi_{w_2}$$

$$\widehat{(h \circ g)}_{\hat{w}_{31}} = \hat{h}_{\hat{w}_{32}} \circ \hat{g}_{\hat{w}_{21}} \quad \forall\, w_2$$

Morfología Matemática en $(\mathcal{P}(X), \sqsubseteq^{W})$

Operadores morfológicos asociados al orden $\sqsubseteq^{w}$

$((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ retículo broweriano completo con una negación fuerte.

Operadores morfológicos asociados al orden $\sqsubseteq^w$

$((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ retículo broweriano completo con una negación fuerte.

Sea $w \in \mathcal{L}$ complementado y tal que $w' = w^c$.

Consideremos la aplicación $\varphi_w: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ tal que $\varphi_w(x) = x \,\Delta\, w = x \cdot w^c + x' \cdot w \quad \forall x \in \mathcal{L}$.

Esta aplicación es una involución: $\varphi_w^2 = i$ (i la identidad en $\mathcal{L}$). Por lo tanto es biyectiva tal que $\varphi_w^{-1} = \varphi_w$.

Sea $\sqsubseteq^w$ es la relación en $\mathcal{L}$ tal que $(x \sqsubseteq^w y) \Leftrightarrow (y \cdot w \leq x \leq y + w)$. Al ser $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ retículo distributivo, se verifica que $\sqsubseteq^w$ es una relación de orden: el orden de actividad asociado a w.

Se verifica que $(x \leq y) \Leftrightarrow [\varphi_w(x) \sqsubseteq^w \varphi_w(x)]$ y en consecuencia, $(x \sqsubseteq^w y) \Leftrightarrow [\varphi_w(x) \leq \varphi_w(x)]$.

$(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w)$ resulta ser retículo isomorfo al inicial $(\mathcal{L}, \leq)$, (siendo $\varphi_w: (\mathcal{L}, \leq) \to (\mathcal{L}, \sqsubseteq^w)$ isomorfismo entre retículos). En consecuencia, $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c)$ también es broweriano completo con mínimo w y máximo w^c y siendo los operadores ínfimo $x \sqcap^w y = x \cdot y + w \cdot (x + y)$ y supremo $x \sqcup^w y = x \cdot y + w^c \cdot (x + y) \quad \forall (x, y) \in \mathcal{L}^2$.

El isomorfismo verifica $\varphi_w(x') = [\varphi_w(x)]' \ \forall x \in \mathcal{L}$ y la aplicación $': \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ también es negación fuerte en el retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c)$.

Operadores morfológicos asociados al orden $\sqsubseteq^{w}$

$((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ retículo broweriano completo con una negación fuerte.

Sea $w \in \mathcal{L}$ complementado y tal que $w' = w^c$.

Consideremos la aplicación $\varphi_w : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ tal que $\varphi_w(x) = x \,\Delta\, w = x \cdot w^c + x' \cdot w \quad \forall x \in \mathcal{L}$.

Esta aplicación es una involución: $\varphi_w^{\,2} = i$ (i la identidad en $\mathcal{L}$). Por lo tanto es biyectiva tal que $\varphi_w^{-1} = \varphi_w$.

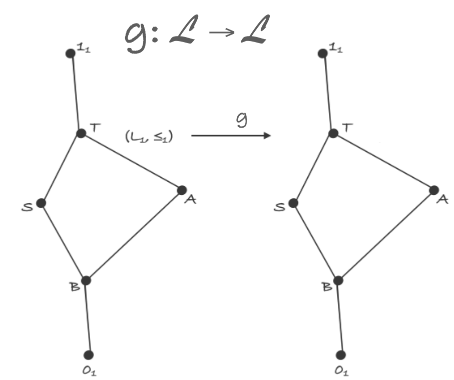
Sea $\sqsubseteq^{w}$ es la relación en $\mathcal{L}$ tal que $(x \sqsubseteq^{w} y) \Leftrightarrow (y \cdot w \leq x \leq y + w)$. Al ser $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ retículo distributivo, se verifica que $\sqsubseteq^{w}$ es una relación de orden: el orden de actividad asociado a w.

Se verifica que $(x \leq y) \Leftrightarrow [\varphi_w(x) \sqsubseteq^{w} \varphi_w(x)]$ y en consecuencia, $(x \sqsubseteq^{w} y) \Leftrightarrow [\varphi_w(x) \leq \varphi_w(x)]$.

$(\mathcal{L}, \sqsubseteq^{w})$ resulta ser retículo isomorfo al inicial $(\mathcal{L}, \leq)$, (siendo $\varphi_w : (\mathcal{L}, \leq) \rightarrow (\mathcal{L}, \sqsubseteq^{w})$ isomorfismo entre retículos). En consecuencia, $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^{w}, \sqcap^{w}, \sqcup^{w}, w, w^c)$ también es broweriano completo con mínimo w y máximo w^c y siendo los operadores ínfimo $x \sqcap^{w} y = x \cdot y + w \cdot (x+y)$ y supremo $x \sqcup^{w} y = x \cdot y + w^c \cdot (x+y) \quad \forall (x,y) \in \mathcal{L}^2$.

El isomorfismo verifica $\varphi_w(x') = [\varphi_w(x)]' \ \forall x \in \mathcal{L}$ y la aplicación $' : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$ también es negación fuerte en el retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^{w}, \sqcap^{w}, \sqcup^{w}, w, w^c)$.

Definición. Sea $g : \mathcal{L} \rightarrow \mathcal{L}$.



Operadores morfológicos asociados al orden $\sqsubseteq^{w}$

$((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ retículo broweriano completo con una negación fuerte.

Sea $w \in \mathcal{L}$ complementado y tal que $w' = w^{c}$.

Consideremos la aplicación $\varphi_w: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ tal que $\varphi_w(x) = x \,\Delta\, w = x \cdot w^{c} + x' \cdot w \quad \forall x \in \mathcal{L}$.

Esta aplicación es una involución: $\varphi_w^{2} = i$ (i la identidad en $\mathcal{L}$). Por lo tanto es biyectiva tal que $\varphi_w^{-1} = \varphi_w$.

Sea $\sqsubseteq^{w}$ es la relación en $\mathcal{L}$ tal que $(x \sqsubseteq^{w} y) \Leftrightarrow (y \cdot w \leq x \leq y + w)$. Al ser $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ retículo distributivo, se verifica que $\sqsubseteq^{w}$ es una relación de orden: el orden de actividad asociado a w.

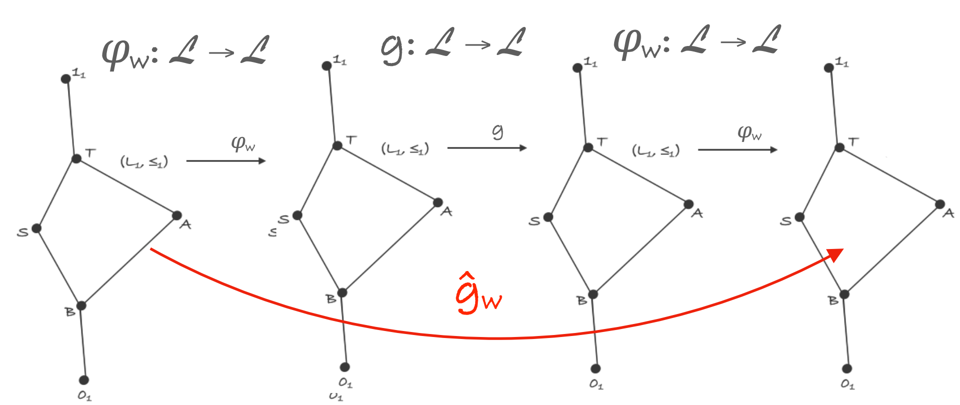
Se verifica que $(x \leq y) \Leftrightarrow [\varphi_w(x) \sqsubseteq^{w} \varphi_w(x)]$ y en consecuencia, $(x \sqsubseteq^{w} y) \Leftrightarrow [\varphi_w(x) \leq \varphi_w(x)]$.

$(\mathcal{L}, \sqsubseteq^{w})$ resulta ser retículo isomorfo al inicial $(\mathcal{L}, \leq)$, (siendo $\varphi_w: (\mathcal{L}, \leq) \to (\mathcal{L}, \sqsubseteq^{w})$ isomorfismo entre retículos). En consecuencia, $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^{w}, \sqcap^{w}, \sqcup^{w}, w, w^{c})$ también es broweriano completo con mínimo w y máximo w^{c} y siendo los operadores ínfimo $x \sqcap^{w} y = x \cdot y + w \cdot (x + y)$ y supremo $x \sqcup^{w} y = x \cdot y + w^{c} \cdot (x + y) \quad \forall (x, y) \in \mathcal{L}^{2}$.

El isomorfismo verifica $\varphi_w(x') = [\varphi_w(x)]' \ \forall x \in \mathcal{L}$ y la aplicación $': \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ también es negación fuerte en el retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^{w}, \sqcap^{w}, \sqcup^{w}, w, w^{c})$.

<u>Definición</u>. Sea $g: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$. Definimos la aplicación asociada $\hat{g}_w: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ mediante: $\hat{g}_w = \varphi_w \circ g \circ \varphi_w$, es decir

$\hat{g}_w(x) = \varphi_w(g(\varphi_w(x))) \quad \forall x \in \mathcal{L}$.



Operadores morfológicos asociados al orden $\sqsubseteq^w$

$((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ retículo broweriano completo con una negación fuerte.

Sea $w \in \mathcal{L}$ complementado y tal que $w' = w^c$.

Consideremos la aplicación $\varphi_w: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ tal que $\varphi_w(x) = x \,\Delta\, w = x \cdot w^c + x' \cdot w \quad \forall x \in \mathcal{L}$.

Esta aplicación es una involución: $\varphi_w^2 = i$ (i la identidad en $\mathcal{L}$). Por lo tanto es biyectiva tal que $\varphi_w^{-1} = \varphi_w$.

Sea $\sqsubseteq^w$ es la relación en $\mathcal{L}$ tal que $(x \sqsubseteq^w y) \Leftrightarrow (y \cdot w \leq x \leq y + w)$. Al ser $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$ retículo distributivo, se verifica que $\sqsubseteq^w$ es una relación de orden: el orden de actividad asociado a w.

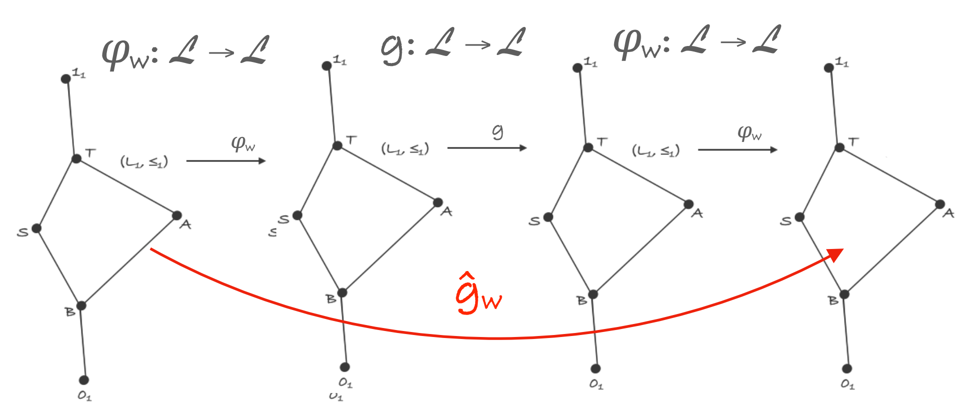
Se verifica que $(x \leq y) \Leftrightarrow [\varphi_w(x) \sqsubseteq^w \varphi_w(x)]$ y en consecuencia, $(x \sqsubseteq^w y) \Leftrightarrow [\varphi_w(x) \leq \varphi_w(x)]$.

$(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w)$ resulta ser retículo isomorfo al inicial $(\mathcal{L}, \leq)$, (siendo $\varphi_w: (\mathcal{L}, \leq) \to (\mathcal{L}, \sqsubseteq^w)$ isomorfismo entre retículos). En consecuencia, $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c)$ también es broweriano completo con mínimo w y máximo w^c y siendo los operadores ínfimo $x \sqcap^w y = x \cdot y + w \cdot (x + y)$ y supremo $x \sqcup^w y = x \cdot y + w^c \cdot (x + y) \quad \forall (x, y) \in \mathcal{L}^2$.

El isomorfismo verifica $\varphi_w(x') = [\varphi_w(x)]' \ \forall x \in \mathcal{L}$ y la aplicación $': \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ también es negación fuerte en el retículo $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c)$.

Definición. Sea $g: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$. Definimos la aplicación asociada $\hat{g}_w: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ mediante: $\hat{g}_w = \varphi_w \circ g \circ \varphi_w$, es decir

$\hat{g}_w(x) = \varphi_w(g(\varphi_w(x))) \quad \forall x \in \mathcal{L}$.



Operadores morfológicos asociados al orden $\sqsubseteq^w$

Hay propiedades de g en el álgebra $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ que $\hat{g}_w$ también verifica, ahora en el álgebra $((\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ')$:

Proposición. Se verifica:

(1) Si g es isótona en $(\mathcal{L}, \leq)$ entonces $\hat{g}_w$ es isótona en $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w)$:

Si $(x \leq y) \Rightarrow (g(x) \leq g(y))$, entonces $(z \sqsubseteq^w t) \Rightarrow (\hat{g}_w(z) \sqsubseteq^w \hat{g}_w(t))$.

(2) Si g es antítona en $(\mathcal{L}, \leq)$ entonces $\hat{g}_w$ es antítona en $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w)$:

Si $(x \leq y) \Rightarrow (g(x) \geq g(y))$, entonces $(z \sqsubseteq^w t) \Rightarrow (\hat{g}_w(z) \sqsupseteq^w \hat{g}_w(t))$. (Siendo $(a \sqsupseteq^w b) \Leftrightarrow (b \sqsubseteq^w a)$).

(3) Si $g(0)=0$ entonces $\hat{g}_w(w)=w$ y si $g(1)=1$ entonces $\hat{g}_w(w^c)=w^c$.

(4) Si $g(\inf M)=\inf g(M)$ entonces $\hat{g}_w(\sqcap^w M) = \sqcap^w \hat{g}_w(M)$, siendo $f(M)=\{f(m) \ / \ m \in M\}$.

(5) Si $g(\sup M)=\sup g(M)$ entonces $\hat{g}_w(\sqcup^w M) = \sqcup^w \hat{g}_w(M)$.

Operadores morfológicos asociados al orden $\sqsubseteq^w$

Hay propiedades de g en el álgebra $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ que $\hat{g}_w$ también verifica, ahora en el álgebra $((\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ')$:

Proposición. Se verifica:

(1) Si g es isótona en $(\mathcal{L}, \leq)$ entonces $\hat{g}_w$ es isótona en $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w)$:

Si $(x \leq y) \Rightarrow (g(x) \leq g(y))$, entonces $(z \sqsubseteq^w t) \Rightarrow (\hat{g}_w(z) \sqsubseteq^w \hat{g}_w(t))$.

(2) Si g es antítona en $(\mathcal{L}, \leq)$ entonces $\hat{g}_w$ es antítona en $(\mathcal{L}, \sqsubseteq^w)$:

Si $(x \leq y) \Rightarrow (g(x) \geq g(y))$, entonces $(z \sqsubseteq^w t) \Rightarrow (\hat{g}_w(z) \sqsupseteq^w \hat{g}_w(t))$. (Siendo $(a \sqsupseteq^w b) \Leftrightarrow (b \sqsubseteq^w a)$).

(3) Si $g(0)=0$ entonces $\hat{g}_w(w)=w$ y si $g(1)=1$ entonces $\hat{g}_w(w^c)=w^c$.

(4) Si $g(\inf M)=\inf g(M)$ entonces $\hat{g}_w(\sqcap^w M) = \sqcap^w \hat{g}_w(M)$, siendo $f(M)=\{f(m) \,/\, m \in M\}$.

(5) Si $g(\sup M)=\sup g(M)$ entonces $\hat{g}_w(\sqcup^w M) = \sqcup^w \hat{g}_w(M)$.

Otras propiedades que comparten g y $\hat{g}_w$:

Proposición. Se verifica:

(6) Si $g(x) \leq x$, entonces $\hat{g}_w(x) \sqsubseteq^w x$.

(7) Si $x \leq g(x)$, entonces $x \sqsubseteq^w \hat{g}_w(x)$.

(8) Si $g^2(x) \leq g(x)$, entonces $\hat{g}_w{}^2(x) \sqsubseteq^w \hat{g}_w(x)$ y si $g^2(x) = g(x)$ entonces $\hat{g}_w{}^2(x) = \hat{g}_w(x)$.

(9) Si $g(x') = (g(x))'$, entonces $\hat{g}_w(x') = (\hat{g}_w(x))'$.

(10) Si g es biyectiva entonces $\hat{g}_w$ también lo es y para las inversas se verifica $(\widehat{g^{-1}})_w = \hat{g}_w{}^{-1}$.

(11) Si $x = g(x)$ entonces $\varphi_w(x) = \hat{g}_w(\varphi_w(x))$, en particular: $((0=g(0)) \Rightarrow (w=\hat{g}_w(w)))$.

(12) Si $g(x+y)=g(x)+g(y)$ entonces $\hat{g}_w(x \sqcup^w y) = \hat{g}_w(x) \sqcup^w \hat{g}_w(y)$.

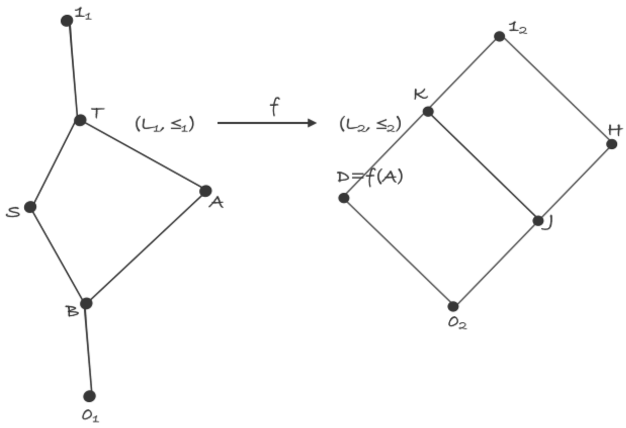
(13) Si $g(x \cdot y)=g(x)$ entonces $\hat{g}(\varphi_w(x) \sqcap^w \varphi_w(y)) = \hat{g}(\varphi_w(x))$-

Operadores morfológicos asociados al orden $\sqsubseteq^{W}$

Operadores morfológicos asociados al orden $\sqsubseteq^W$

Sean $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$, $(\mathcal{L}_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1)$ y $(\mathcal{L}_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2)$ retículos completos.

Extensión de La Morfología Matemática al marco general de los retículos $(L_1,\leq_1)$, $(L_2,\leq_2)$,...
Aparecen ahora los operadores morfológicos básicos, (erosión y dilatación), como aplicaciones $f: Li \rightarrow Lj$ que transforman un elemento A de $(L_i, \leq_i)$ en otro f(A) de $(L_j, \leq_j)$.



Operadores morfológicos asociados al orden $\sqsubseteq^W$

Sean $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$, $(\mathcal{L}_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1)$ y $(\mathcal{L}_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2)$ retículos completos.

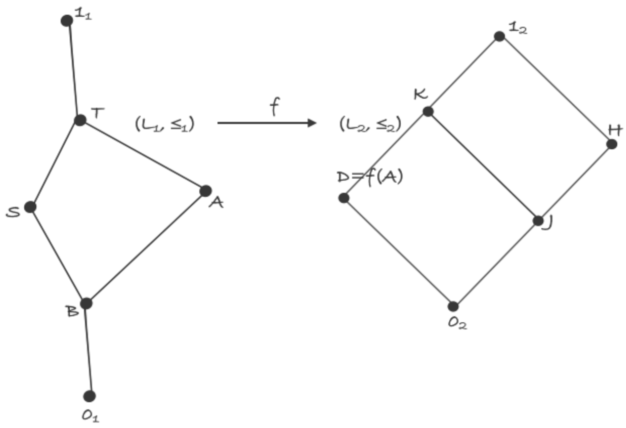
Una aplicación $\xi: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ es una erosión morfológica si:

(1e) $\xi(\inf_1 M) = \inf_2 \xi(M) \quad \forall M \in P(\mathcal{L}_1)$.

Una aplicación $\delta: \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_1$ es una dilatación morfológica si:

(1d) $\delta(\sup_2 N) = \sup_1 \delta(N) \quad \forall N \in P(\mathcal{L}_2)$.

Extensión de La Morfología Matemática al marco general de los retículos $(L_1, \leq_1), (L_2, \leq_2), \ldots$
Aparecen ahora los operadores morfológicos básicos, (erosión y dilatación), como aplicaciones $f: Li \rightarrow Lj$ que transforman un elemento A de $(L_i, \leq_i)$ en otro $f(A)$ de $(L_j, \leq_j)$.



Operadores morfológicos asociados al orden $\sqsubseteq^W$

Sean $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$, $(\mathcal{L}_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1)$ y $(\mathcal{L}_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2)$ retículos completos.

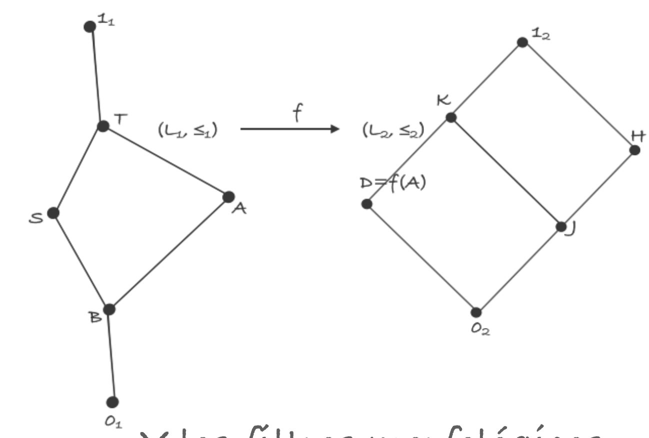
Una aplicación $\xi: \mathcal{L}_1 \rightarrow \mathcal{L}_2$ es una erosión morfológica si:

(1e) $\xi(\inf_1 M) = \inf_2 \xi(M) \quad \forall M \in P(\mathcal{L}_1)$.

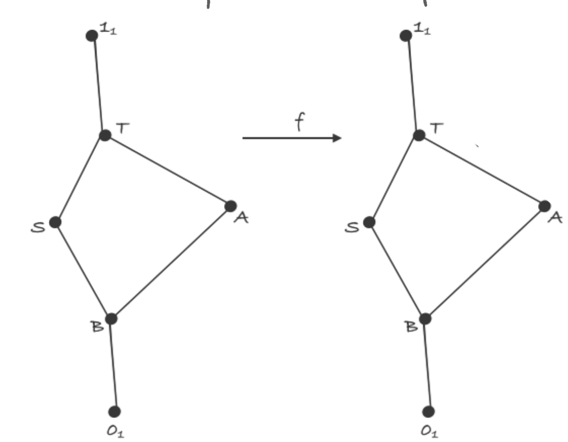
Una aplicación $\delta: \mathcal{L}_2 \rightarrow \mathcal{L}_1$ es una dilatación morfológica si:

(1d) $\delta(\sup_2 N) = \sup_1 \delta(N) \quad \forall N \in P(\mathcal{L}_2)$.

Extensión de La Morfología Matemática al marco general de los retículos $(L_1, \leq_1), (L_2, \leq_2), \ldots$
Aparecen ahora los operadores morfológicos básicos, (erosión y dilatación), como aplicaciones $f: Li \rightarrow Lj$ que transforman un elemento A de $(L_i, \leq_i)$ en otro $f(A)$ de $(L_j, \leq_j)$.



Y los filtros morfológicos como aplicaciones $f: L \rightarrow L$



Operadores morfológicos asociados al orden $\sqsubseteq^W$

Sean $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$, $(\mathcal{L}_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1)$ y $(\mathcal{L}_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2)$ retículos completos.

Una aplicación $\xi: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ es una <u>erosión morfológica</u> si:

(1e) $\xi(\inf_1 M) = \inf_2 \xi(M) \quad \forall M \in P(\mathcal{L}_1)$.

Una aplicación $\delta: \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1$ es una <u>dilatación morfológica</u> si:

(1d) $\delta(\sup_2 N) = \sup_1 \delta(N) \quad \forall N \in P(\mathcal{L}_2)$.

Una aplicación $f: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es un <u>filtro morfológico</u> si:

(1f) es isótona: $(x \leq y) \Rightarrow (f(x) \leq f(y))$, (2f) es idempotente: $f^2(x) = f(x) \ \forall x \in \mathcal{L}$.

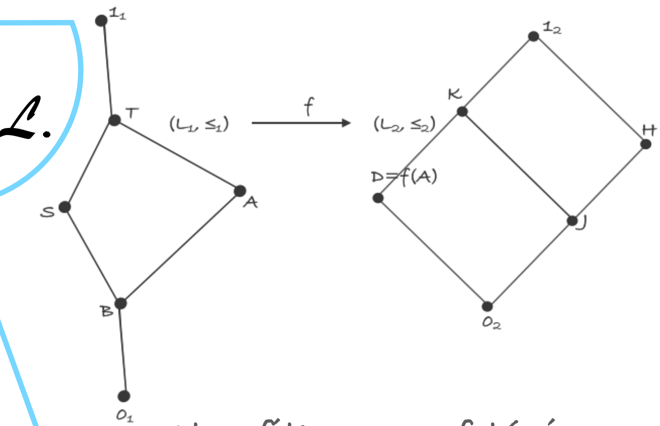
Un aplicación $\gamma: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es una <u>apertura morfológica</u> si:

(1a) Es un filtro morfológico, (2a) es anti-extensiva: $\gamma(x) \leq x \quad \forall x \in \mathcal{L}$.

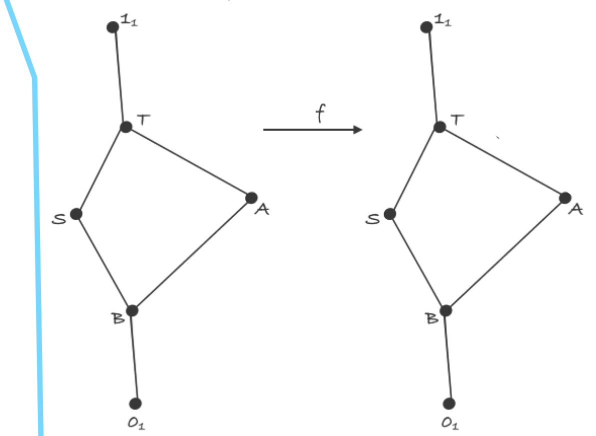
Una aplicación $\phi: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es una <u>cierre morfológico</u> si:

(1c) Es un filtro morfológico, (2c) es extensiva: $x \leq \phi(x) \quad \forall x \in \mathcal{L}$.

Extensión de La Morfología Matemática al marco general de los retículos $(L_1, \leq_1), (L_2, \leq_2), \ldots$
Aparecen ahora los operadores morfológicos básicos, (erosión y dilatación), como aplicaciones $f: L_i \to L_j$ que transforman un elemento A de $(L_i, \leq_i)$ en otro $f(A)$ de $(L_j, \leq_j)$.



Y los filtros morfológicos como aplicaciones $f: L \to L$



Operadores morfológicos asociados al orden $\sqsubseteq^W$

Sean $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$, $(\mathcal{L}_1, \leq_1, \cdot_1, +_1, 0_1, 1_1)$ y $(\mathcal{L}_2, \leq_2, \cdot_2, +_2, 0_2, 1_2)$ retículos completos.

Una aplicación $\xi: \mathcal{L}_1 \to \mathcal{L}_2$ es una <u>erosión morfológica</u> si:

(1e) $\xi(\inf_1 M) = \inf_2 \xi(M) \quad \forall M \in P(\mathcal{L}_1)$.

Una aplicación $\delta: \mathcal{L}_2 \to \mathcal{L}_1$ es una <u>dilatación morfológica</u> si:

(1d) $\delta(\sup_2 N) = \sup_1 \delta(N) \quad \forall N \in P(\mathcal{L}_2)$.

Una aplicación $f: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es un <u>filtro morfológico</u> si:

(1f) es isótona: $(x \leq y) \Rightarrow (f(x) \leq f(y))$, (2f) es idempotente: $f^2(x) = f(x) \ \forall x \in \mathcal{L}$.

Un aplicación $\gamma: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es una <u>apertura morfológica</u> si:

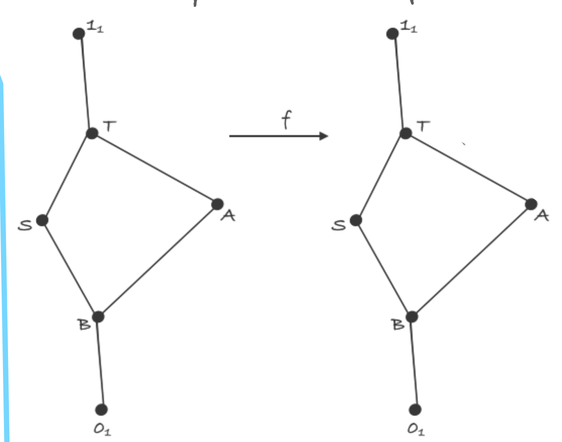
(1a) Es un filtro morfológico, (2a) es anti-extensiva: $\gamma(x) \leq x \quad \forall x \in \mathcal{L}$.

Una aplicación $\phi: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es una <u>cierre morfológico</u> si:

(1c) Es un filtro morfológico, (2c) es extensiva: $x \leq \phi(x) \quad \forall x \in \mathcal{L}$.

Extensión de La Morfología Matemática al marco general de los retículos $(L_1, \leq_1), (L_2, \leq_2), \ldots$ Aparecen ahora los operadores morfológicos básicos, (erosión y dilatación), como aplicaciones $f: Li \to Lj$ que transforman un elemento A de $(L_i, \leq_i)$ en otro $f(A)$ de $(L_j, \leq_j)$.

Y los filtros morfológicos como aplicaciones $f: L \to L$



Sea $': \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ una negación fuerte en $(\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1)$. Se verifica:

(a) Si $\xi: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es una erosión morfológica, entonces la aplicación $\delta_\xi: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ tal que $\delta_\xi(x) = (\xi(x'))' \ \forall x \in \mathcal{L}$, es una dilatación morfológica.

(b) Si $\delta: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es una dilatación morfológica, entonces la aplicación $\xi_\delta: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ tal que $\xi_\delta(x) = (\delta(x'))' \ \forall x \in \mathcal{L}$, es una erosión morfológica.

(c) Si $\gamma: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es una apertura morfológica, entonces la aplicación $\phi_\gamma: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ tal que $\phi_\gamma(x) = (\gamma(x'))' \ \forall x \in \mathcal{L}$, es un cierre morfológico.

(d) Si $\phi: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es un cierre morfológico, entonces la aplicación $\gamma_\phi: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ tal que $\gamma_\phi(x) = (\phi(x'))' \ \forall x \in \mathcal{L}$, es una apertura morfológica.

Operadores morfológicos asociados al orden $\sqsubseteq^w$

Como consecuencia de una proposición anterior y de las definiciones de operadores morfológicos, tenemos el siguiente resultado:

Teorema. Se verifica:

(1) Si $\xi: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es una erosión morfológica en $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ y w es complementado tal que $w' = w^c$, entonces $\hat{\xi}_w = \varphi_w \circ \xi \circ \varphi_w$ es erosión morfológica en $((\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ')$.

(2) Si $\delta: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es una dilatación morfológica en $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ y w es complementado tal que $w' = w^c$, entonces $\hat{\delta}_w = \varphi_w \circ \delta \circ \varphi_w$ es dilatación morfológica en $((\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ')$.

(3) Si $\gamma: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es una apertura morfológica en $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ y w es complementado tal que $w' = w^c$, entonces $\hat{\gamma}_w = \varphi_w \circ \gamma \circ \varphi_w$ es apertura morfológica en $((\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ')$.

(4) Si $\phi: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es un cierre morfológico en $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ y w es complementado tal que $w' = w^c$, entonces $\hat{\phi}_w = \varphi_w \circ \phi \circ \varphi_w$ es cierre morfológico en $((\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c), ')$.

Operadores morfológicos asociados al orden $\sqsubseteq^w$

Como consecuencia de una proposición anterior y de las definiciones de operadores morfológicos, tenemos el siguiente resultado:

Teorema. Se verifica:

(1) Si $\xi: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es una erosión morfológica en $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1),')$ y w es complementado tal que $w' = w^c$, entonces $\hat{\xi}_w = \varphi_w \circ \xi \circ \varphi_w$ es erosión morfológica en $((\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c),')$.

(2) Si $\delta: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es una dilatación morfológica en $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1),')$ y w es complementado tal que $w' = w^c$, entonces $\hat{\delta}_w = \varphi_w \circ \delta \circ \varphi_w$ es dilatación morfológica en $((\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c),')$.

(3) Si $\gamma: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es una apertura morfológica en $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1),')$ y w es complementado tal que $w' = w^c$, entonces $\hat{\gamma}_w = \varphi_w \circ \gamma \circ \varphi_w$ es apertura morfológica en $((\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c),')$.

(4) Si $\phi: \mathcal{L} \to \mathcal{L}$ es un cierre morfológico en $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1),')$ y w es complementado tal que $w' = w^c$, entonces $\phi_w = \varphi_w \circ \phi \circ \varphi_w$ es cierre morfológico en $((\mathcal{L}, \sqsubseteq^w, \sqcap^w, \sqcup^w, w, w^c),')$.

Ejemplo:

Sea $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1),')$ el Álgebra de Boole $((\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup, \emptyset, X),^c)$ de las partes del conjunto de imágenes de $X = \mathbb{R}^2$ o de $X = \mathbb{Z}^2$ (aquí los operadores $+$ y $-$ se utilizan para representar la suma $x+y$, la diferencia $x-y$ y el opuesto $-x$ de puntos del plano o del plano digital).

En este caso, los operadores morfológicos erosión ξ_B y dilatación δ_B asociados a un elemento estructurante $B \in \mathcal{P}(X)$, así como los filtros correspondientes apertura γ_B y cierre ϕ_B, son:

(er) Erosión ξ_B por el elemento estructurante B: $\xi_B(A) = \{x \in X \,/\, (\check{B})_x \subseteq A\}$ $\forall A \in \mathcal{P}(X)$,

siendo $\check{S} = \{-s \,/\, s \in S\}$ y $N_x = \{n + x \,/\, n \in N\}$.

(di) Dilatación δ_B por el elemento estructurante B: $\delta_B(A) = \{x \in X \,/\, B_x \cap A \neq \emptyset\}$ $\forall A \in \mathcal{P}(X)$.

(ap) Apertura γ_B por el elemento estructurante B: $\gamma_B = \delta_B \circ \xi_B$.

(ci) Cierre por el elemento estructurante B: $\phi_B = \xi_B \circ \delta_B$.

Operadores morfológicos asociados al orden $\sqsubseteq^W$

Ejemplo:

Sea $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1), ')$ el Álgebra de Boole $((\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, X), ^c)$ de las partes del conjunto de imágenes de $X=\mathbb{R}^2$ o de $X=\mathbb{Z}^2$ (aquí los operadores $+$ y $-$ se utilizan para representar la suma $x+y$, la diferencia $x-y$ y el opuesto $-x$ de puntos del plano o del plano digital).

En este caso, los operadores morfológicos erosión ξ_B y dilatación δ_B asociados a un elemento estructurante $B\in\mathcal{P}(X)$, así como los filtros correspondientes apertura γ_B y cierre ϕ_B, son:

(er) Erosión ξ_B por el elemento estructurante B: $\xi_B(A) = \{x\in X \,/\, (\check{B})_x \subseteq A\}$ $\forall A\in\mathcal{P}(X)$,

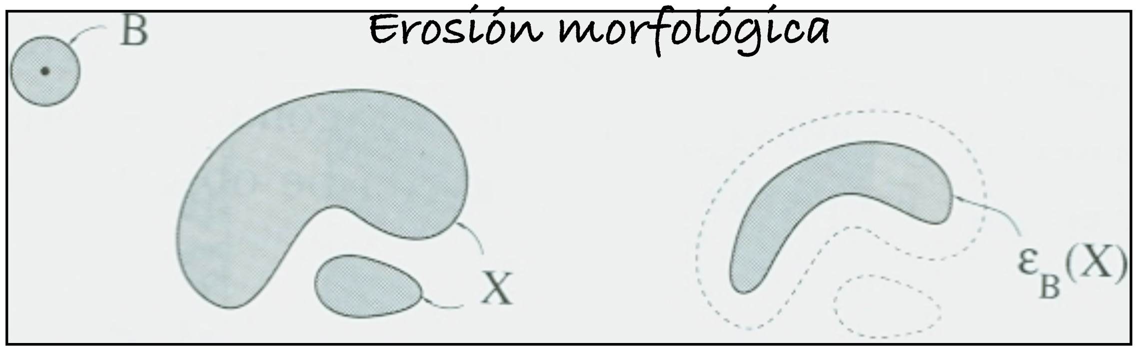
siendo $\check{S} = \{-s \,/\, s\in S\}$ y $N_x=\{n+x \,/\, n\in N\}$.

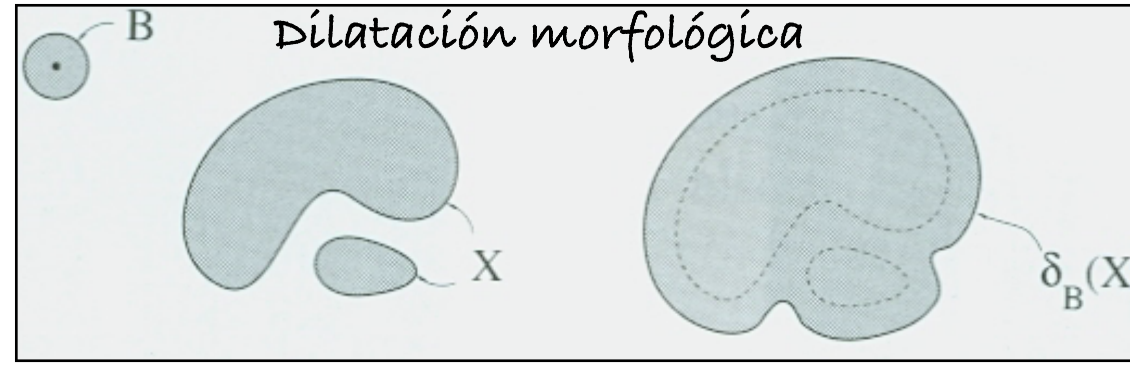
(di) Dilatación δ_B por el elemento estructurante B: $\delta_B(A) = \{x\in X \,/\, B_x\cap A\neq\varnothing\}$ $\forall A\in\mathcal{P}(X)$.

(ap) Apertura γ_B por el elemento estructurante B: $\gamma_B=\delta_B\circ\xi_B$.

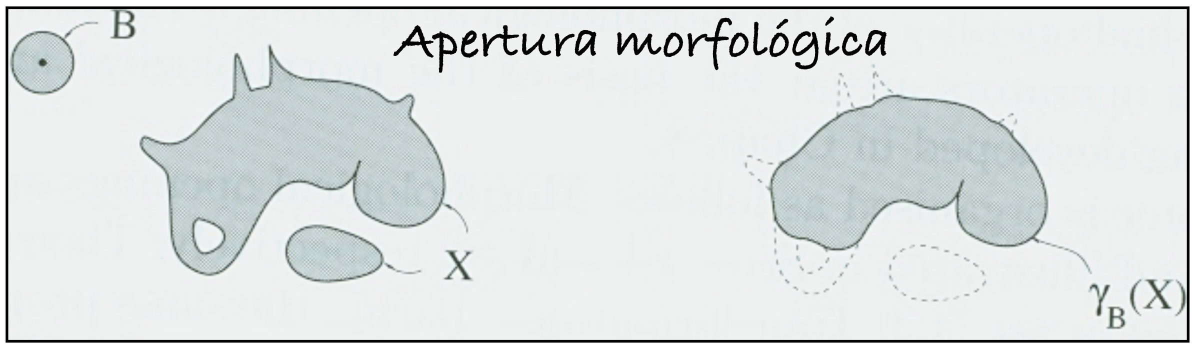
(ci) Cierre por el elemento estructurante B: $\phi_B=\xi_B\circ\delta_B$.

Operadores morfológicos asociados al orden $\sqsubseteq^w$





Ejemplo de los efectos de la <u>erosión</u>, la <u>dilatación</u> y los filtros morfológicos <u>apertura</u> y <u>cierre</u> en $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2),\subseteq)$



Ejemplo:

Sea $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1),')$ el Álgebra de Boole $((\mathcal{P}(X), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, X),^c)$ de las partes del conjunto de imágenes de $X=\mathbb{R}^2$ o de $X=\mathbb{Z}^2$ (aquí los operadores $+$ y $-$ se utilizan para representar la suma $x+y$, la diferencia $x-y$ y el opuesto $-x$ de puntos del plano o del plano digital).

En este caso, los operadores morfológicos erosión ξ_B y dilatación δ_B asociados a un elemento estructurante $B\in\mathcal{P}(X)$, así como los filtros correspondientes apertura γ_B y cierre ϕ_B, son:

(er) Erosión ξ_B por el elemento estructurante B: $\xi_B(A) = \{x\in X \mid (\check{B})_x\subseteq A\}$ $\forall A\in\mathcal{P}(X)$,
siendo $\check{S} = \{-s \mid s\in S\}$ y $N_x=\{n+x \mid n\in N\}$.

(di) Dilatación δ_B por el elemento estructurante B: $\delta_B(A) = \{x\in X \mid B_x\cap A\neq\varnothing\}$ $\forall A\in\mathcal{P}(X)$.

(ap) Apertura γ_B por el elemento estructurante B: $\gamma_B=\delta_B\circ\xi_B$.

(ci) Cierre por el elemento estructurante B: $\phi_B=\xi_B\circ\delta_B$.

Operadores morfológicos asociados al orden $\sqsubseteq^W$

Teorema. Se verifica:

(1) Si $\xi_B: P(X) \to P(X)$ es la erosión morfológica por B en $((P(X), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, X),^c)$ y $W \in P(X)$ entonces la erosión morfológica $(\hat{\xi}_B)_W: P(X) \to P(X)$ en $((P(X), \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c),^c)$ es tal que

$$(\hat{\xi}_B)_W(A) = (\varphi_W \circ \xi_B \circ \varphi_W)(A) = \varphi_W(\{x \in X \,/\, (\check{B})_x \subseteq \varphi_W(A)\}) = \varphi_W(\{x \in X \,/\, \varphi_W((\check{B})_x) \sqsubseteq^W A\}) =$$
$$= (\{x \in X \,/\, (\check{B})_x \subseteq (A \Delta W)\}) \Delta W = (\{x \in X \,/\, [((\check{B})_x) \Delta W] \sqsubseteq^W A\}) \Delta W \quad \forall A \in P(X).$$

(2) Análogamente, para la dilatación, si $\delta_B: P(X) \to P(X)$ es la dilatación por B, entonces:

$$(\hat{\delta}_B)_W(A) = (\varphi_W \circ \delta_B \circ \varphi_W)(A) = \varphi_W(\{x \in X \,/\, B_x \cap \varphi_W(A) \neq \varnothing\}) = \varphi_W(\{x \in X \,/\, \varphi_W(B_x) \sqcap^W A \neq W\}) =$$
$$= (\{x \in X \,/\, B_x \cap \varphi_W(A) \neq \varnothing\}) \Delta W = (\{x \in X \,/\, \varphi_W(B_x) \sqcap^W A \neq W\}) \Delta W \quad \forall A \in P(X).$$

(3) La apertura: $\gamma^* = (\hat{\delta}_B)_W \circ (\hat{\xi}_B)_W = (\varphi_W \circ \delta_B \circ \varphi_W) \circ (\varphi_W \circ \delta_B \circ \varphi_W) = (\varphi_W \circ \delta_B \circ \xi_B \circ \varphi_W) = \varphi_W \circ \gamma_B \circ \varphi_W = (\hat{\gamma}_B)_W$

(4) El cierre: $\phi^* = (\hat{\xi}_B)_W \circ (\hat{\delta}_B)_W = (\varphi_W \circ \delta_B \circ \varphi_W) \circ (\varphi_W \circ \delta_B \circ \varphi_W) = (\varphi_W \circ \delta_B \circ \xi_B \circ \varphi_W) = \varphi_W \circ \phi_B \circ \varphi_W = (\hat{\phi}_B)_W$

Ejemplo:

Sea $((\mathcal{L}, \leq, \cdot, +, 0, 1),')$ el Álgebra de Boole $((P(X), \subseteq, \cap, \cup, \varnothing, X),^c)$ de las partes del conjunto de imágenes de $X=\mathbb{R}^2$ o de $X=\mathbb{Z}^2$ (aquí los operadores + y − se utilizan para representar la suma $x+y$, la diferencia $x-y$ y el opuesto $-x$ de puntos del plano o del plano digital).

En este caso, los operadores morfológicos erosión ξ_B y dilatación δ_B asociados a un elemento estructurante $B \in P(X)$, así como los filtros correspondientes apertura γ_B y cierre ϕ_B, son:

(er) Erosión ξ_B por el elemento estructurante B: $\xi_B(A) = \{x \in X \,/\, (\check{B})_x \subseteq A\} \quad \forall A \in P(X)$,

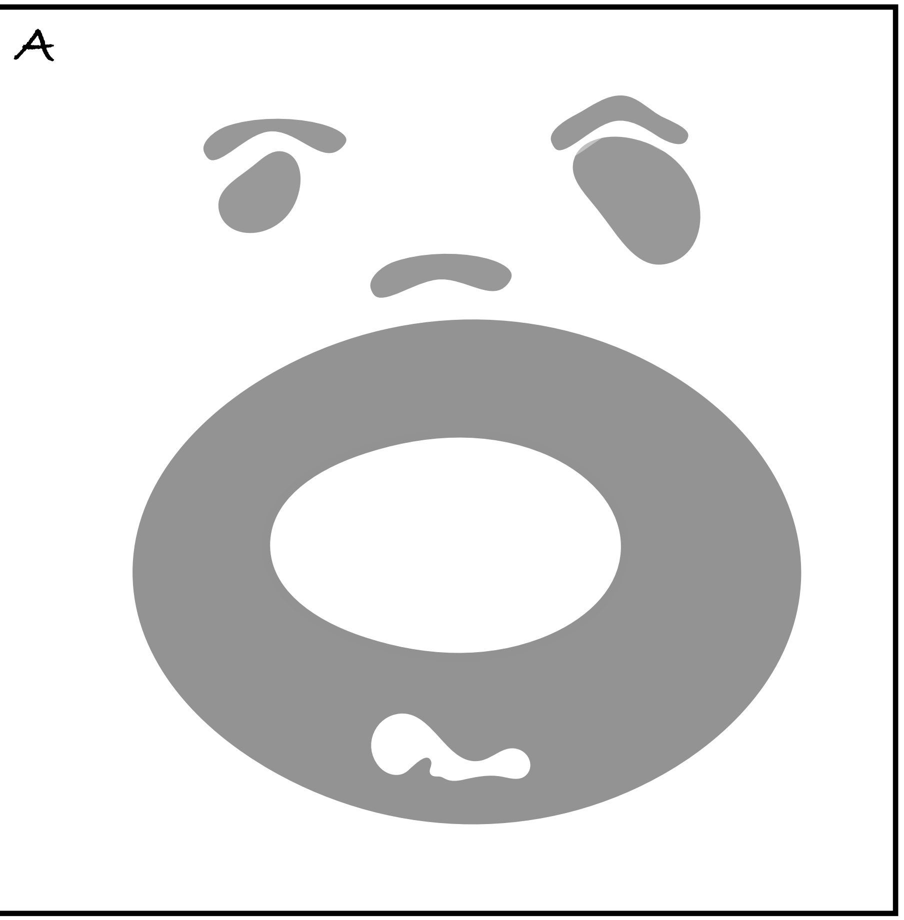
siendo $\check{S} = \{-s \,/\, s \in S\}$ y $N_x = \{n+x \,/\, n \in N\}$.

(di) Dilatación δ_B por el elemento estructurante B: $\delta_B(A) = \{x \in X \,/\, B_x \cap A \neq \varnothing\} \quad \forall A \in P(X)$.

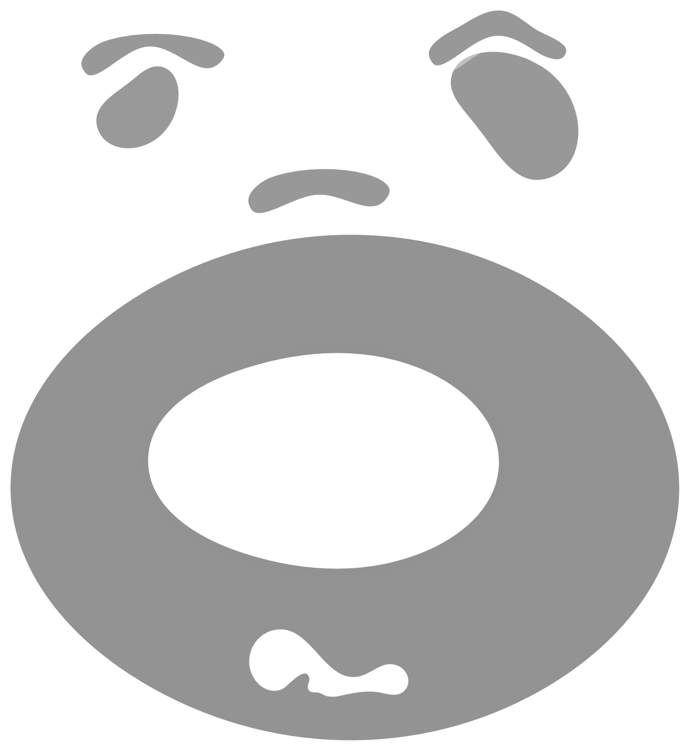
(ap) Apertura γ_B por el elemento estructurante B: $\gamma_B = \delta_B \circ \xi_B$.

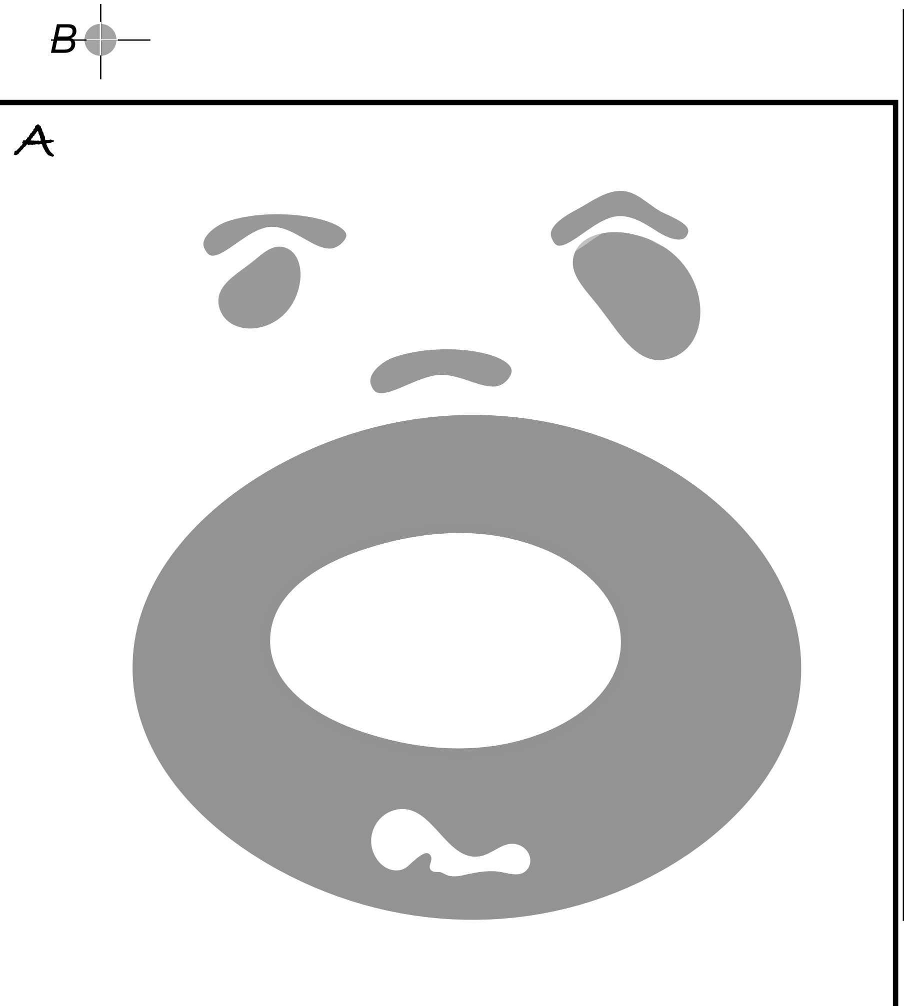
(ci) Cierre por el elemento estructurante B: $\phi_B = \xi_B \circ \delta_B$.

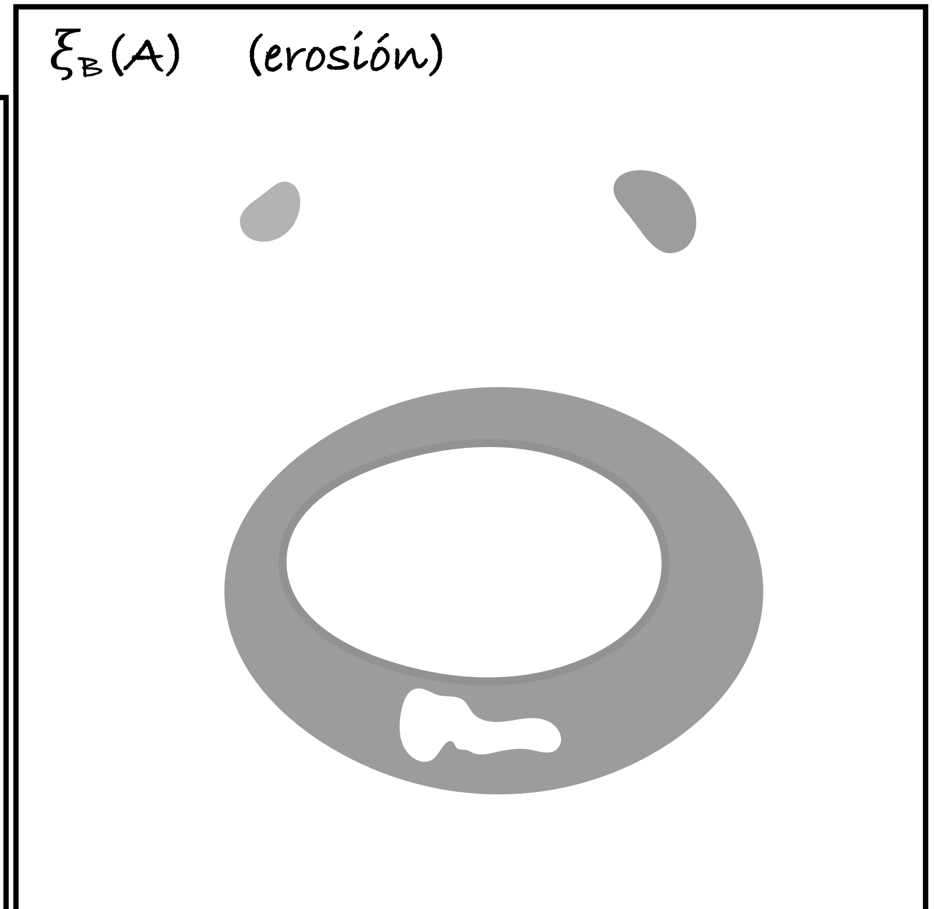
Ejemplo de los efectos de los w-filtros morfológicos apertura y cierre en $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \sqsubseteq^w)$

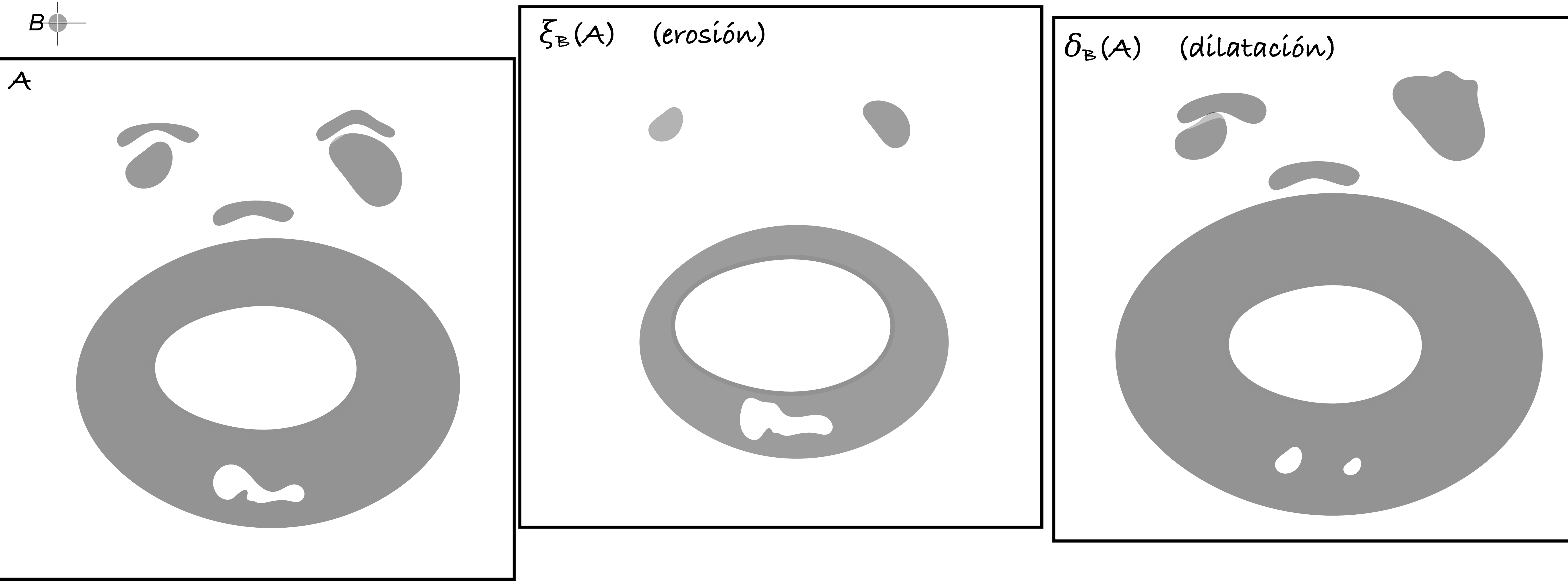

A

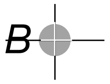
A



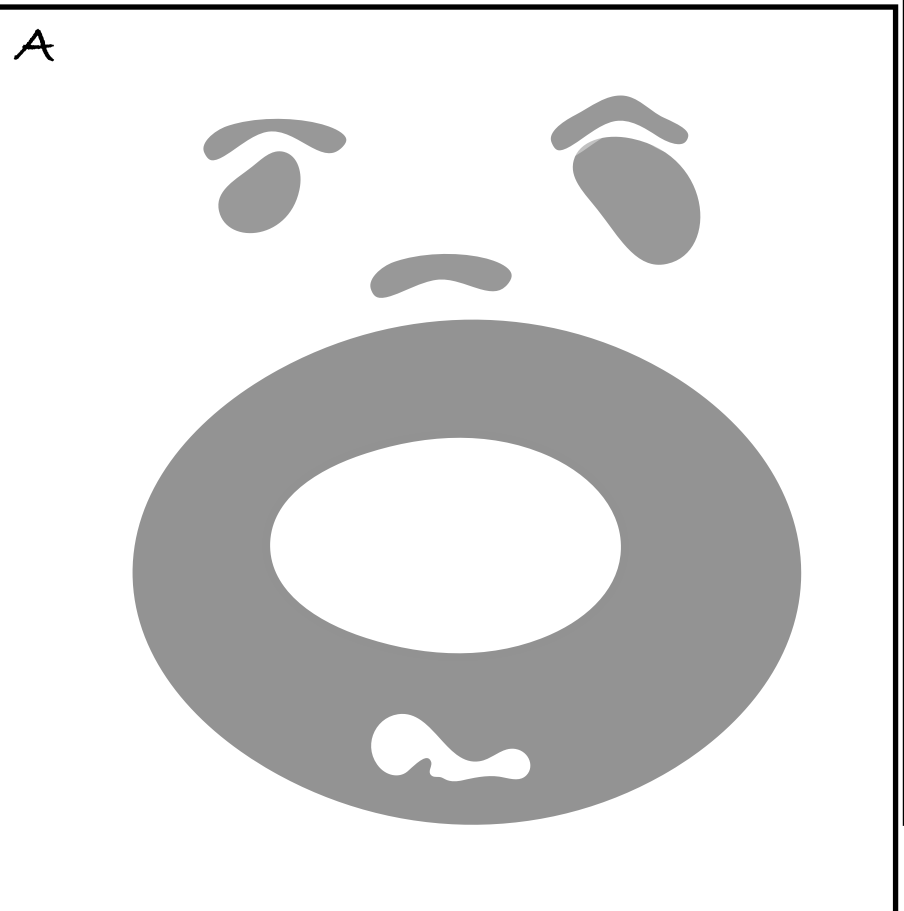

B
A

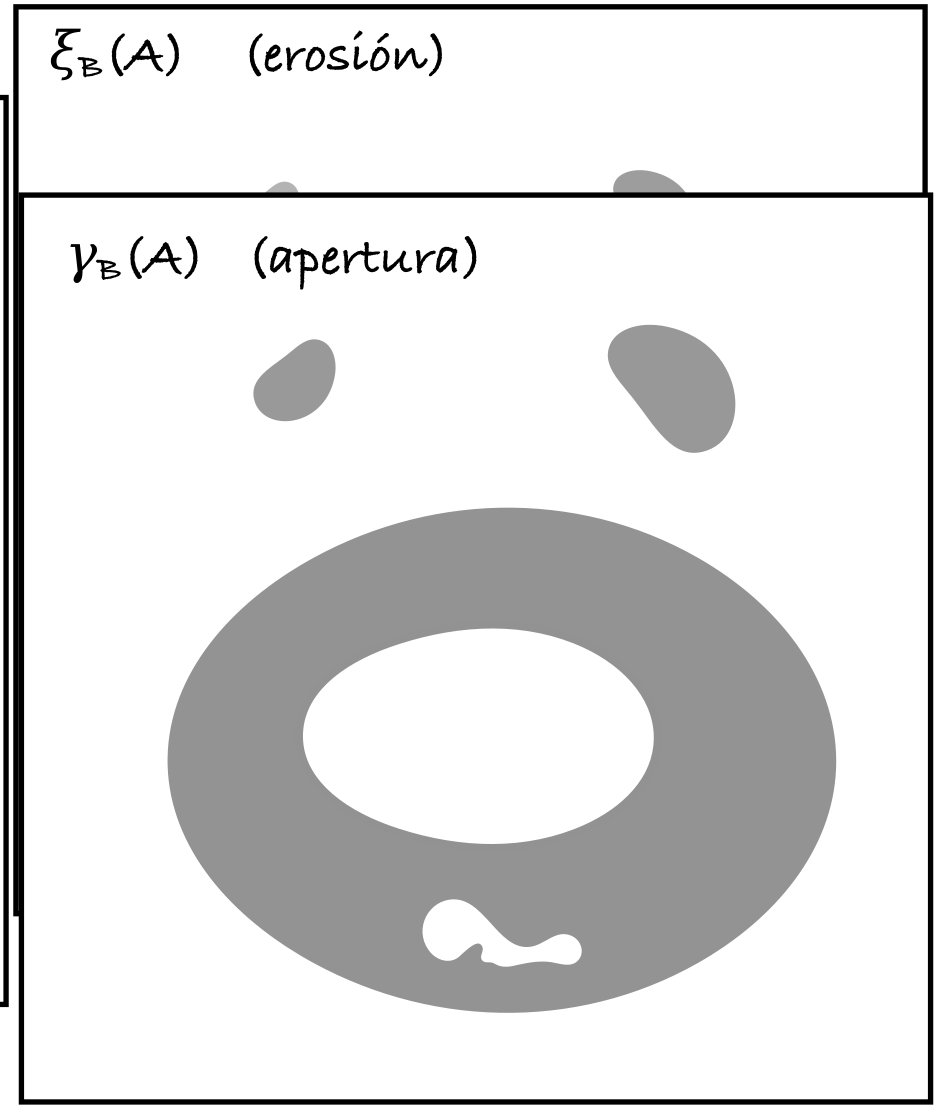

$\xi_B(A)$ (erosión)

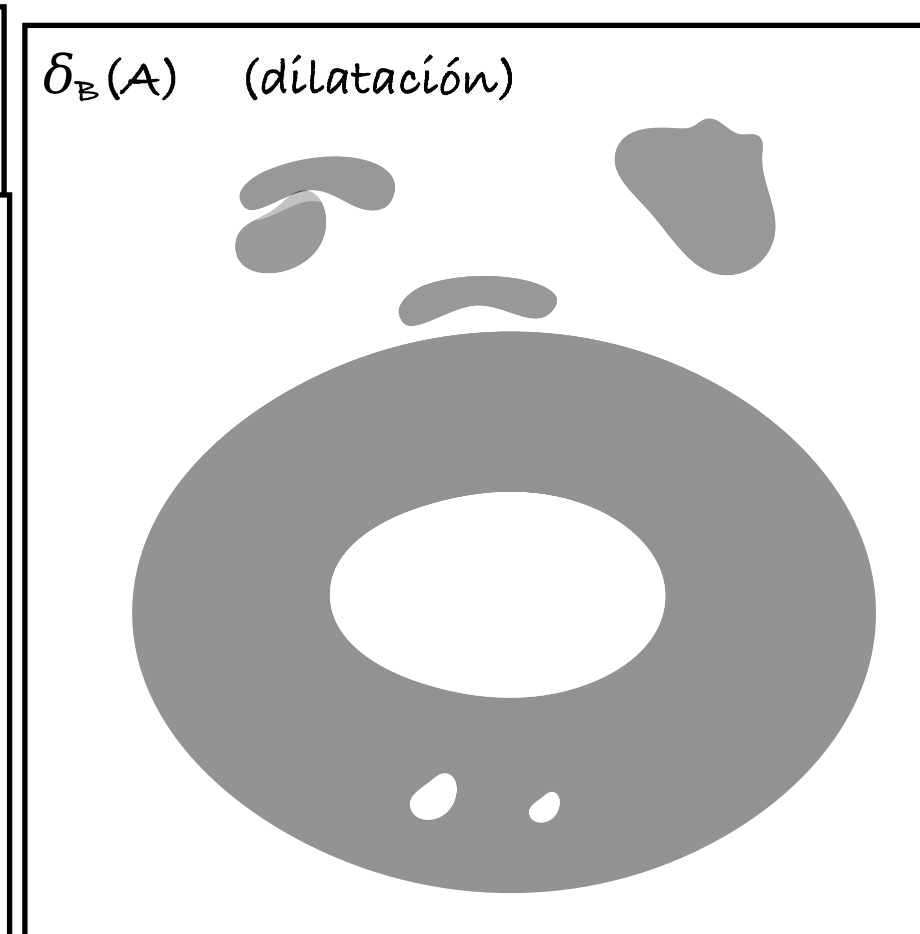

B
A
$\xi_B(A)$ (erosión)
$\delta_B(A)$ (dilatación)

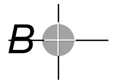
B 

Fíltros en $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2),\subseteq)$

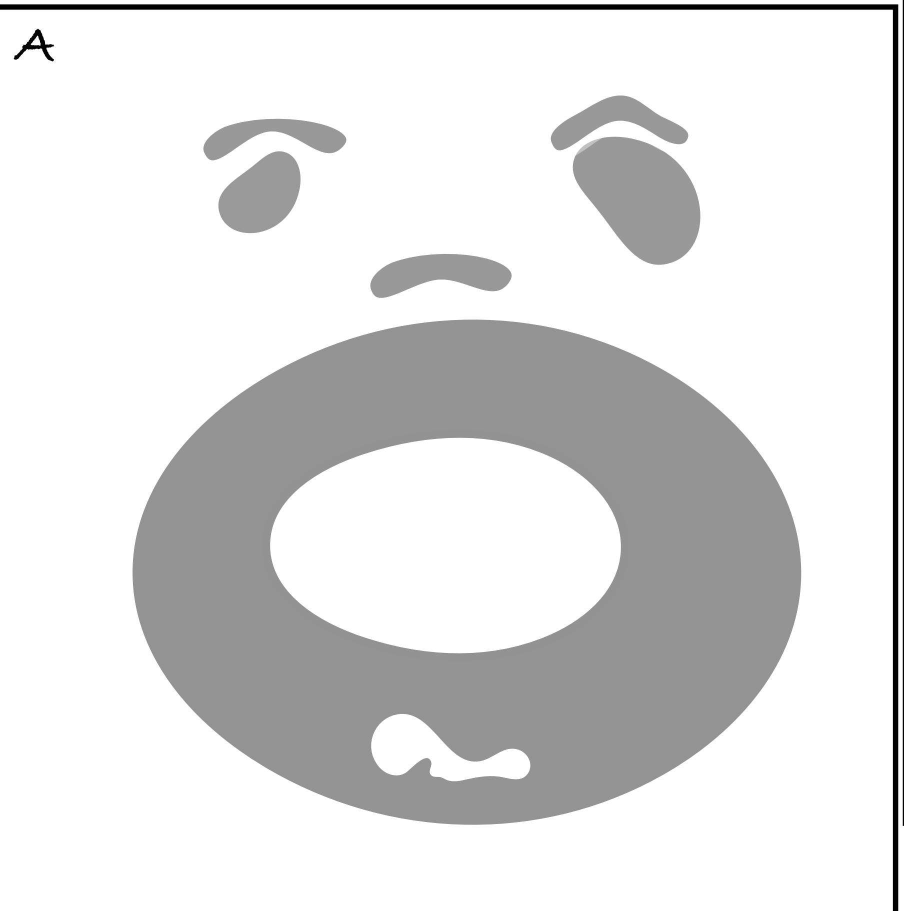


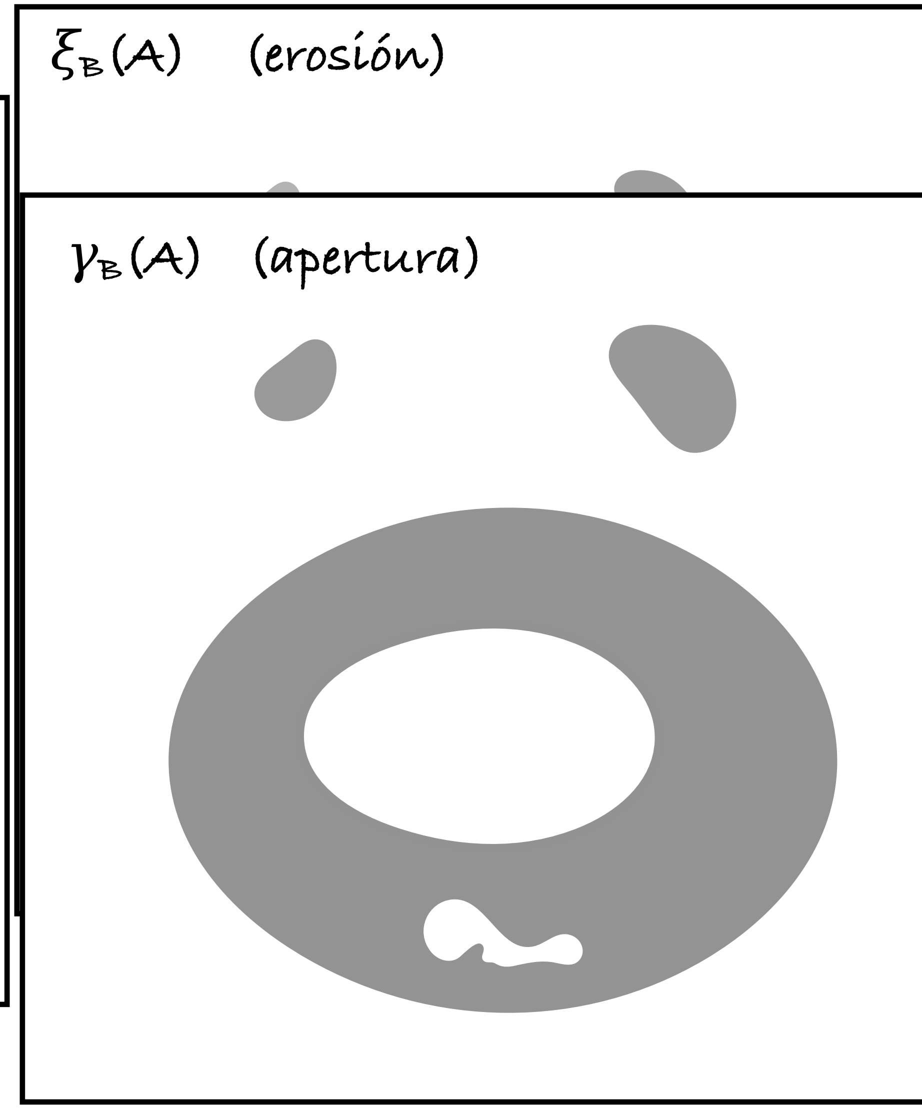


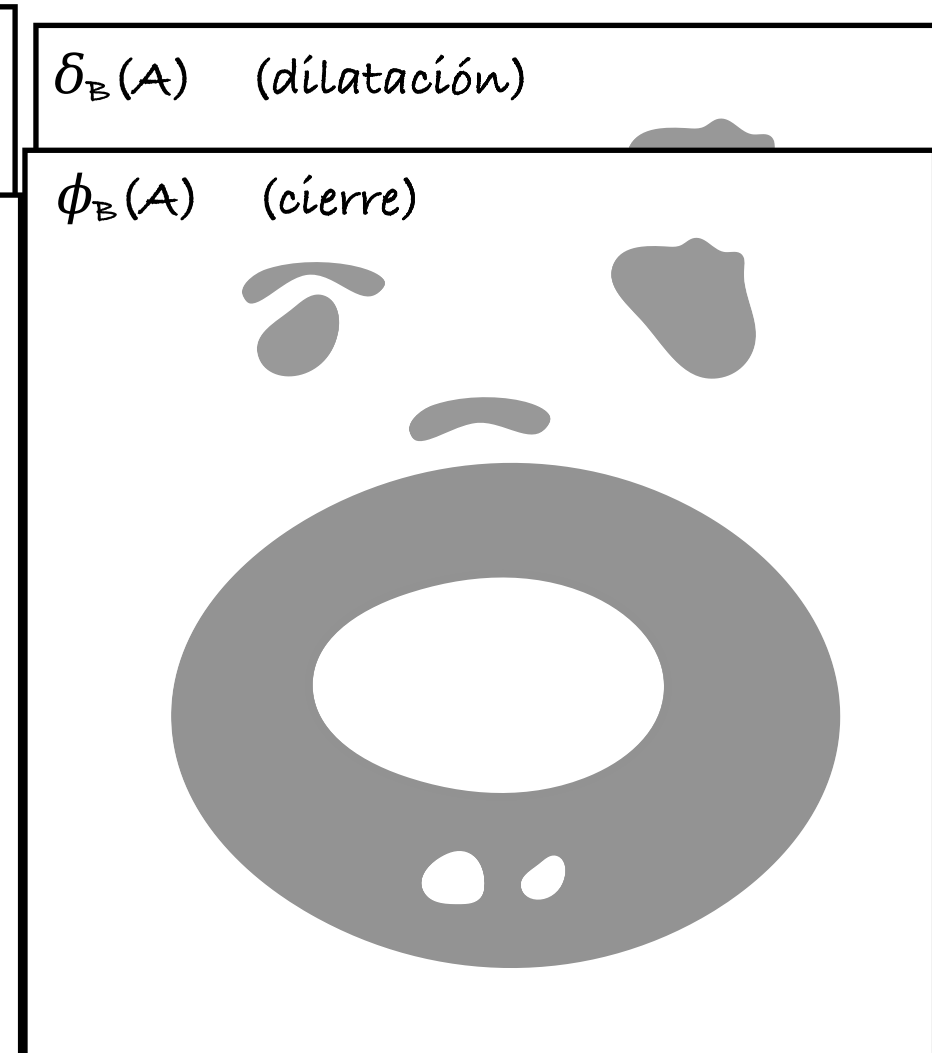


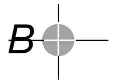


Filtros en $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \subseteq)$



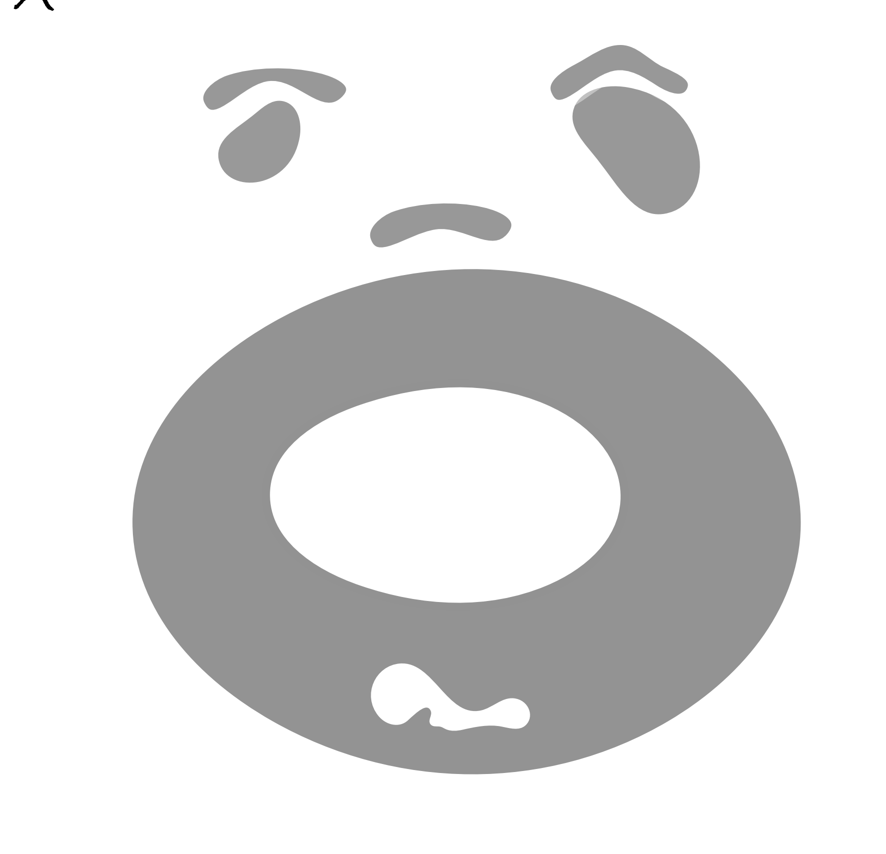






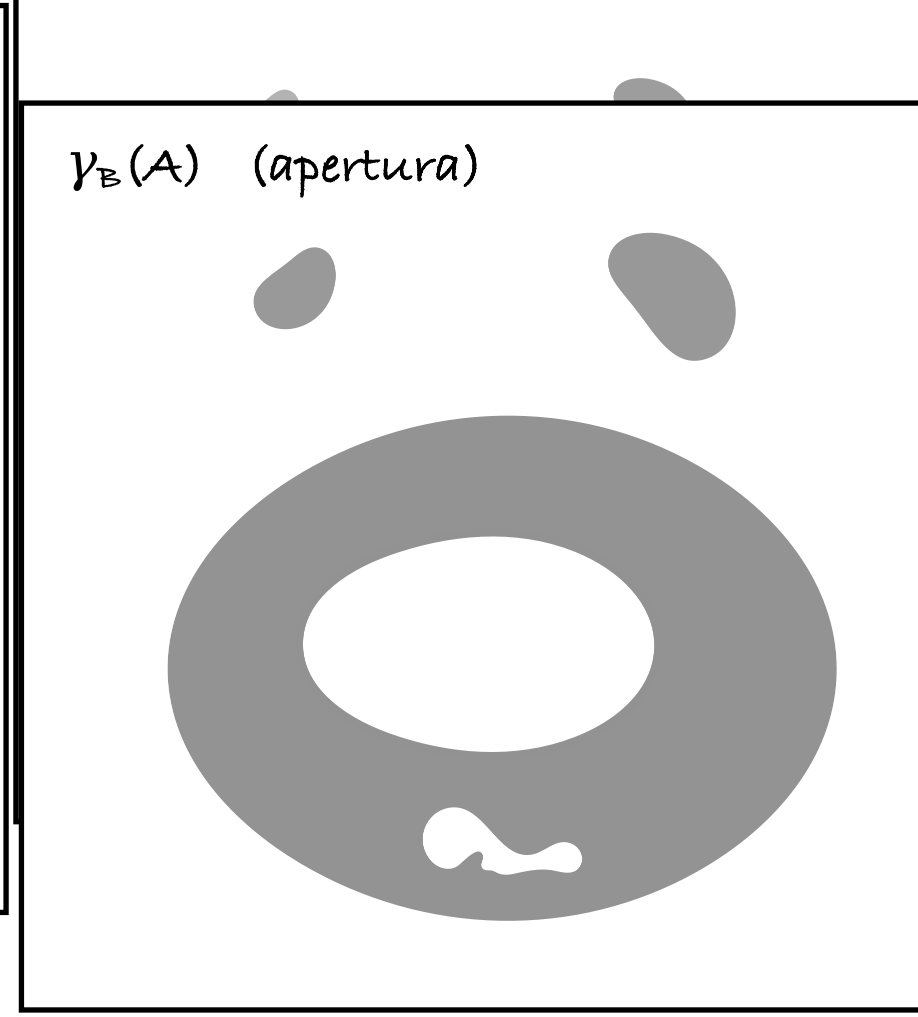
Filtros en $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \subseteq)$

A



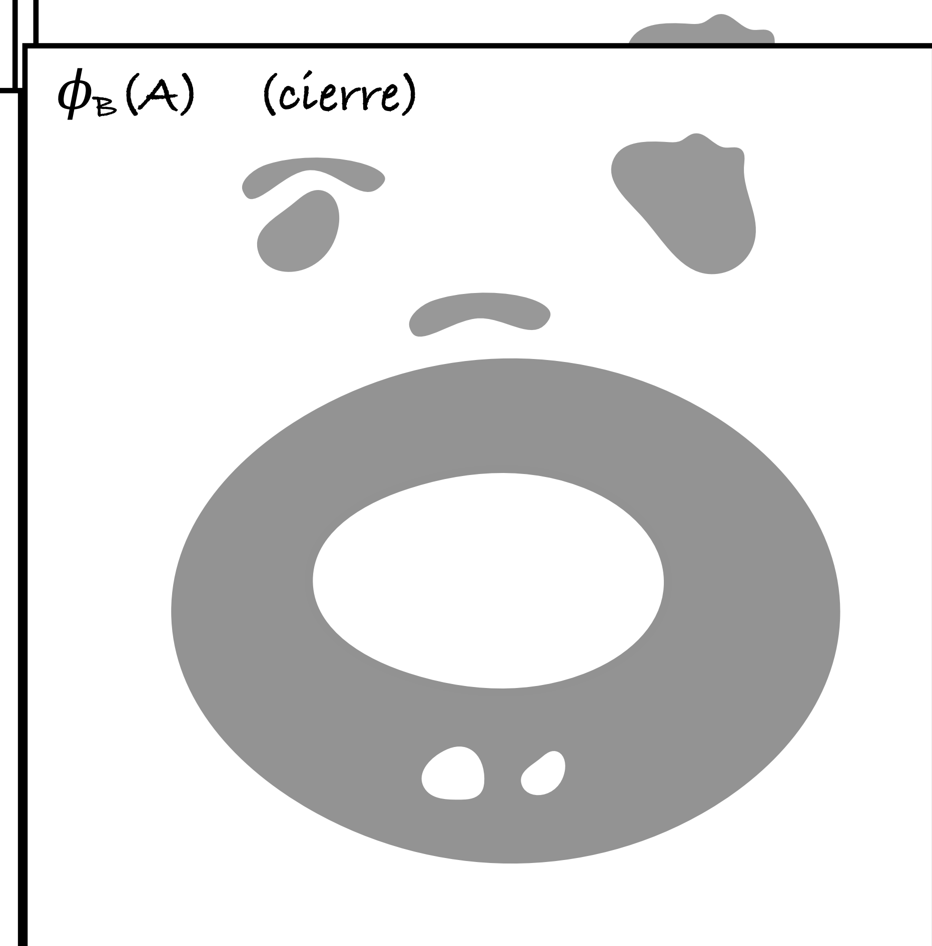
$\xi_B(A)$ (erosión)

$\gamma_B(A)$ (apertura)



$\delta_B(A)$ (dilatación)

$\phi_B(A)$ (cierre)



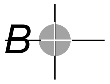
$$\gamma_B(A) \subseteq A \subseteq \phi_B(A),$$

$$\gamma_B(\gamma_B(A)) = \gamma_B(A),$$

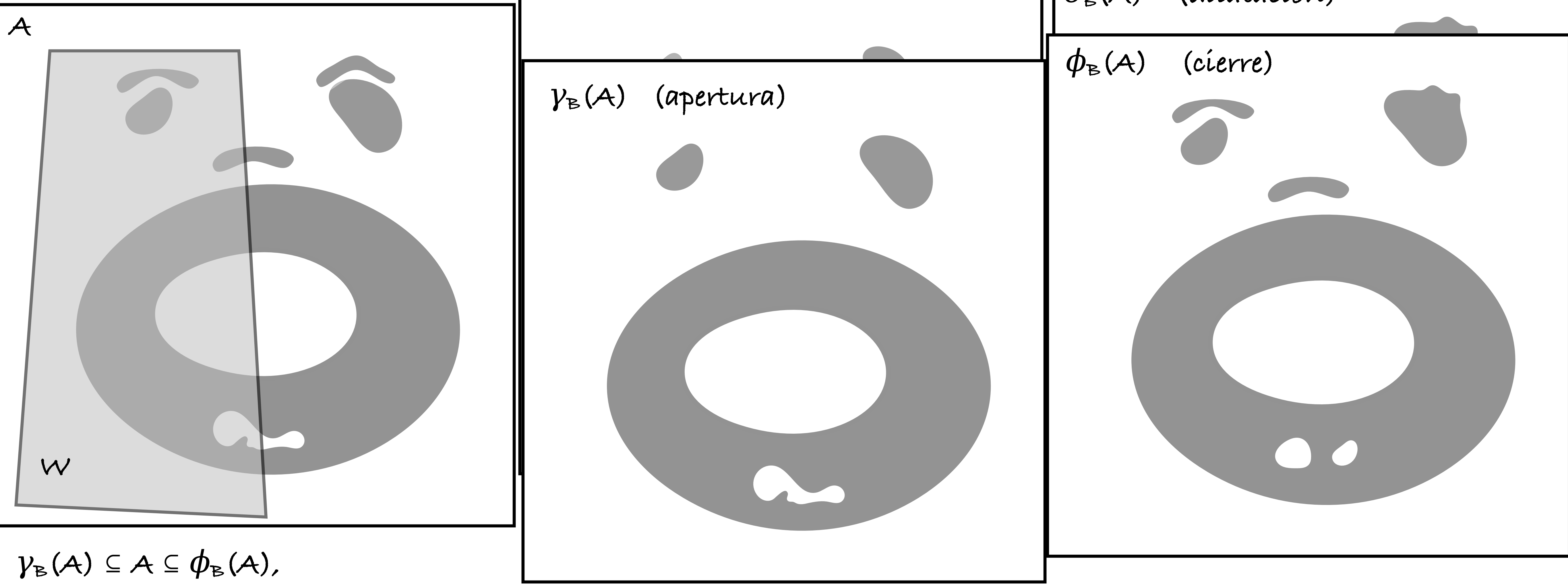
$$\phi_B(\phi_B(A)) = \phi_B(A) \ \forall A \in \mathcal{P}(E) .$$

$$(A \subseteq C) \Rightarrow [(\gamma_B(A) \subseteq \gamma_B(C)) \,\&$$

$$(\phi_B(A) \subseteq \phi_B(C))].$$

B 

Filtros en $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \subseteq)$



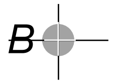
$\gamma_B(A) \subseteq A \subseteq \phi_B(A),$

$\gamma_B(\gamma_B(A)) = \gamma_B(A),$

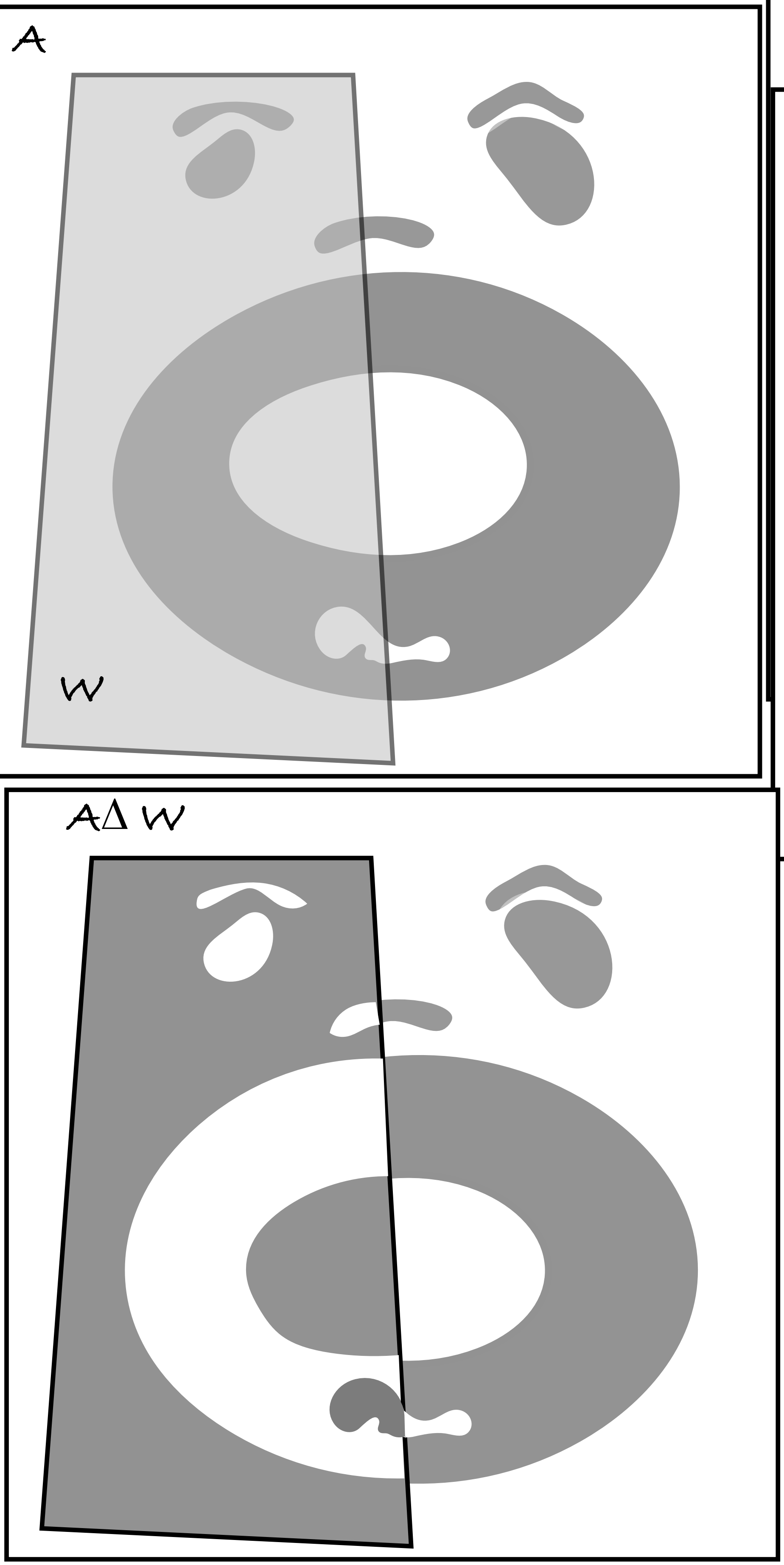
$\phi_B(\phi_B(A)) = \phi_B(A) \ \forall A \in \mathcal{P}(E)$.

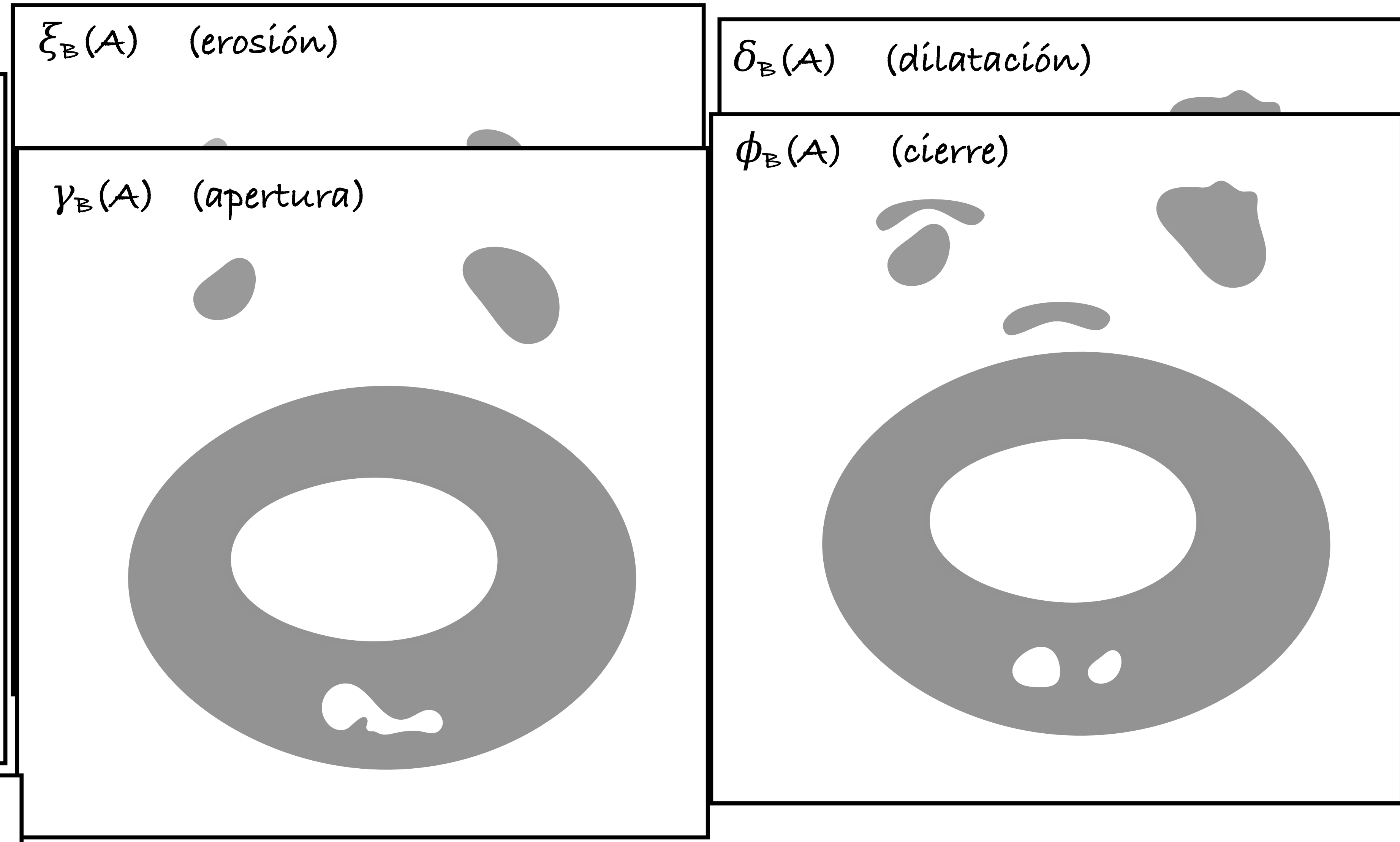
$(A \subseteq C) \Rightarrow [(\gamma_B(A) \subseteq \gamma_B(C))\ \&$

$(\phi_B(A) \subseteq \phi_B(C))].$

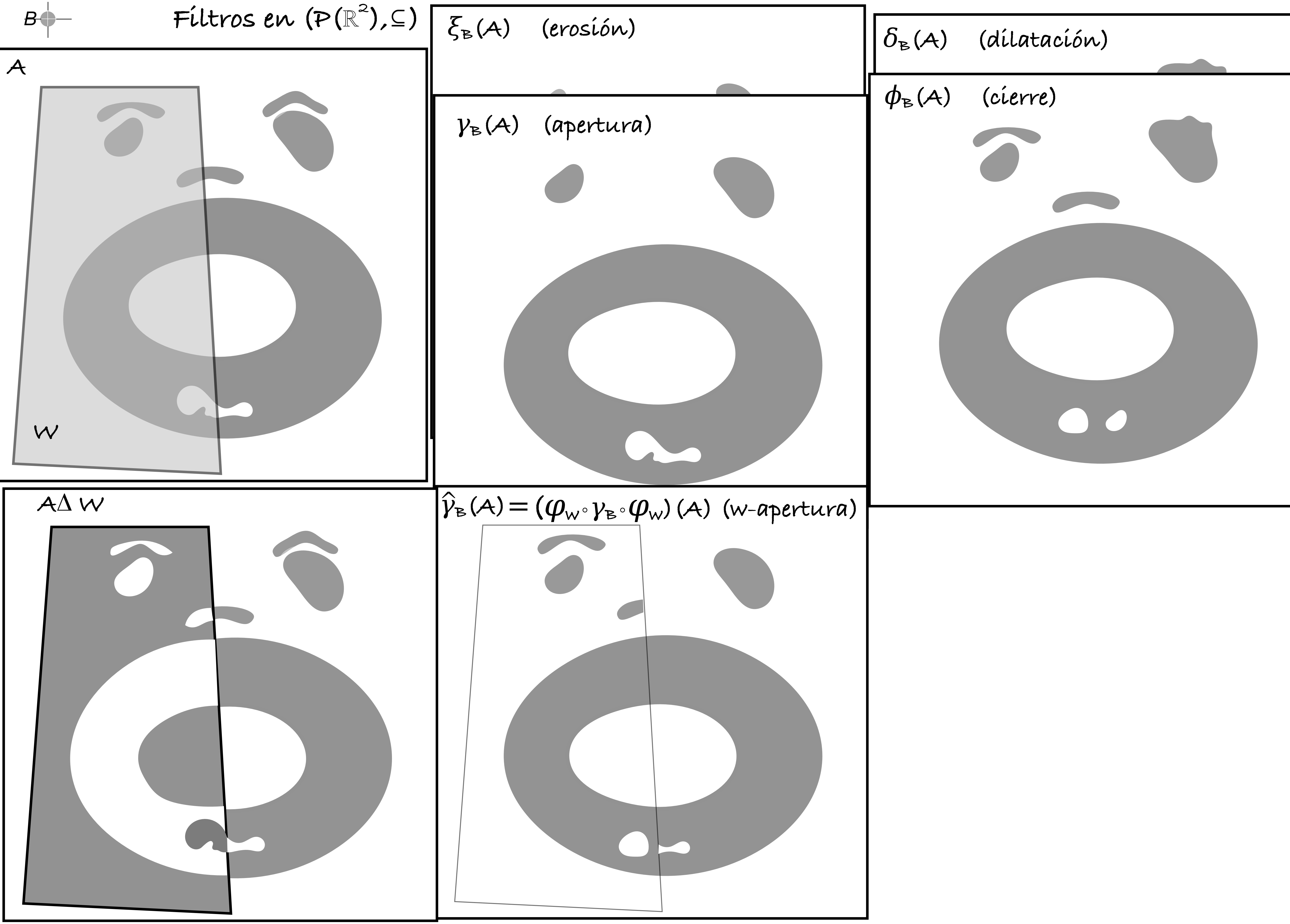


Filtros en $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2),\subseteq)$

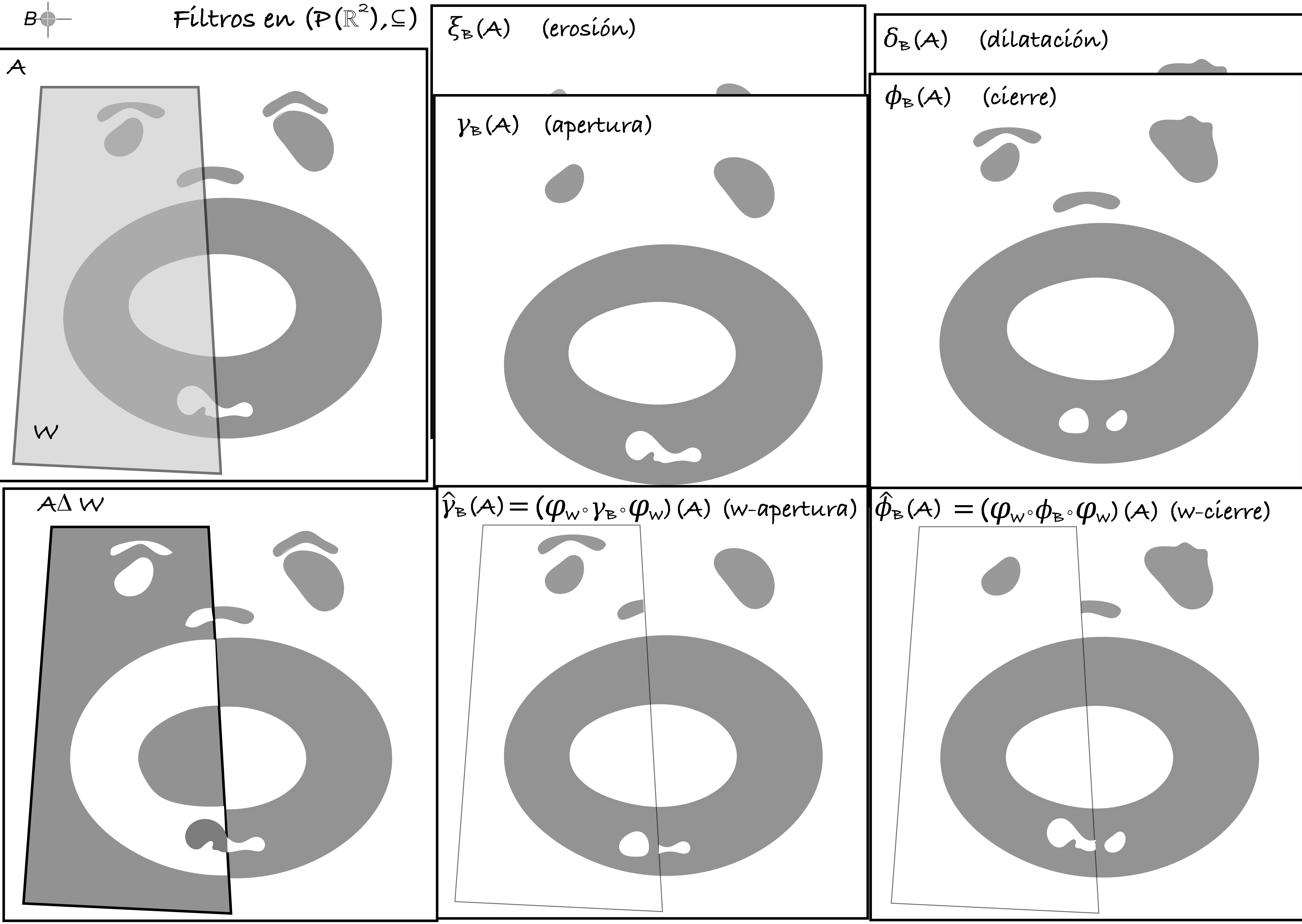




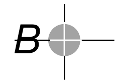
Fíltros en $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2),\subseteq)$



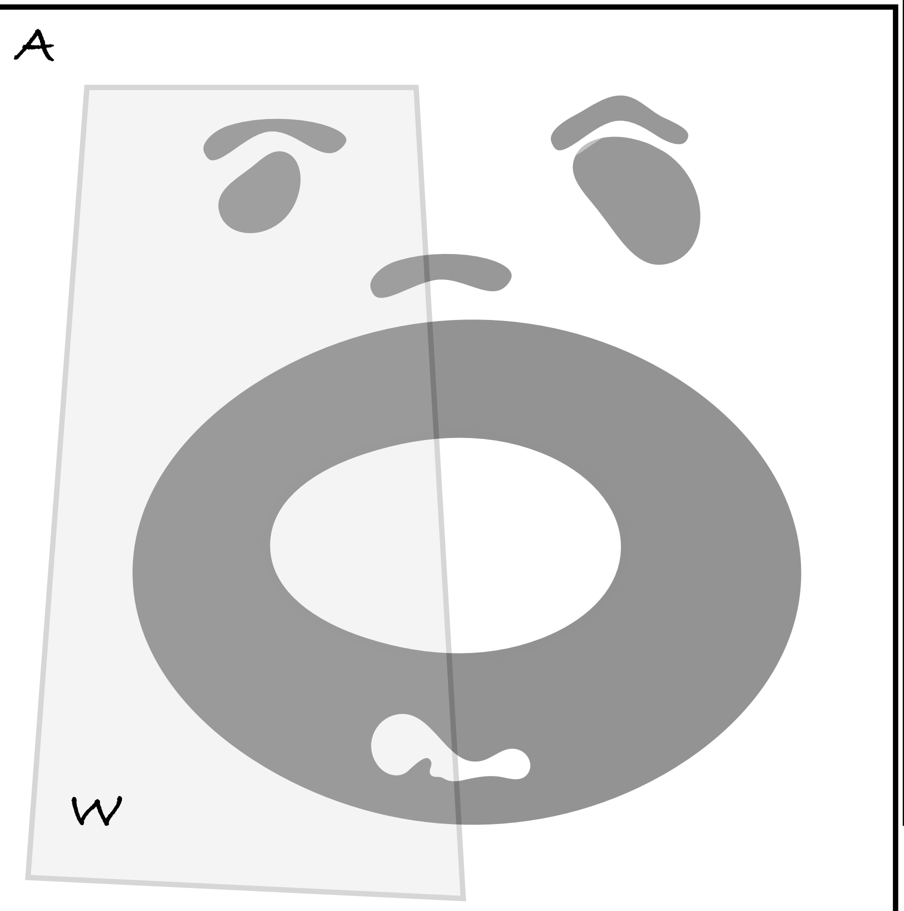
W-fíltros en $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2),\sqsubseteq^W)$



W-filtros en $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2),\sqsubseteq^W)$

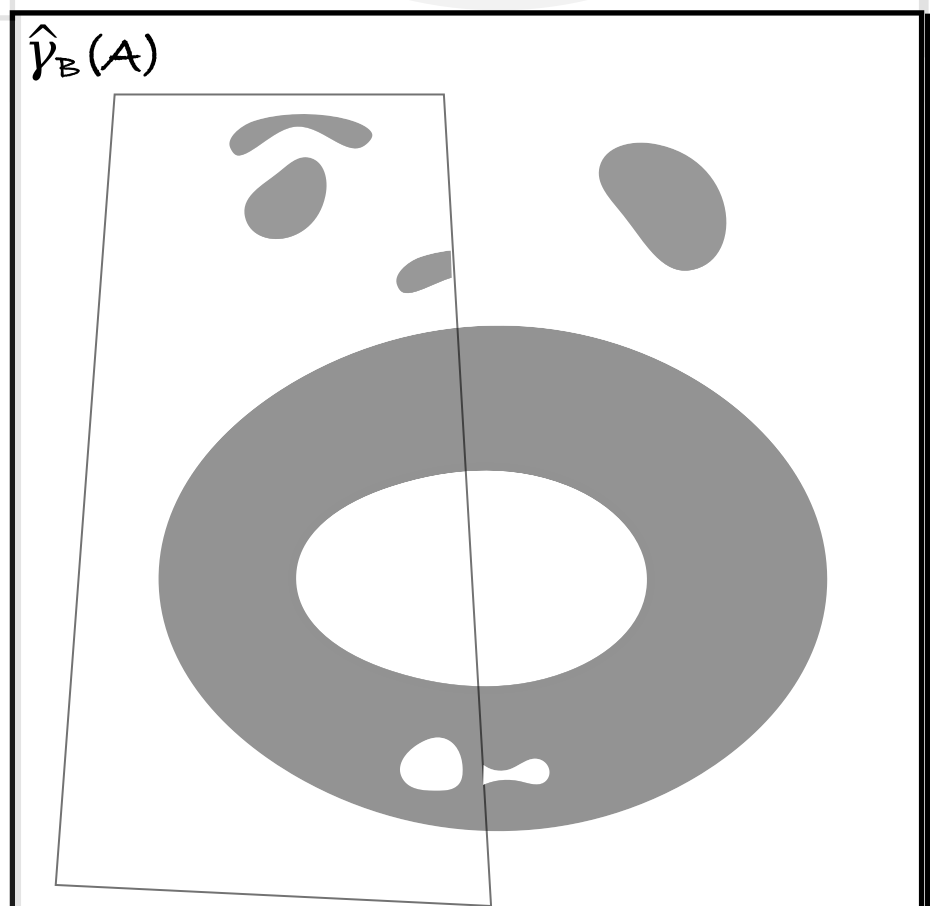


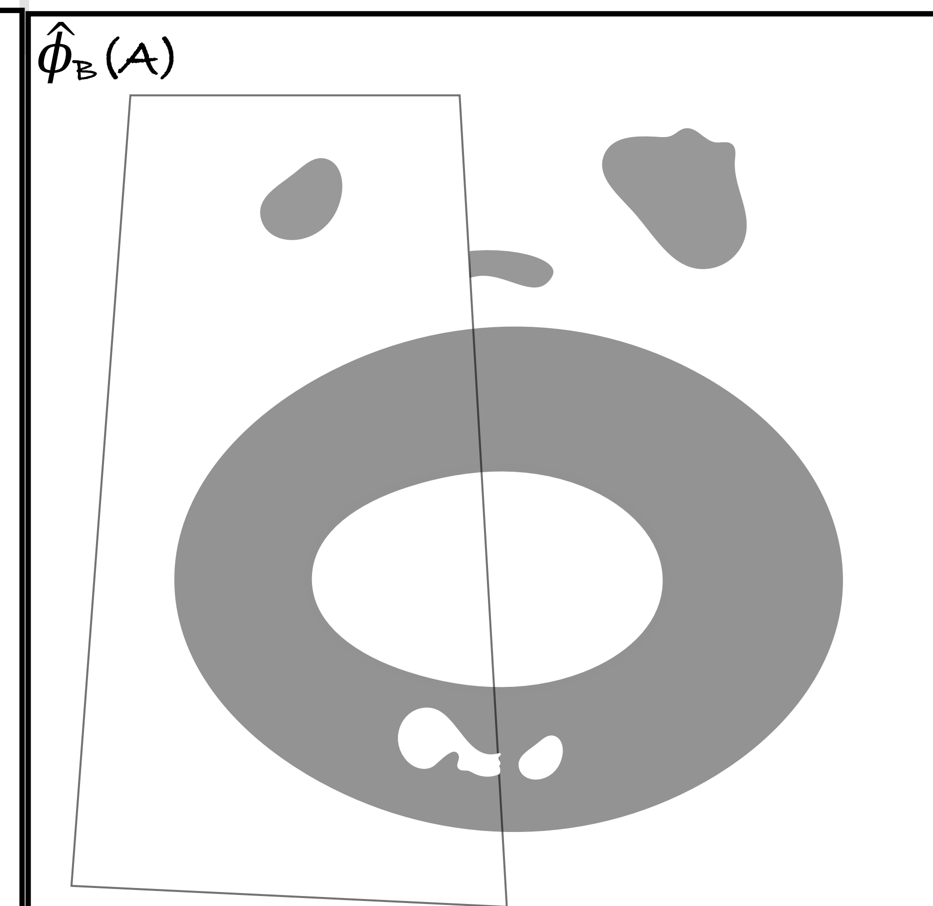
Filtros en $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \subseteq)$



$$\gamma_B(A) \subseteq A \subseteq \phi_B(A),$$
$$\gamma_B(\gamma_B(A)) = \gamma_B(A),$$
$$\phi_B(\phi_B(A)) = \phi_B(A) \ \forall A \in \mathcal{P}(E).$$
$$(A \subseteq C) \Rightarrow [(\gamma_B(A) \subseteq \gamma_B(C)) \,\&$$
$$(\phi_B(A) \subseteq \phi_B(C))].$$

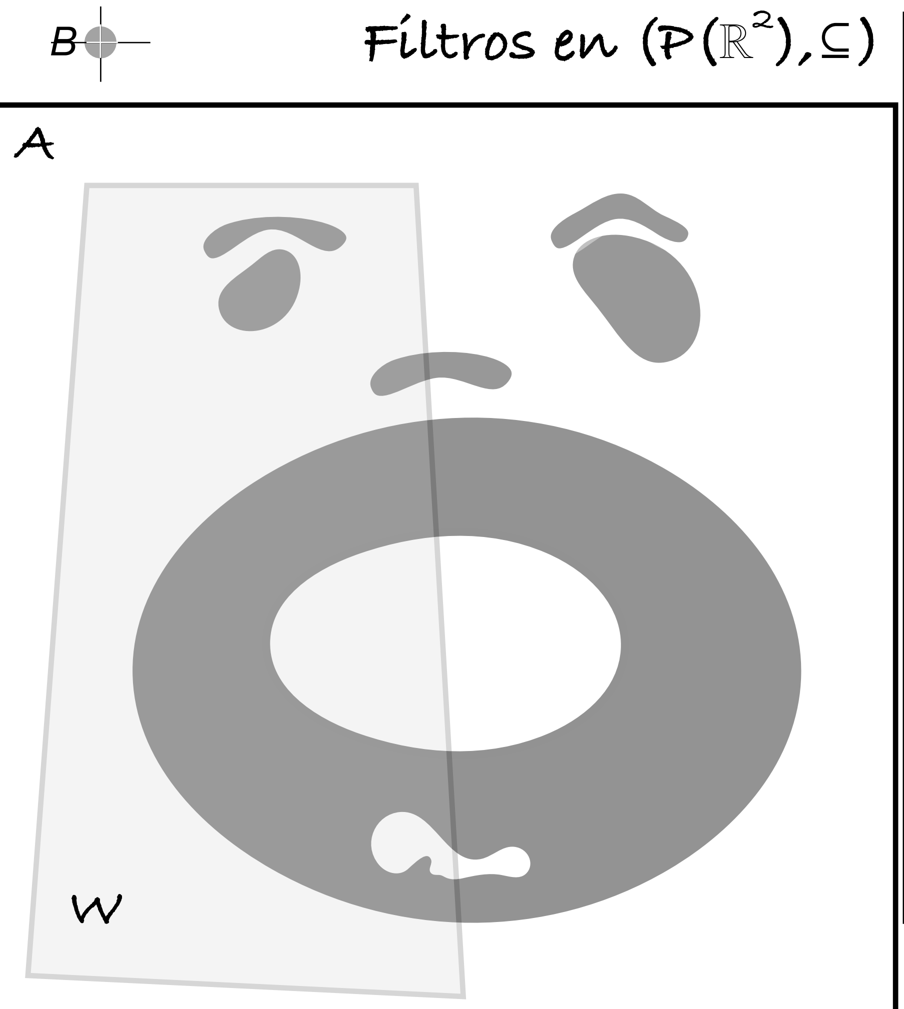
$$\hat{\gamma}_B(A) \sqsubseteq^W A \sqsubseteq^W \hat{\phi}_B(A),$$
$$\hat{\gamma}_B(\hat{\gamma}_B(A)) = \hat{\gamma}_B(A),$$
$$\hat{\phi}_B(\hat{\phi}_B(A)) = \hat{\phi}_B(A) \ \forall A \in \mathcal{P}(E).$$
$$(A \sqsubseteq^W C) \Rightarrow [(\hat{\gamma}_B(A) \sqsubseteq^W \hat{\gamma}_B(C)) \,\&$$
$$(\hat{\phi}_B(A) \sqsubseteq^W \hat{\phi}_B(C))].$$

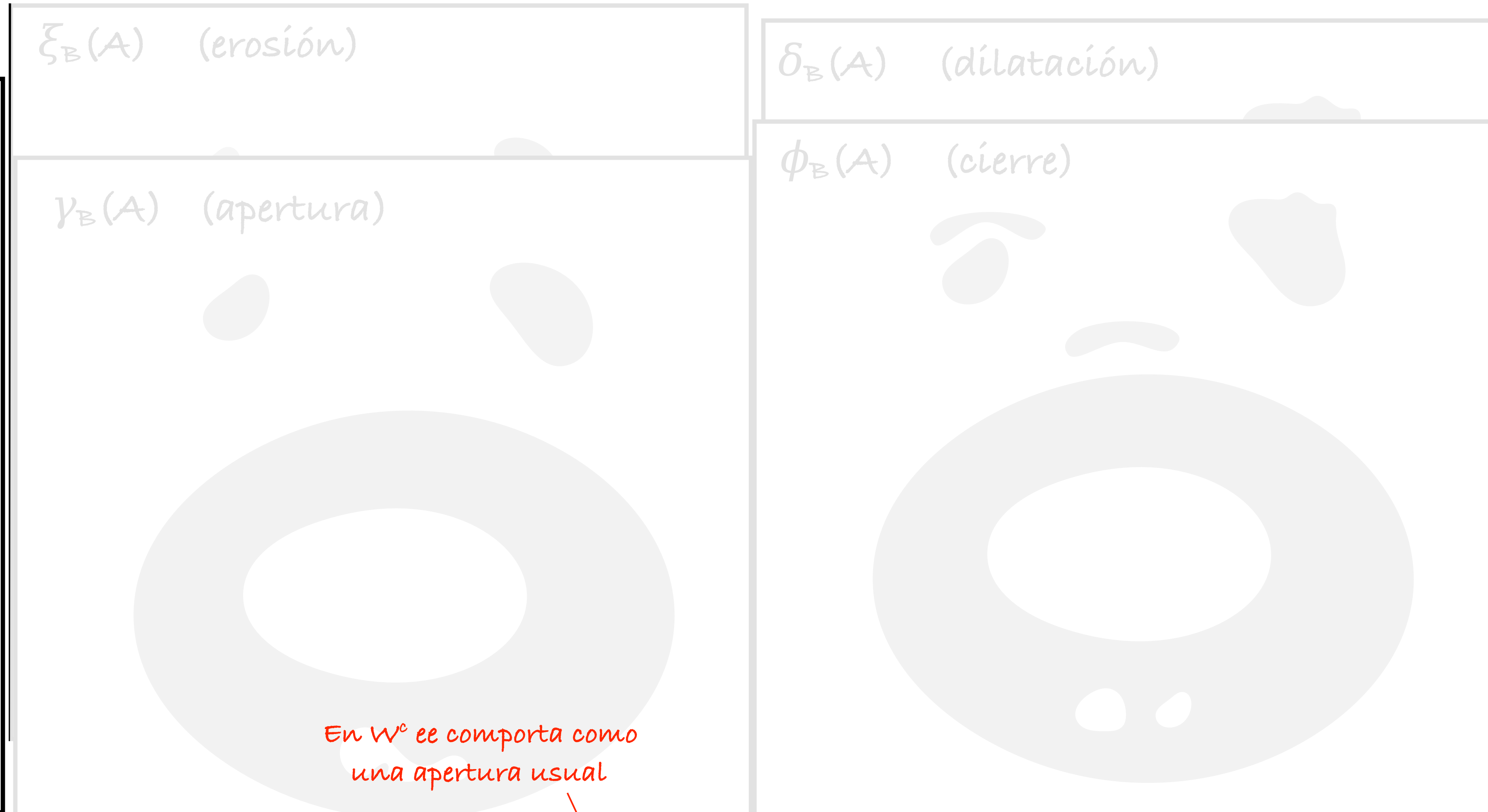




W-filtros en $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2), \sqsubseteq^W)$

Filtros en $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2),\subseteq)$

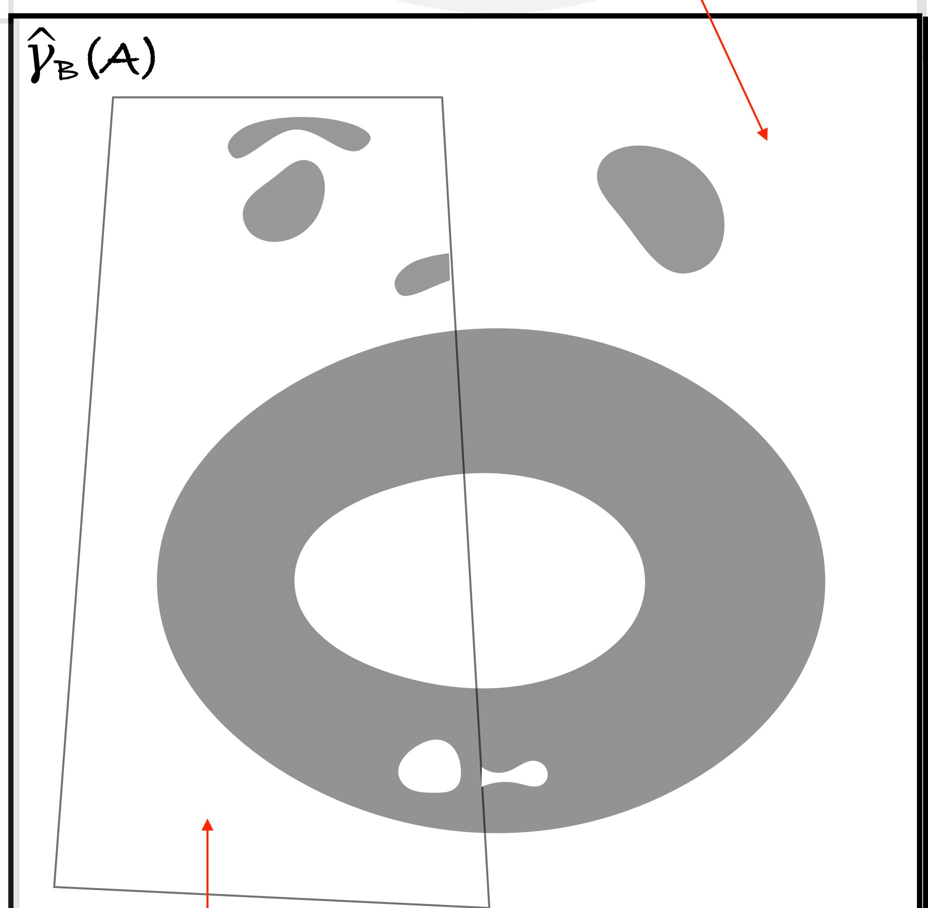


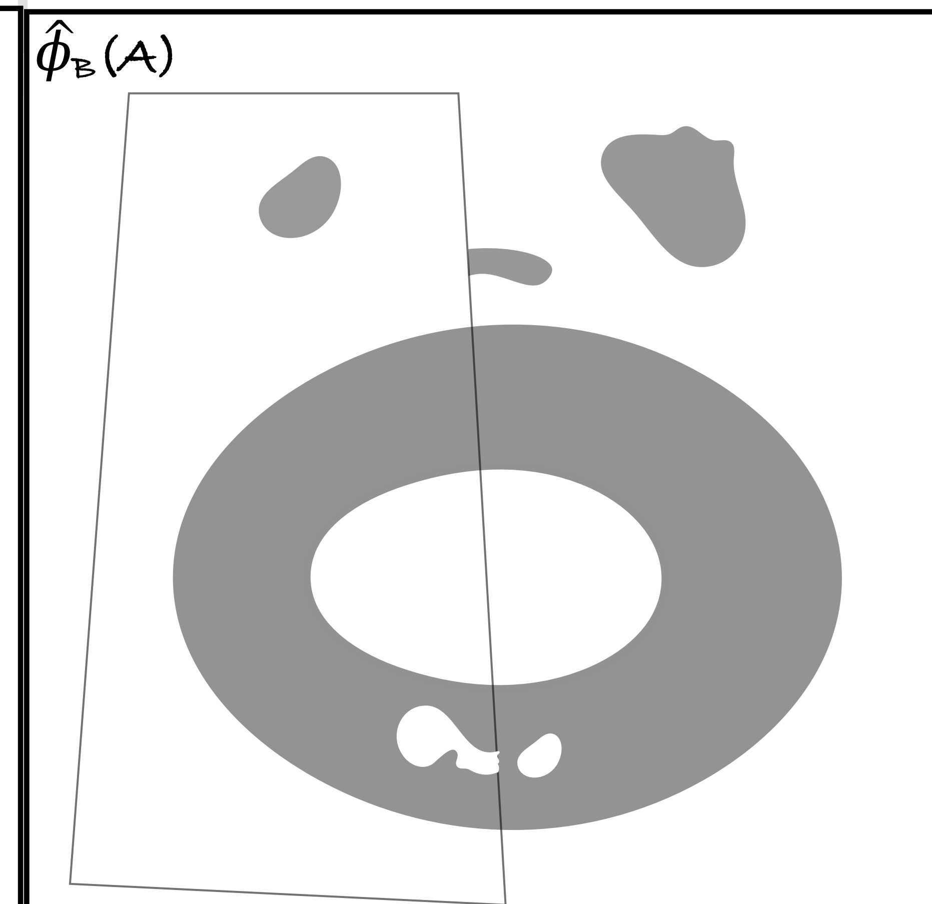


$$\gamma_B(A) \subseteq A \subseteq \phi_B(A),$$
$$\gamma_B(\gamma_B(A)) = \gamma_B(A),$$
$$\phi_B(\phi_B(A)) = \phi_B(A)\ \forall A\in\mathcal{P}(E).$$
$$(A \subseteq C)\Rightarrow[(\gamma_B(A) \subseteq \gamma_B(C))\ \&\ (\phi_B(A) \subseteq \phi_B(C))].$$

$$\hat{\gamma}_B(A) \sqsubseteq^W A \sqsubseteq^W \hat{\phi}_B(A),$$
$$\hat{\gamma}_B(\hat{\gamma}_B(A)) = \hat{\gamma}_B(A),$$
$$\hat{\phi}_B(\hat{\phi}_B(A)) = \hat{\phi}_B(A)\ \forall A\in\mathcal{P}(E).$$
$$(A \sqsubseteq^W C)\Rightarrow[(\hat{\gamma}_B(A) \sqsubseteq^W \hat{\gamma}_B(C))\ \&\ (\hat{\phi}_B(A) \sqsubseteq^W \hat{\phi}_B(C))].$$

En W^c se comporta como una apertura usual



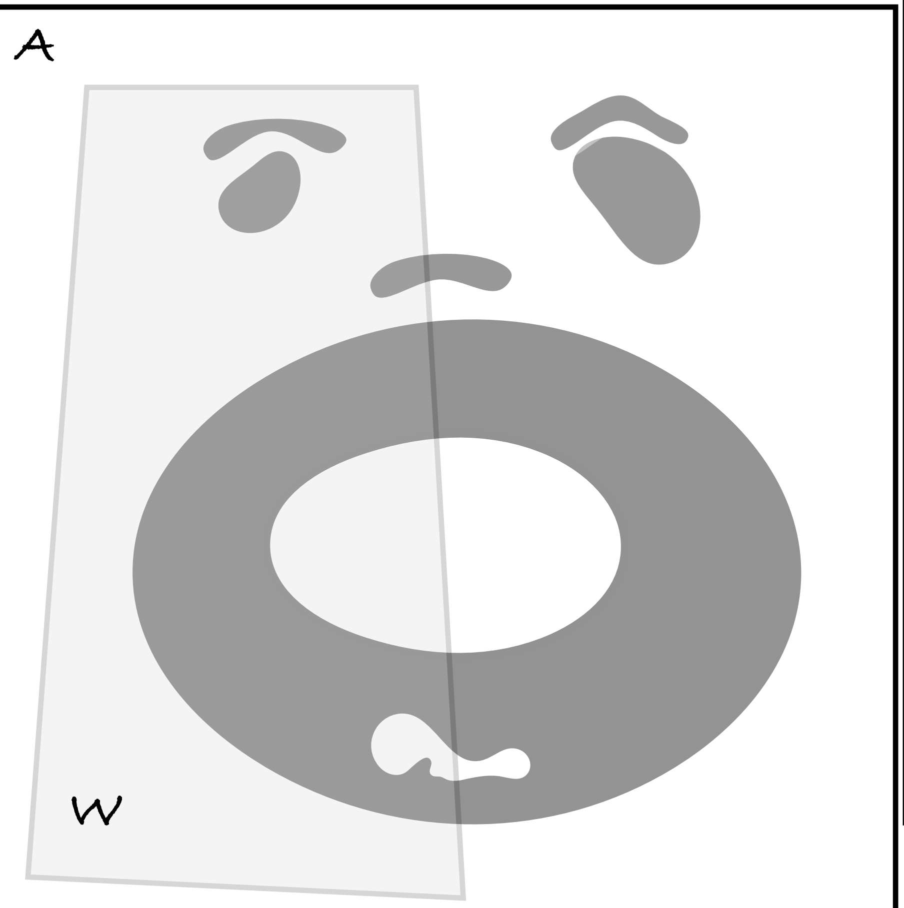


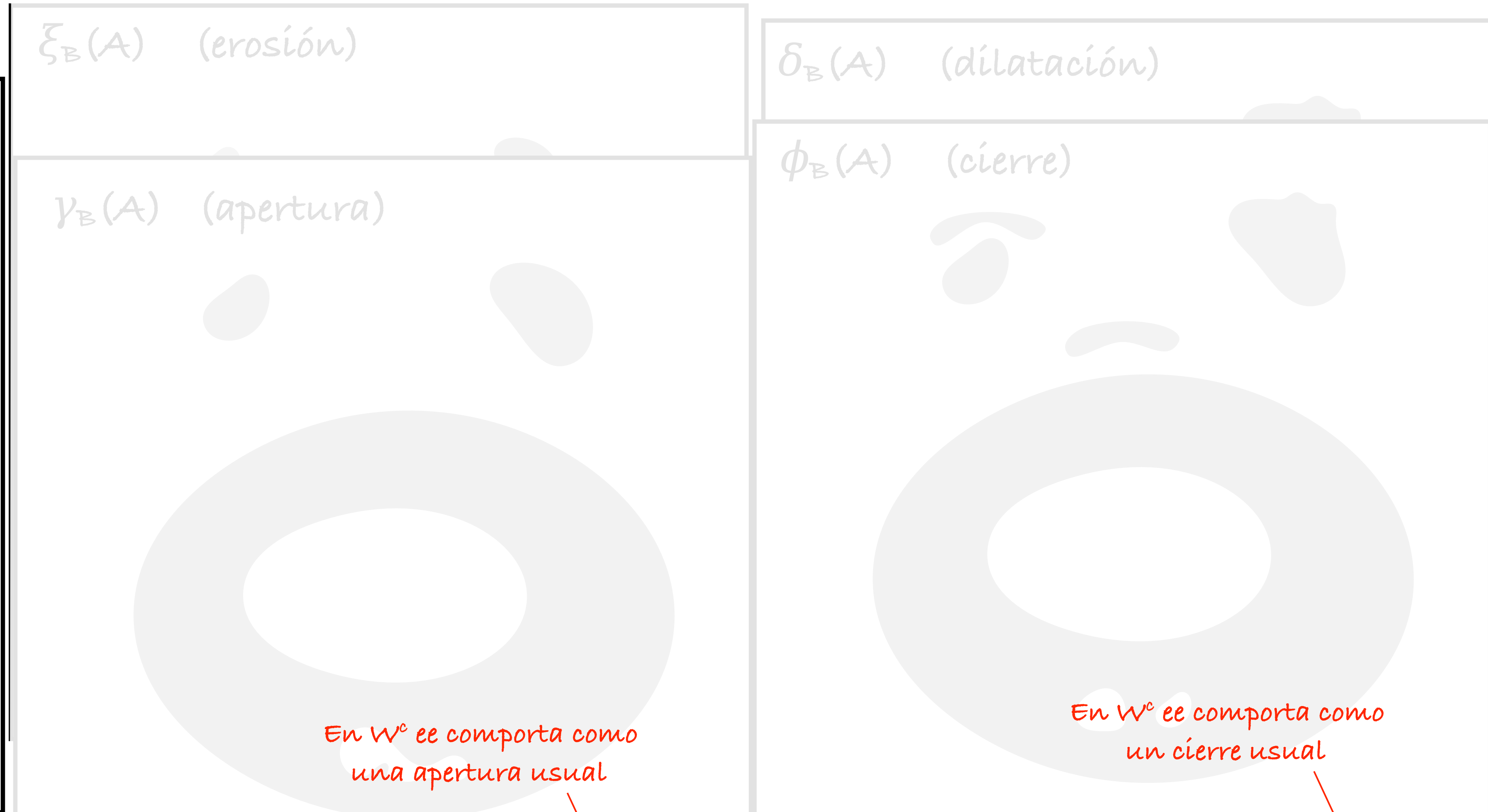
En W se comporta como un cierre usual

W-filtros en $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2),\sqsubseteq^W)$

B

Filtros en $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2),\subseteq)$





En W^c se comporta como una apertura usual

En W^c se comporta como un cierre usual

$\gamma_B(A) \subseteq A \subseteq \phi_B(A),$

$\gamma_B(\gamma_B(A)) = \gamma_B(A),$

$\phi_B(\phi_B(A)) = \phi_B(A)\ \forall A \in \mathcal{P}(E).$

$(A \subseteq C) \Rightarrow [(\gamma_B(A) \subseteq \gamma_B(C))\ \&$

$(\phi_B(A) \subseteq \phi_B(C))].$

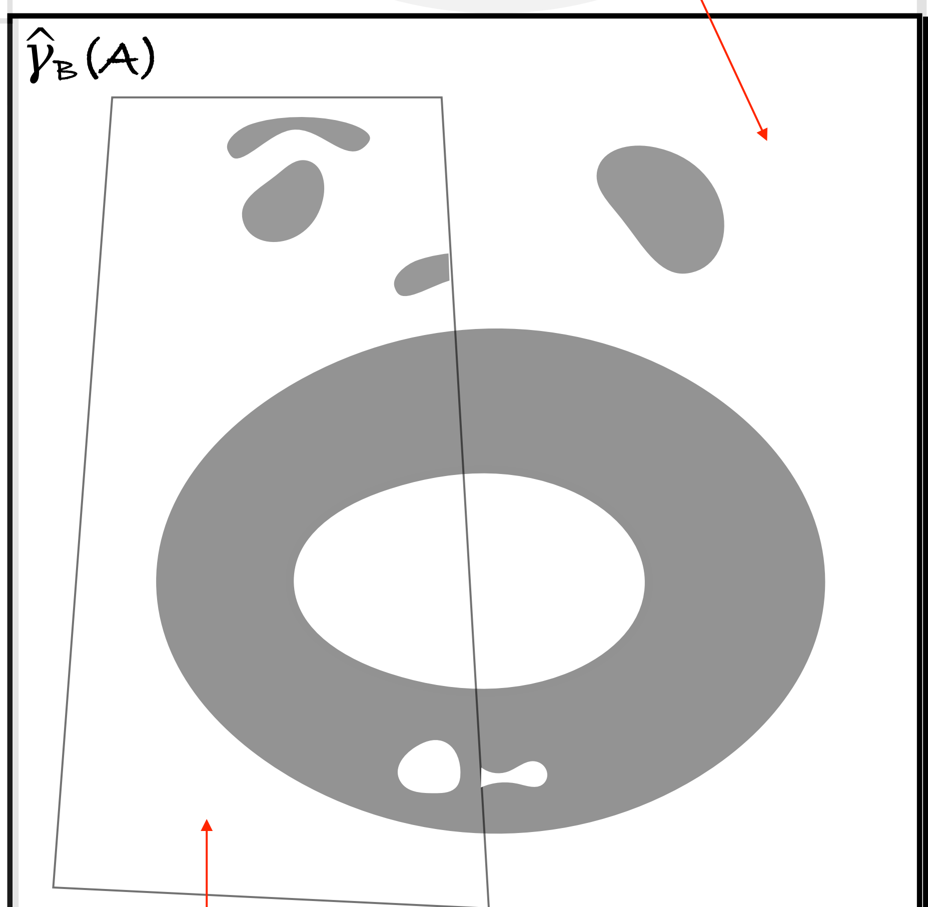
$\hat{\gamma}_B(A) \sqsubseteq^W A \sqsubseteq^W \hat{\phi}_B(A),$

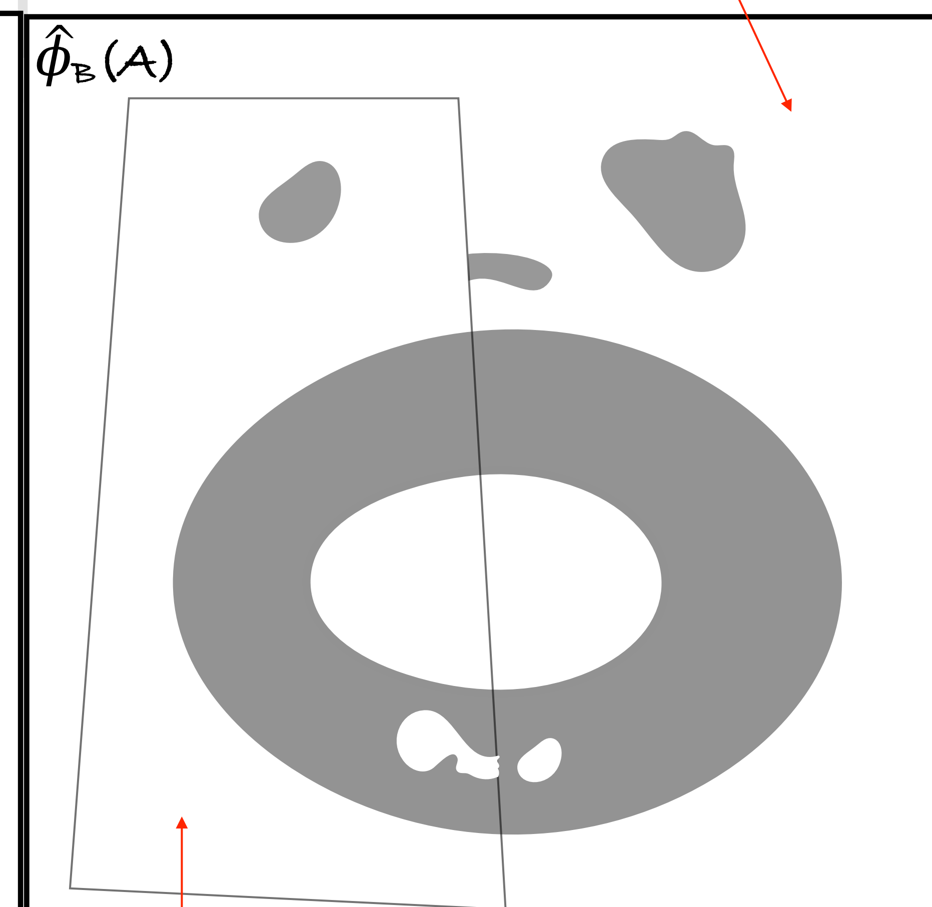
$\hat{\gamma}_B(\hat{\gamma}_B(A)) = \hat{\gamma}_B(A),$

$\hat{\phi}_B(\hat{\phi}_B(A)) = \hat{\phi}_B(A)\ \forall A \in \mathcal{P}(E).$

$(A \sqsubseteq^W C) \Rightarrow [(\hat{\gamma}_B(A) \sqsubseteq^W \hat{\gamma}_B(C))\ \&$

$(\hat{\phi}_B(A) \sqsubseteq^W \hat{\phi}_B(C))].$





En W se comporta como un cierre usual

En W se comporta como una apertura usual

W-filtros en $(\mathcal{P}(\mathbb{R}^2),\sqsubseteq^W)$

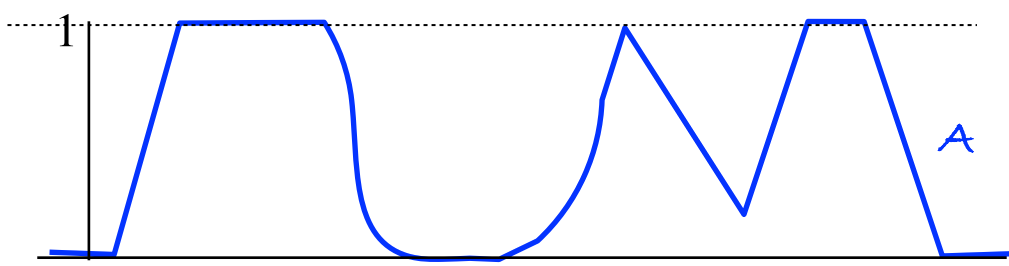
Extensiones del núcleo Ker(A) y del soporte Sop(A) de un subconjunto L-borroso A en el álgebra $(P(E), \sqsubseteq^{W}, \sqcap^{W}, \sqcup^{W}, W, W^{c}), {}^{c})$

<u>NÚCLEO</u> $Ker:(L^E,\leq)\rightarrow(P(E),\subseteq)$ tal que $Ker(A)=\{x\in E \,/\, A(x)=1\}=A_1 \quad \forall A\in L^E$

$Ker(A\cdot B)=Ker(A)\cap Ker(B)$, $Ker(\prod_{s\in S} A_s)=\bigcap_{s\in S} Ker(A_s) \quad \forall S$ conjunto de índices. (Ker es una <u>erosión morfológica</u>)

<u>NÚCLEO</u> $Ker:(L^E,\leq)\rightarrow(P(E),\subseteq)$ tal que $Ker(A)=\{x\in E \,/\, A(x)=1\}=A_1 \quad \forall A\in L^E$

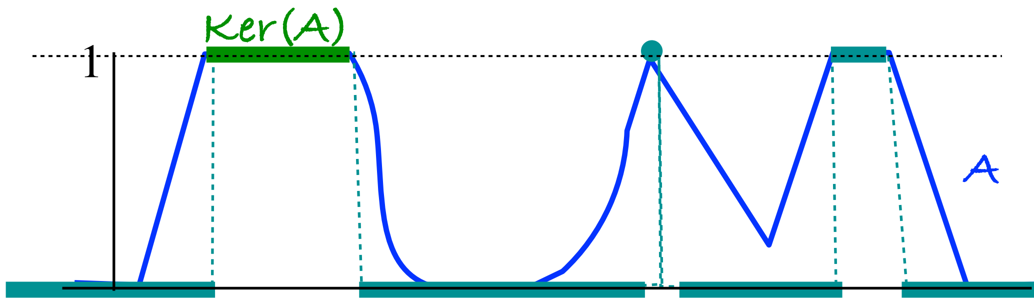
$Ker(A\cdot B)=Ker(A)\cap Ker(B)$, $Ker(\prod_{s\in S} A_s)=\bigcap_{s\in S} Ker(A_s) \quad \forall S$ conjunto de índices. (Ker es una <u>erosión morfológica</u>)



$L=[0,1]$ y $E=\mathbb{R}$

<u>NÚCLEO</u> $Ker: (L^E, \leq) \rightarrow (P(E), \subseteq)$ tal que $Ker(A) = \{x \in E \,/\, A(x) = 1\} = A_1 \quad \forall A \in L^E$

$Ker(A \cdot B) = Ker(A) \cap Ker(B)$, $Ker(\prod_{s \in S} A_s) = \bigcap_{s \in S} Ker(A_s) \quad \forall S$ conjunto de índices. (Ker es una <u>erosión morfológica</u>)

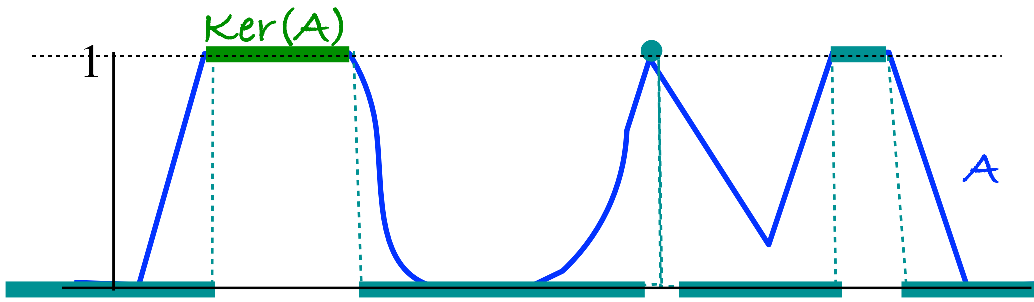


$L = [0,1]$ y $E = \mathbb{R}$

<u>NÚCLEO</u> $Ker:(L^E,\leq)\to(P(E),\subseteq)$ tal que $Ker(A)=\{x\in E\ /\ A(x)=1\}=A_1\quad \forall A\in L^E$

¡$(P(E),\subseteq)$ incluido en $(L^E,\leq)$)!

$Ker(A\cdot B)=Ker(A)\cap Ker(B)$, $Ker(\prod_{s\in S} A_s)=\bigcap_{s\in S} Ker(A_s)\quad \forall S$ conjunto de índices. (Ker es una <u>erosión morfológica</u>)



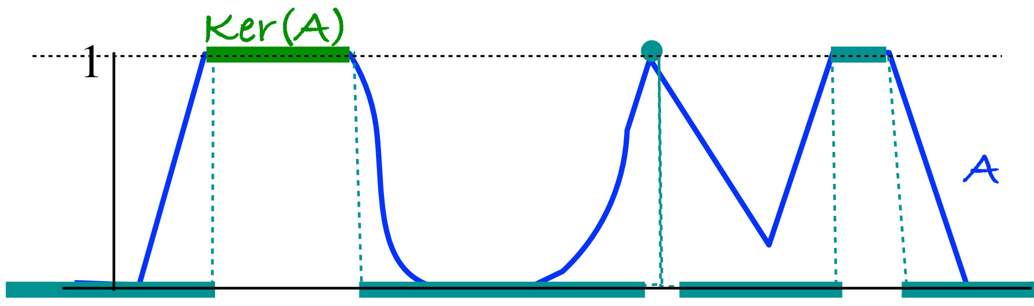
$L=[0,1]$ y $E=\mathbb{R}$

NÚCLEO $(\mathrm{Ker}: (L^E,\leq) \rightarrow (L^E,\leq))$, tal que $\mathrm{Ker}(A) = \{x \in E \,/\, A(x) = 1\} = A_1 \quad \forall A \in L^E$

¡$(P(E),\subseteq)$ incluido en $(L^E,\leq)$!

$\mathrm{Ker}(A \cdot B) = \mathrm{Ker}(A) \cap \mathrm{Ker}(B)$, $\mathrm{Ker}(\prod_{s\in S} A_s) = \bigcap_{s\in S} \mathrm{Ker}(A_s) \quad \forall S$ conjunto de índices. (Ker es una erosión morfológica)

$A \leq B \Rightarrow (\mathrm{Ker}(A) \subseteq \mathrm{Ker}(B))$, $\mathrm{Ker}(\mathrm{Ker}(A)) = \mathrm{Ker}(A)$, $\mathrm{Ker}(A) \leq A \quad \forall A \in L^E$ (Ker es apertura morfológica en $(L^E,\leq)$)



$L = [0,1]$ y $E = \mathbb{R}$

¡$(\mathcal{P}(E),\subseteq)$ incluido en $(L^E,\leq)$)!

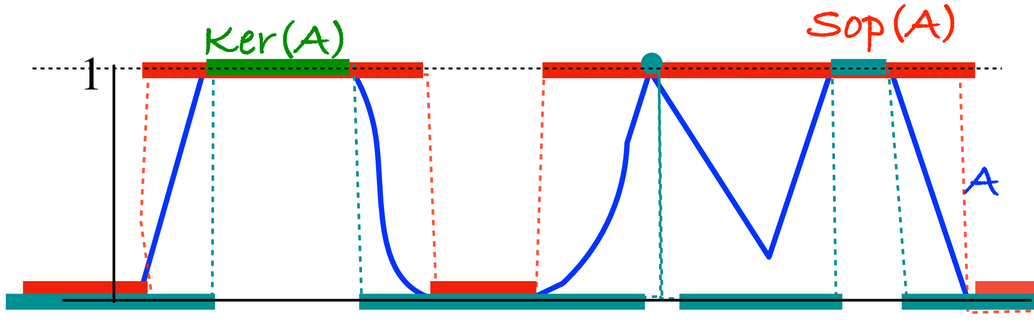
NÚCLEO $(Ker: (L^E,\leq) \rightarrow (L^E,\leq))$, tal que $Ker(A)=\{x\in E \,/\, A(x)=1\}=A_1$ $\forall A\in L^E$

$Ker(A\cdot B)=Ker(A)\cap Ker(B)$, $Ker(\prod_{s\in S} A_s)=\bigcap_{s\in S} Ker(A_s)$ $\forall S$ conjunto de índices. (Ker es una erosión morfológica)

$A\leq B \Rightarrow (Ker(A)\subseteq Ker(B))$, $Ker(Ker(A))=Ker(A)$, $Ker(A)\leq A$ $\forall A\in L^E$ (Ker es apertura morfológica en $(L^E,\leq)$)

SOPORTE $Sop: (L^E,\leq) \rightarrow (\mathcal{P}(E),\subseteq)$, tal que $Sop(A)=\{x\in E \,/\, A(x)>0\}=A^*_0$ $\forall A\in L^E$

$Sop(A+B)=Sop(A)\cup Sop(B)$, $Sop(\sum_{s\in S} A_s)= \bigcup_{s\in S} Sop(A_s)$ $\forall S$ conjunto de índices. (Sop es una dilatación morfológica)



$L=[0,1]$ y $E=\mathbb{R}$

¡$(\mathcal{P}(E),\subseteq)$ incluido en $(L^E,\leq)$!

<u>NÚCLEO</u> $(Ker: (L^E,\leq) \rightarrow (L^E,\leq))$, tal que $Ker(A) = \{x \in E \,/\, A(x) = 1\} = A_1 \quad \forall A \in L^E$

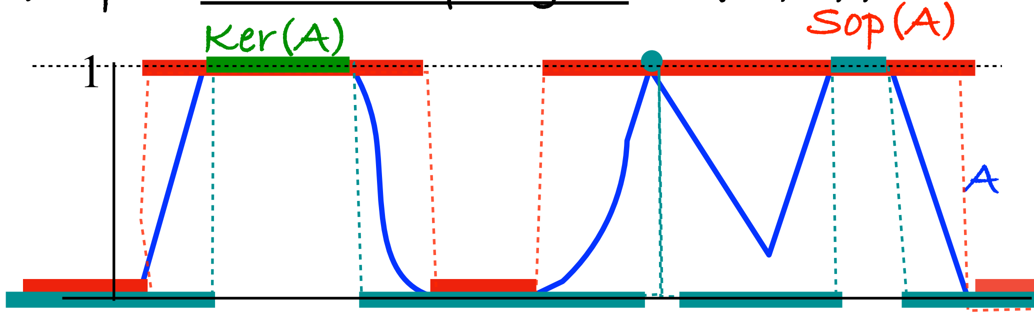
$Ker(A \cdot B) = Ker(A) \cap Ker(B)$, $Ker(\prod_{s \in S} A_s) = \bigcap_{s \in S} Ker(A_s) \quad \forall S$ conjunto de índices. (Ker es una <u>erosión morfológica</u>)

$A \leq B \Rightarrow (Ker(A) \subseteq Ker(B))$, $Ker(Ker(A)) = Ker(A)$, $Ker(A) \leq A \quad \forall A \in L^E$ (Ker es <u>apertura morfológica</u> en $(L^E,\leq)$)

<u>SOPORTE</u> $(Sop: (L^E,\leq) \rightarrow (L^E,\leq))$, tal que $Sop(A) = \{x \in E \,/\, A(x) > 0\} = A^*_0 \quad \forall A \in L^E$

$Sop(A+B) = Sop(A) \cup Sop(B)$, $Sop(\sum_{s \in S} A_s) = \bigcup_{s \in S} Sop(A_s) \quad \forall S$ conjunto de índices. (Sop es una <u>dilatación morfológica</u>)

$A \leq B \Rightarrow (Sop(A) \subseteq Sop(B))$, $Sop(Sop(A)) = Sop(A)$, $A \leq Sop(A) \quad \forall A \in L^E$ (Sop es <u>cierre morfológico</u> en $(L^E,\leq)$)



$L = [0,1]$ y $E = \mathbb{R}$

¡$(\mathcal{P}(E),\subseteq)$ incluido en $(L^E,\leq)$)!

<u>NÚCLEO</u> $(Ker: (L^E,\leq)\rightarrow (L^E,\leq))$, tal que $Ker(A)=\{x\in E \,/\, A(x)=1\}=A_1 \quad \forall A\in L^E$

$Ker(A\cdot B)=Ker(A)\cap Ker(B)$, $Ker(\prod_{s\in S} A_s)=\bigcap_{s\in S} Ker(A_s) \quad \forall S$ conjunto de índices. (Ker es una <u>erosión morfológica</u>)

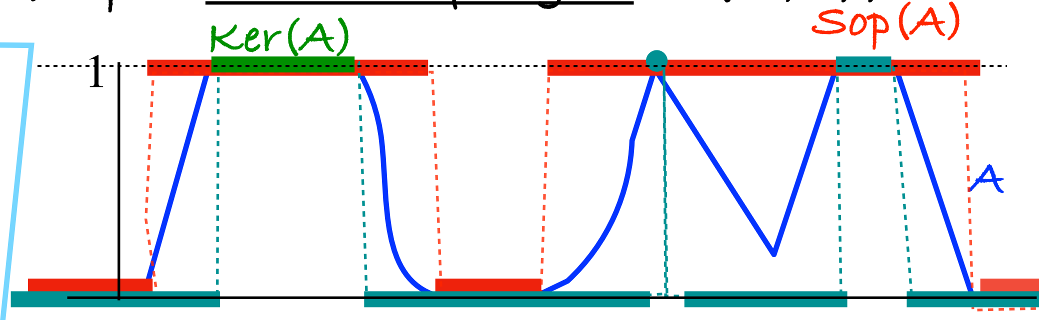
$A\leq B \Rightarrow (Ker(A)\subseteq Ker(B))$, $Ker(Ker(A))=Ker(A)$, $Ker(A)\leq A \quad \forall A\in L^E$ (Ker es <u>apertura morfológica</u> en $(L^E,\leq)$)

<u>SOPORTE</u> $(Sop: (L^E,\leq)\rightarrow (L^E,\leq))$, tal que $Sop(A)=\{x\in E \,/\, A(x)>0\}=A^*_0 \quad \forall A\in L^E$

$Sop(A+B)=Sop(A)\cup Sop(B)$, $Sop(\sum_{s\in S} A_s)=\bigcup_{s\in S} Sop(A_s) \quad \forall S$ conjunto de índices. (Sop es una <u>dilatación morfológica</u>)

$A\leq B \Rightarrow (Sop(A)\subseteq Sop(B))$, $Sop(Sop(A))=Sop(A)$, $A\leq Sop(A) \quad \forall A\in L^E$ (Sop es <u>cierre morfológico</u> en $(L^E,\leq)$)

$Ker(M)=Sop(M)=M \quad \forall M\in \mathcal{P}(E)$



$L=[0,1]$ y $E=\mathbb{R}$

NÚCLEO $(Ker:(L^E,\leq)\rightarrow(L^E,\leq))$, tal que $Ker(A)=\{x\in E \,/\, A(x)=1\}=A_1\ \ \forall A\in L^E$

¡$(P(E),\subseteq)$ incluido en $(L^E,\leq)$!

$Ker(A\cdot B)=Ker(A)\cap Ker(B)$, $Ker(\prod_{s\in S}A_s)=\bigcap_{s\in S}Ker(A_s)\ \ \forall S$ conjunto de índices. (Ker es una erosión morfológica)

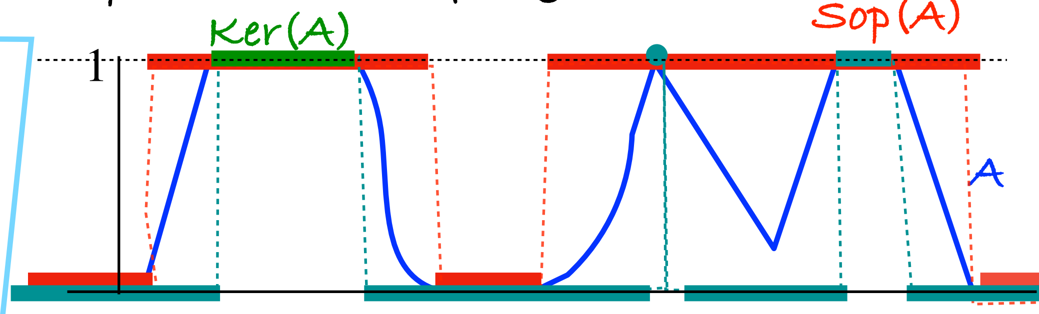
$A\leq B\Rightarrow(Ker(A)\subseteq Ker(B))$, $Ker(Ker(A))=Ker(A)$, $Ker(A)\leq A\ \ \forall A\in L^E$ (Ker es apertura morfológica en $(L^E,\leq)$)

SOPORTE $(Sop:(L^E,\leq)\rightarrow(L^E,\leq))$, tal que $Sop(A)=\{x\in E \,/\, A(x)>0\}=A^*_0\ \ \forall A\in L^E$

$Sop(A+B)=Sop(A)\cup Sop(B)$, $Sop(\sum_{s\in S}A_s)=\bigcup_{s\in S}Sop(A_s)\ \ \forall S$ conjunto de índices. (Sop es una dilatación morfológica)

$A\leq B\Rightarrow(Sop(A)\subseteq Sop(B))$, $Sop(Sop(A))=Sop(A)$, $A\leq Sop(A)\ \ \forall A\in L^E$ (Sop es cierre morfológico en $(L^E,\leq)$)

$Ker(M)=Sop(M)=M\ \ \forall M\in P(E)$



$L=[0,1]$ y $E=\mathbb{R}$

Sea $W\in L^E$ tal que $W'=W^c$. Las álgebras $((L^E,\leq,\cdot,+,\emptyset,E),')$ y $(L^E,\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W,W,W^c),')$ son isomorfas.

NÚCLEO $(\mathrm{Ker}:(L^E,\le)\to(L^E,\le))$, tal que $\mathrm{Ker}(A)=\{x\in E\,/\,A(x)=1\}=A_1\ \ \forall A\in L^E$

¡$(P(E),\subseteq)$ incluido en $(L^E,\le)$!

$\mathrm{Ker}(A\cdot B)=\mathrm{Ker}(A)\cap\mathrm{Ker}(B)$, $\mathrm{Ker}(\prod_{s\in S}A_s)=\bigcap_{s\in S}\mathrm{Ker}(A_s)$ $\forall S$ conjunto de índices. (Ker es una erosión morfológica)

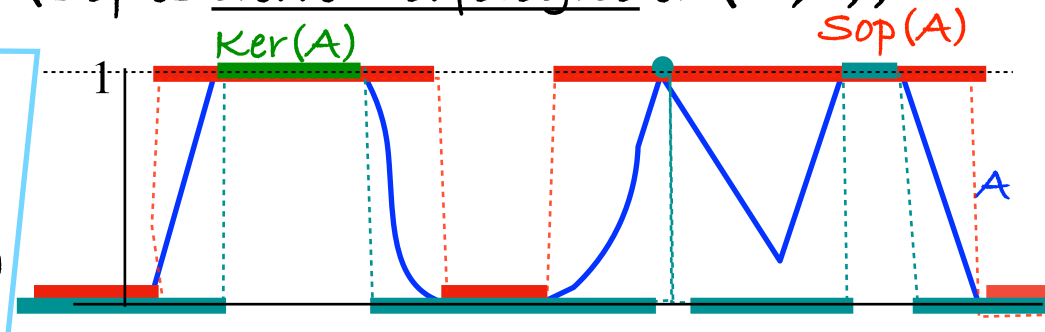
$A\le B\Rightarrow(\mathrm{Ker}(A)\subseteq\mathrm{Ker}(B))$, $\mathrm{Ker}(\mathrm{Ker}(A))=\mathrm{Ker}(A)$, $\mathrm{Ker}(A)\le A\ \ \forall A\in L^E$ (Ker es apertura morfológica en $(L^E,\le)$)

SOPORTE $(\mathrm{Sop}:(L^E,\le)\to(L^E,\le))$, tal que $\mathrm{Sop}(A)=\{x\in E\,/\,A(x)>0\}=A^*_0\ \ \forall A\in L^E$

$\mathrm{Sop}(A+B)=\mathrm{Sop}(A)\cup\mathrm{Sop}(B)$, $\mathrm{Sop}(\sum_{s\in S}A_s)=\bigcup_{s\in S}\mathrm{Sop}(A_s)$ $\forall S$ conjunto de índices. (Sop es una dilatación morfológica)

$A\le B\Rightarrow(\mathrm{Sop}(A)\subseteq\mathrm{Sop}(B))$, $\mathrm{Sop}(\mathrm{Sop}(A))=\mathrm{Sop}(A)$, $A\le\mathrm{Sop}(A)\ \ \forall A\in L^E$ (Sop es cierre morfológico en $(L^E,\le)$)

$\mathrm{Ker}(M)=\mathrm{Sop}(M)=M\ \ \forall M\in P(E)$



$L=[0,1]$ y $E=\mathbb{R}$

Sea $W\in L^E$ tal que $W'=W^c$. Las álgebras $((L^E,\le,\cdot,+,\varnothing,E),')$ y $(L^E,\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W,W,W^c),')$ son isomorfas.

Las extensiones asociadas a W: $\widehat{\mathbf{Ker}}_{(W,W)}:(L^E,\sqsubseteq^W)\to(P(E),\sqsubseteq^W))$, $\widehat{\mathbf{Sop}}_{(W,W)}:(L^E,\sqsubseteq^W)\to(P(E),\sqsubseteq^W))$ tales que

$$\widehat{\mathbf{Ker}}_{(W,W)}(A)=[\varphi_W\circ\mathrm{Ker}\circ\varphi_R](A)=[\mathrm{Ker}(A\Delta W)]\Delta W,$$
$$\widehat{\mathbf{Sop}}_{(W,W)}(A)=[\varphi_W\circ\mathrm{Sop}\circ\varphi_R](A)=[\mathrm{Sop}(A\Delta W)]\Delta W\qquad\forall A\in L^E$$

NÚCLEO $(\mathrm{Ker}:(L^E,\leq)\to(L^E,\leq))$, tal que $\mathrm{Ker}(A)=\{x\in E \,/\, A(x)=1\}=A_1 \quad \forall A\in L^E$

¡$(\mathcal{P}(E),\subseteq)$ incluido en $(L^E,\leq)$)!

$\mathrm{Ker}(A\cdot B)=\mathrm{Ker}(A)\cap\mathrm{Ker}(B)$, $\mathrm{Ker}(\prod_{s\in S}A_s)=\bigcap_{s\in S}\mathrm{Ker}(A_s)$ $\forall S$ conjunto de índices. (Ker es una <u>erosión morfológica</u>)

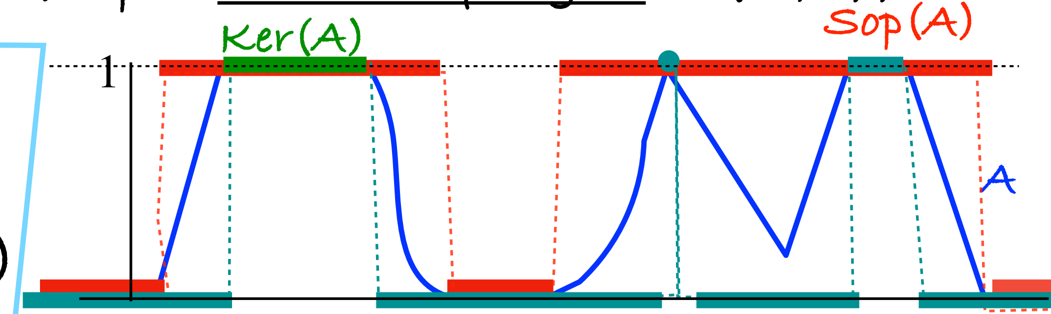
$A\leq B\Rightarrow(\mathrm{Ker}(A)\subseteq\mathrm{Ker}(B))$, $\mathrm{Ker}(\mathrm{Ker}(A))=\mathrm{Ker}(A)$, $\mathrm{Ker}(A)\leq A \quad \forall A\in L^E$ (Ker es <u>apertura morfológica</u> en $(L^E,\leq)$)

SOPORTE $(\mathrm{Sop}:(L^E,\leq)\to(L^E,\leq))$, tal que $\mathrm{Sop}(A)=\{x\in E \,/\, A(x)>0\}=A^*_0 \quad \forall A\in L^E$

$\mathrm{Sop}(A+B)=\mathrm{Sop}(A)\cup\mathrm{Sop}(B)$, $\mathrm{Sop}(\sum_{s\in S}A_s)=\bigcup_{s\in S}\mathrm{Sop}(A_s)$ $\forall S$ conjunto de índices. (Sop es una <u>dilatación morfológica</u>)

$A\leq B\Rightarrow(\mathrm{Sop}(A)\subseteq\mathrm{Sop}(B))$, $\mathrm{Sop}(\mathrm{Sop}(A))=\mathrm{Sop}(A)$, $A\leq\mathrm{Sop}(A) \quad \forall A\in L^E$ (Sop es <u>cierre morfológico</u> en $(L^E,\leq)$)

$\mathrm{Ker}(M)=\mathrm{Sop}(M)=M \quad \forall M\in\mathcal{P}(E)$



$L=[0,1]$ y $E=\mathbb{R}$

Sea $W\in L^E$ tal que $W'=W^c$. Las álgebras $((L^E,\leq,\cdot,+,\varnothing,E),')$ y $((L^E,\sqsubseteq^W,\sqcap^W,\sqcup^W,W,W^c),')$ son isomorfas.

Las extensiones asociadas a W: $\widehat{\mathbf{Ker}}_{(W,W)}:(L^E,\sqsubseteq^W)\to(\mathcal{P}(E),\sqsubseteq^W))$, $\widehat{\mathbf{Sop}}_{(W,W)}:(L^E,\sqsubseteq^W)\to(\mathcal{P}(E),\sqsubseteq^W))$ tales que

$$\widehat{\mathbf{Ker}}_{(W,W)}(A)=[\varphi_W\circ\mathrm{Ker}\circ\varphi_k](A)=[\mathrm{Ker}(A\Delta W)]\Delta W,$$
$$\widehat{\mathbf{Sop}}_{(W,W)}(A)=[\varphi_W\circ\mathrm{Sop}\circ\varphi_k](A)=[\mathrm{Sop}(A\Delta W)]\Delta W \qquad \forall A\in L^E$$

<u>Proposición</u>. Se verifica:

(i) $\widehat{\mathbf{Ker}}_{(W,W)}(M)=\widehat{\mathbf{Sop}}_{(W,W)}(M)=M \quad \forall M\in\mathcal{P}(E)$,

(ii) $\widehat{\mathbf{Ker}}_{(W,W)}(A)\sqsubseteq^W A\sqsubseteq^W\widehat{\mathbf{Sop}}_{(W,W)}(M) \quad \forall A\in L^E, \forall M\in\mathcal{P}(E)$

(iii) $\widehat{\mathbf{Ker}}_{(W,W)}(\sqcap^W_{s\in S}A_s)=\sqcap^W_{s\in S}\widehat{\mathbf{Ker}}_{(W,W)}(A_s)$, $\widehat{\mathbf{Sop}}_{(W,W)}(\sqcup^W_{s\in S}A_s)=\sqcup^W_{s\in S}\widehat{\mathbf{Sop}}_{(W,W)}(A_s)$ $\forall S$ conjunto de índices

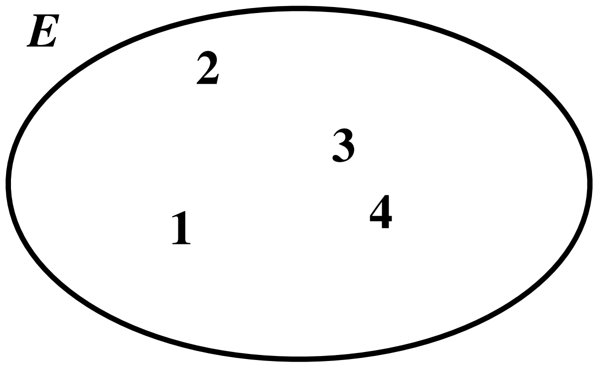
(iv) $\widehat{\mathbf{Ker}}_{(W,W)}[\widehat{\mathbf{Ker}}_{(W,W)}(A)]=\widehat{\mathbf{Ker}}_{(W,W)}(A)$, $\widehat{\mathbf{Sop}}_{(W,W)}[\widehat{\mathbf{Sop}}_{(W,W)}(A)]=\widehat{\mathbf{Sop}}_{(W,W)}(A) \quad \forall A\in L^E\ \forall M\in\mathcal{P}(E)$

Es decir, $\widehat{\mathbf{Ker}}_{(W,W)}$ es <u>erosión morfológica</u> de $(L^E,\sqsubseteq^W)$ en $(\mathcal{P}(E),\sqsubseteq^W)$ y <u>apertura morfológica</u> en $(L^E,\sqsubseteq^W)$ y

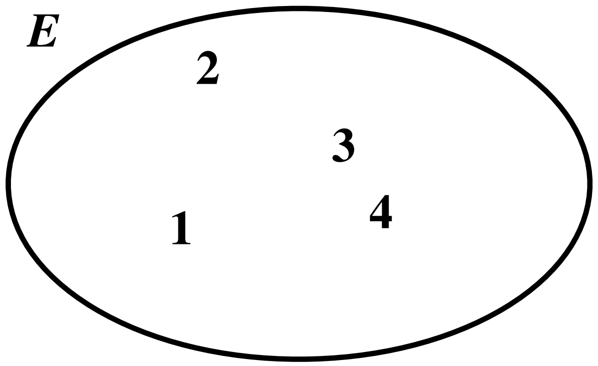
$\widehat{\mathbf{Sop}}_{(W,W)}$ es <u>dilatación morfológica</u> de $(L^E,\sqsubseteq^W)$ en $(\mathcal{P}(E),\sqsubseteq^W)$ y <u>cierre morfológico</u> en $(L^E,\sqsubseteq^W)$.

Ejemplo: w-topologías sobre referenciales finitos asociadas al orden $\sqsubseteq^{w}$

Ejemplo $E = \{1, 2, 3, 4\}$ $P(E) = \{ \emptyset, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E \}$

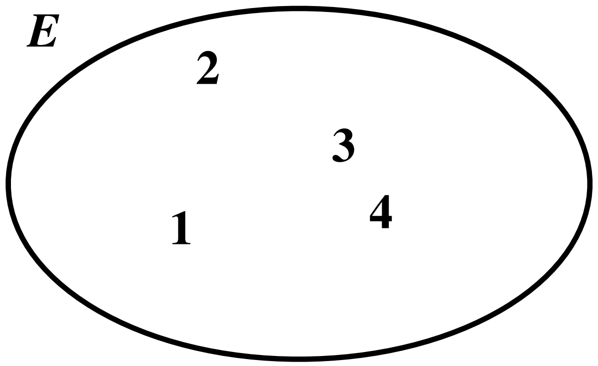


Ejemplo $E = \{1, 2, 3, 4\}$ $P(E) = \{ \varnothing, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E \}$



Sea la familia de abiertos $\Im = \{ \varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$.

Ejemplo $E = \{1, 2, 3, 4\}$ $P(E) = \{ \varnothing, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E \}$



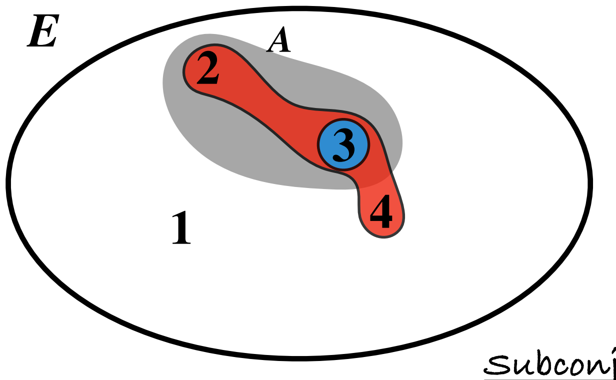
Sea la familia de abiertos $\Im = \{ \varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$. En consecuencia, la familia de cerrados es $\Im^* = \{ \varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$.

En el espacio topológico $(E, \Im)$ se verifica:

$Int(\varnothing) = \varnothing$, $Int(1) = 1$, $Int(2) = \varnothing$, $Int(3) = 3$, $Int(4) = \varnothing$,
$Int(12) = 12$, $Int(13) = 13$, $Int(14) = 1$, $Int(23) = 3$, $Int(24) = \varnothing$, $Int(34) = 34$,
$Int(123) = 123$, $Int(124) = 12$, $Int(134) = 134$, $Int(234) = 34$, $Int(E) = E$.

$Cl(\varnothing) = \varnothing$, $Cl(1) = 12$, $Cl(2) = 2$, $Cl(3) = 34$, $Cl(4) = 4$,
$Cl(12) = 12$, $Cl(13) = E$, $Cl(14) = 124$, $Cl(23) = 234$, $Cl(24) = 24$, $Cl(34) = 34$,
$Cl(123) = E$, $Cl(124) = 124$, $Cl(134) = E$, $Cl(234) = 234$, $Cl(E) = E$.

Ejemplo $E = \{1, 2, 3, 4\}$ $P(E) = \{\,\emptyset, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E\,\}$



Subconjunto: A=23

$\left(Int(23) \subseteq 23 \subseteq Cl(23)\right)$

$\left(\quad 3 \subseteq 23 \subseteq 234 \quad\right).$

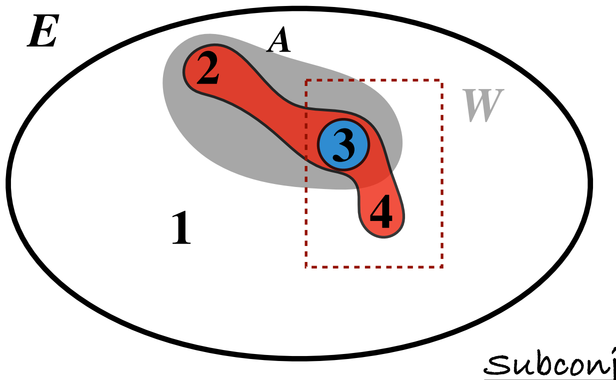
Sea la familia de abiertos $\Im = \{\,\emptyset, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E\,\}$. En consecuencia, la familia de cerrados es $\Im^* = \{\,\emptyset, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E\,\}$.

En el espacio topológico $(E, \Im)$ se verifica:

$Int(\emptyset) = \emptyset,\ Int(1) = 1,\ Int(2) = \emptyset,\ Int(3) = 3, Int(4) = \emptyset,$
$Int(12) = 12,\ Int(13) = 13,\ Int(14) = 1,\ Int(23) = 3,\ Int(24) = \emptyset,\ Int(34) = 34,$
$Int(123) = 123, Int(124) = 12,\ Int(134) = 134,\ Int(234) = 34,\ Int(E) = E.$

$Cl(\emptyset) = \emptyset,\ Cl(1) = 12,\ Cl(2) = 2,\ Cl(3) = 34, Cl(4) = 4,$
$Cl(12) = 12,\ Cl(13) = E,\ Cl(14) = 124,\ Cl(23) = 234,\ Cl(24) = 24,\ Cl(34) = 34,$
$Cl(123) = E,\ Cl(124) = 124,\ Cl(134) = E,\ Cl(234) = 234,\ Cl(E) = E.$

Ejemplo $E = \{1, 2, 3, 4\}$ $P(E) = \{ \emptyset, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E \}$



Subconjunto: $A=23$

Sea la familia de abiertos $\Im = \{ \emptyset, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$. En consecuencia, la familia de cerrados es $\Im^* = \{ \emptyset, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$.

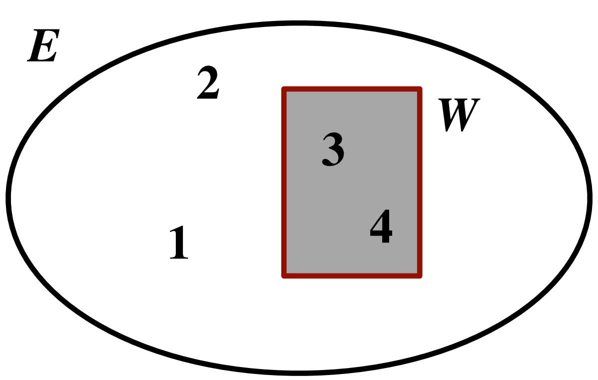
En el espacio topológico $(E, \Im)$ se verifica:

$Int(\emptyset) = \emptyset,\ Int(1) = 1,\ Int(2) = \emptyset,\ Int(3) = 3, Int(4) = \emptyset,$
$Int(12) = 12,\ Int(13) = 13,\ Int(14) = 1,\ \underline{Int(23) = 3},\ Int(24) = \emptyset,\ Int(34) = 34,$
$Int(123) = 123, Int(124) = 12,\ Int(134) = 134,\ Int(234) = 34,\ Int(E) = E.$

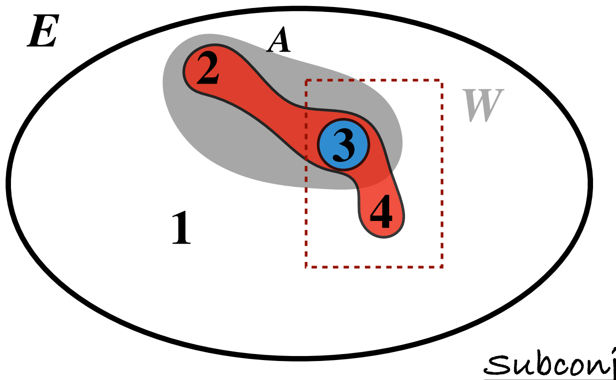
$\big(Int(23) \subseteq 23 \subseteq Cl(23)\big)$
$\big(\quad 3 \subseteq 23 \subseteq 234 \quad\big).$

$Cl(\emptyset) = \emptyset,\ Cl(1) = 12,\ Cl(2) = 2,\ Cl(3) = 34, Cl(4) = 4,$
$Cl(12) = 12,\ Cl(13) = E,\ Cl(14) = 124,\ \underline{Cl(23) = 234},\ Cl(24) = 24,\ Cl(34) = 34,$
$Cl(123) = E,\ Cl(124) = 124,\ Cl(134) = E,\ Cl(234) = 234,\ Cl(E) = E.$

Consideremos en el espacio topológico el abierto y cerrado $W = 34$.



Ejemplo $E = \{1, 2, 3, 4\}$ $P(E) = \{ \emptyset, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E \}$



Subconjunto: $A=23$

Sea la familia de abiertos $\Im = \{ \emptyset, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$. En consecuencia, la familia de cerrados es $\Im^* = \{ \emptyset, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$.

En el espacio topológico $(E, \Im)$ se verifica:

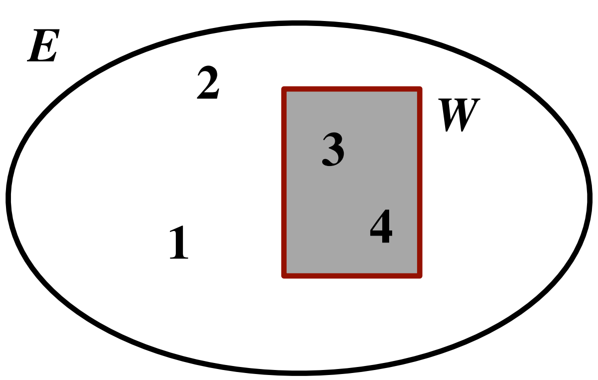
$Int(\emptyset) = \emptyset,\ Int(1) = 1,\ Int(2) = \emptyset,\ Int(3) = 3, Int(4) = \emptyset,$
$Int(12) = 12,\ Int(13) = 13,\ Int(14) = 1,\ Int(23) = 3,\ Int(24) = \emptyset,\ Int(34) = 34,$
$Int(123) = 123, Int(124) = 12,\ Int(134) = 134,\ Int(234) = 34,\ Int(E) = E.$

$\big(Int(23) \subseteq 23 \subseteq Cl(23)\big)$
$(\quad 3 \subseteq 23 \subseteq 234 \quad).$

$Cl(\emptyset) = \emptyset,\ Cl(1) = 12,\ Cl(2) = 2,\ Cl(3) = 34, Cl(4) = 4,$
$Cl(12) = 12,\ Cl(13) = E,\ Cl(14) = 124,\ Cl(23) = 234,\ Cl(24) = 24,\ Cl(34) = 34,$
$Cl(123) = E,\ Cl(124) = 124,\ Cl(134) = E,\ Cl(234) = 234,\ Cl(E) = E.$

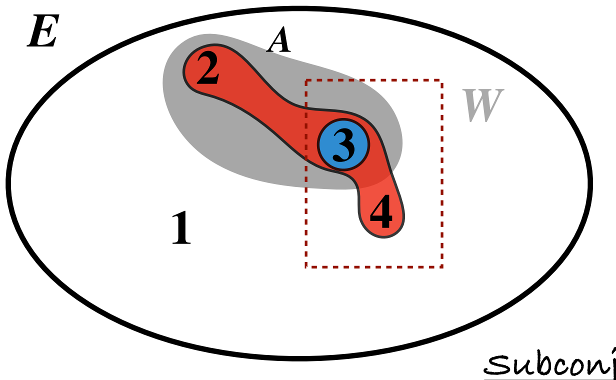
Consideremos en el espacio topológico el abierto y cerrado $W = 34$. Puesto que: $A \triangle W = A \triangle 34 = ((A \cap 12) \cup (A^c \cap 34)),$
La aplicación φ_w: $P(E) \rightarrow P(E)$ tal que $\varphi_w(A) = A \triangle W \ \ \forall A \in P(E)$ es, en este caso $\varphi_{34}(A) = A \triangle 34$:

$\varphi_{34}(\emptyset) = 34,\ \varphi_{34}(1) = 134,\ \varphi_{34}(2) = 234,\ \varphi_{34}(3) = 4, \varphi_{34}(4) = 3,$
$\varphi_{34}(12) = E,\ \varphi_{34}(13) = 14,\ \varphi_{34}(14) = 13,\ \varphi_{34}(23) = 24,\ \varphi_{34}(24) = 23,\ \varphi_{34}(34) = \emptyset,$
$\varphi_{34}(123) = 124, \varphi_{34}(124) = 123,\ \varphi_{34}(134) = 1,\ \varphi_{34}(234) = 2,\ \varphi_{34}(E) = 12.$



W-TOPOLOGÍAS SOBRE CONJUNTOS FINITOS Y ORDEN DE ACTIVIDAD

Ejemplo $E = \{1, 2, 3, 4\}$ $P(E) = \{ \emptyset, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E \}$



Subconjunto: A=23

$\big(Int(23) \subseteq 23 \subseteq Cl(23)\big)$

$(\quad 3 \subseteq 23 \subseteq 234 \quad).$

Sea la familia de abiertos $\Im = \{ \emptyset, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$. En consecuencia, la familia de cerrados es $\Im^* = \{ \emptyset, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$.

En el espacio topológico $(E, \Im)$ se verifica:

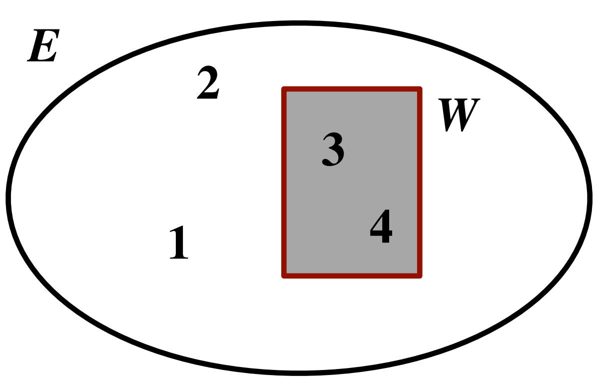
$Int(\emptyset) = \emptyset,\ Int(1) = 1,\ Int(2) = \emptyset,\ Int(3) = 3, Int(4) = \emptyset,$
$Int(12) = 12,\ Int(13) = 13,\ Int(14) = 1,\ Int(23) = 3,\ Int(24) = \emptyset,\ Int(34) = 34,$
$Int(123) = 123, Int(124) = 12,\ Int(134) = 134,\ Int(234) = 34,\ Int(E) = E.$

$Cl(\emptyset) = \emptyset,\ Cl(1) = 12,\ Cl(2) = 2,\ Cl(3) = 34, Cl(4) = 4,$
$Cl(12) = 12,\ Cl(13) = E,\ Cl(14) = 124,\ Cl(23) = 234,\ Cl(24) = 24,\ Cl(34) = 34,$
$Cl(123) = E,\ Cl(124) = 124,\ Cl(134) = E,\ Cl(234) = 234,\ Cl(E) = E.$

Consideremos en el espacio topológico el abierto y cerrado $W = 34$. Puesto que: $A\triangle W = A\triangle 34 = ((A\cap 12)\cup(A^c\cap 34))$,
La aplicación φ_w: $P(E)\rightarrow P(E)$ tal que $\varphi_w(A) = A\triangle W \ \ \forall A\in P(E)$ es, en este caso $\varphi_{34}(A) = A\triangle 34$:

$\varphi_{34}(\emptyset) = 34,\ \varphi_{34}(1) = 134,\ \varphi_{34}(2) = 234,\ \varphi_{34}(3) = 4, \varphi_{34}(4) = 3,$
$\varphi_{34}(12) = E,\ \varphi_{34}(13) = 14,\ \varphi_{34}(14) = 13,\ \varphi_{34}(23) = 24,\ \varphi_{34}(24) = 23,\ \varphi_{34}(34) = \emptyset,$
$\varphi_{34}(123) = 124, \varphi_{34}(124) = 123,\ \varphi_{34}(134) = 1,\ \varphi_{34}(234) = 2,\ \varphi_{34}(E) = 12.$

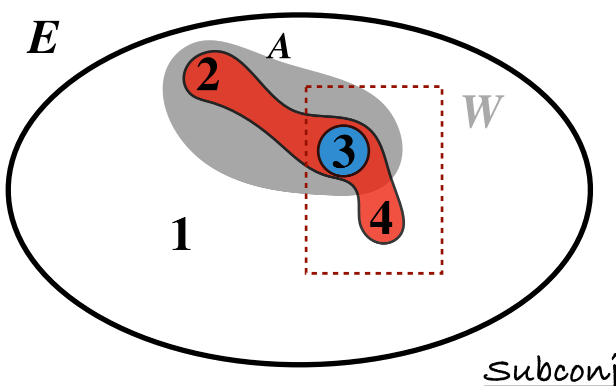
En consecuencia, de acuerdo con la expresión $\hat{g} = (\varphi_w \circ g \circ \varphi_w)$, las extensiones $\widehat{Int}_{34} = (\varphi_w \circ Int_{34} \circ \varphi_w)$ y $\widehat{Cl}_{34} = (\varphi_w \circ Cl_{34} \circ \varphi_w)$ son:



$\widehat{Int}_{34}(\emptyset) = \emptyset,\ \widehat{Int}_{34}(1) = 1,\ \widehat{Int}_{34}(2) = \emptyset,\ \widehat{Int}_{34}(3) = 34, \widehat{Int}_{34}(4) = 4,\ \widehat{Int}_{34}(12) = 12,$
$\widehat{Int}_{34}(13) = 134,\ \widehat{Int}_{34}(14) = 14,\ \widehat{Int}_{34}(23) = 34,\ \widehat{Int}_{34}(24) = 4,\ \widehat{Int}_{34}(34) = 34,$
$\widehat{Int}_{34}(123) = E, \widehat{Int}_{34}(124) = 124,\ \widehat{Int}_{34}(134) = 134,\ \widehat{Int}_{34}(234) = 34,\ \widehat{Int}_{34}(E) = E.$

$\widehat{Cl}_{34}(\emptyset) = \emptyset,\ \widehat{Cl}_{34}(1) = 12,\ \widehat{Cl}_{34}(2) = 2,\ \widehat{Cl}_{34}(3) = 3,\ \widehat{Cl}_{34}(4) = \emptyset,\ \widehat{Cl}_{34}(12) = 12,$
$\widehat{Cl}_{34}(13) = 123,\ \widehat{Cl}_{34}(14) = 12,\ \widehat{Cl}_{34}(23) = 23,\ \widehat{Cl}_{34}(24) = 2,\ \widehat{Cl}_{34}(34) = 34,$
$\widehat{Cl}_{34}(123) = 123,\ \widehat{Cl}_{34}(124) = 12,\ \widehat{Cl}_{34}(134) = E,\ \widehat{Cl}_{34}(234) = 234,\ \widehat{Cl}_{34}(E) = E.$

Ejemplo $E = \{1, 2, 3, 4\}$ $P(E) = \{ \varnothing, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E \}$



Subconjunto: A=23

$\left(Int(23) \subseteq 23 \subseteq Cl(23)\right)$

$\left(3 \subseteq 23 \subseteq 234 \right).$

Sea la familia de abiertos $\Im = \{ \varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$. En consecuencia, la familia de cerrados es $\Im^* = \{ \varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$.

En el espacio topológico $(E, \Im)$ se verifica:

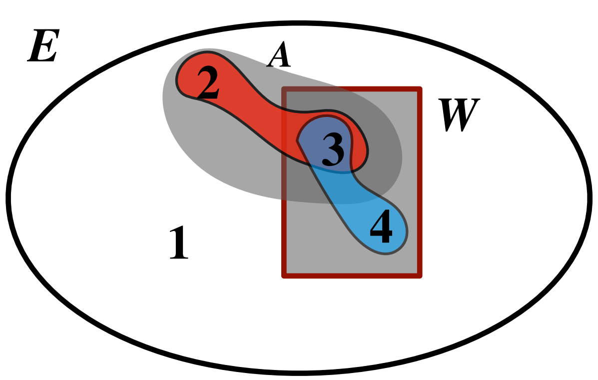
$Int(\varnothing) = \varnothing,\ Int(1) = 1,\ Int(2) = \varnothing,\ Int(3) = 3, Int(4) = \varnothing,$
$Int(12) = 12,\ Int(13) = 13,\ Int(14) = 1,\ Int(23) = 3,\ Int(24) = \varnothing,\ Int(34) = 34,$
$Int(123) = 123, Int(124) = 12,\ Int(134) = 134,\ Int(234) = 34,\ Int(E) = E.$

$Cl(\varnothing) = \varnothing,\ Cl(1) = 12,\ Cl(2) = 2,\ Cl(3) = 34, Cl(4) = 4,$
$Cl(12) = 12,\ Cl(13) = E,\ Cl(14) = 124,\ Cl(23) = 234,\ Cl(24) = 24,\ Cl(34) = 34,$
$Cl(123) = E,\ Cl(124) = 124,\ Cl(134) = E,\ Cl(234) = 234,\ Cl(E) = E.$

Consideremos en el espacio topológico el abierto y cerrado $W = 34$. Puesto que: $A \triangle W = A \triangle 34 = ((A \cap 12) \cup (A^c \cap 34))$,
La aplicación φ_w: $P(E) \to P(E)$ tal que $\varphi_w(A) = A \triangle W$ $\forall A \in P(E)$ es, en este caso $\varphi_{34}(A) = A \triangle 34$:

$\varphi_{34}(\varnothing) = 34,\ \varphi_{34}(1) = 134,\ \varphi_{34}(2) = 234,\ \varphi_{34}(3) = 4, \varphi_{34}(4) = 3,$
$\varphi_{34}(12) = E,\ \varphi_{34}(13) = 14,\ \varphi_{34}(14) = 13,\ \varphi_{34}(23) = 24,\ \varphi_{34}(24) = 23,\ \varphi_{34}(34) = \varnothing,$
$\varphi_{34}(123) = 124, \varphi_{34}(124) = 123,\ \varphi_{34}(134) = 1,\ \varphi_{34}(234) = 2,\ \varphi_{34}(E) = 12.$

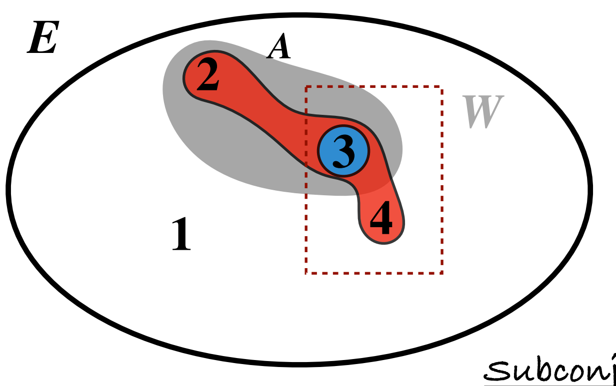
En consecuencia, de acuerdo con la expresión $\hat{g} = (\varphi_w \circ g \circ \varphi_w)$, las extensiones $\widehat{Int}_{34} = (\varphi_w \circ Int_{34} \circ \varphi_w)$ y $\widehat{Cl}_{34} = (\varphi_w \circ Cl_{34} \circ \varphi_w)$ son:



$\widehat{Int}_{34}(\varnothing) = \varnothing,\ \widehat{Int}_{34}(1) = 1,\ \widehat{Int}_{34}(2) = \varnothing,\ \widehat{Int}_{34}(3) = 34, \widehat{Int}_{34}(4) = 4,\ \widehat{Int}_{34}(12) = 12,$
$\widehat{Int}_{34}(13) = 134,\ \widehat{Int}_{34}(14) = 14,\ \widehat{Int}_{34}(23) = 34,\ \widehat{Int}_{34}(24) = 4,\ \widehat{Int}_{34}(34) = 34,$
$\widehat{Int}_{34}(123) = E, \widehat{Int}_{34}(124) = 124,\ \widehat{Int}_{34}(134) = 134,\ \widehat{Int}_{34}(234) = 34,\ \widehat{Int}_{34}(E) = E.$

$\widehat{Cl}_{34}(\varnothing) = \varnothing,\ \widehat{Cl}_{34}(1) = 12,\ \widehat{Cl}_{34}(2) = 2,\ \widehat{Cl}_{34}(3) = 3,\ \widehat{Cl}_{34}(4) = \varnothing,\ \widehat{Cl}_{34}(12) = 12,$
$\widehat{Cl}_{34}(13) = 123,\ \widehat{Cl}_{34}(14) = 12,\ \widehat{Cl}_{34}(23) = 23,\ \widehat{Cl}_{34}(24) = 2,\ \widehat{Cl}_{34}(34) = 34,$
$\widehat{Cl}_{34}(123) = 123,\ \widehat{Cl}_{34}(124) = 12,\ \widehat{Cl}_{34}(134) = E,\ \widehat{Cl}_{34}(234) = 234,\ \widehat{Cl}_{34}(E) = E.$

Ejemplo $E = \{1, 2, 3, 4\}$ $P(E) = \{\varnothing, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E\}$



Subconjunto: $A=23$

$(\textit{Int}(23) \subseteq 23 \subseteq \textit{Cl}(23))$

$(\quad 3 \subseteq 23 \subseteq 234 \quad)$.

Sea la familia de abiertos $\Im = \{\varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E\}$. En consecuencia, la familia de cerrados es $\Im^* = \{\varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E\}$.

En el espacio topológico $(E, \Im)$ se verifica:

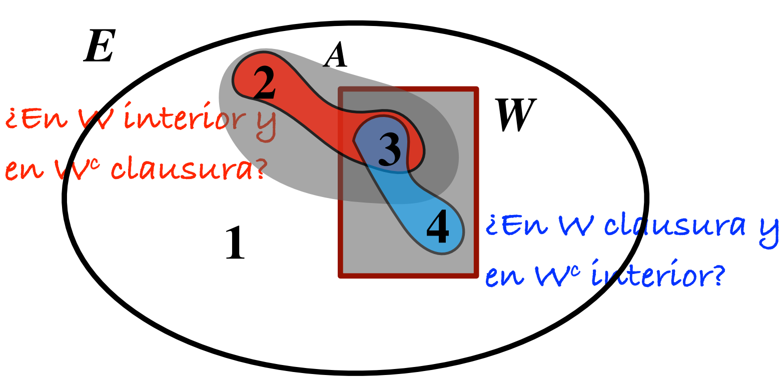
$Int(\varnothing) = \varnothing$, $Int(1) = 1$, $Int(2) = \varnothing$, $Int(3) = 3$, $Int(4) = \varnothing$,
$Int(12) = 12$, $Int(13) = 13$, $Int(14) = 1$, $Int(23) = 3$, $Int(24) = \varnothing$, $Int(34) = 34$,
$Int(123) = 123$, $Int(124) = 12$, $Int(134) = 134$, $Int(234) = 34$, $Int(E) = E$.

$Cl(\varnothing) = \varnothing$, $Cl(1) = 12$, $Cl(2) = 2$, $Cl(3) = 34$, $Cl(4) = 4$,
$Cl(12) = 12$, $Cl(13) = E$, $Cl(14) = 124$, $Cl(23) = 234$, $Cl(24) = 24$, $Cl(34) = 34$,
$Cl(123) = E$, $Cl(124) = 124$, $Cl(134) = E$, $Cl(234) = 234$, $Cl(E) = E$.

Consideremos en el espacio topológico el abierto y cerrado $W = 34$. Puesto que: $A \triangle W = A \triangle 34 = ((A \cap 12) \cup (A^c \cap 34))$,
La aplicación $\varphi_w : P(E) \to P(E)$ tal que $\varphi_w(A) = A \triangle W \;\; \forall A \in P(E)$ es, en este caso $\varphi_{34}(A) = A \triangle 34$:

$\varphi_{34}(\varnothing) = 34$, $\varphi_{34}(1) = 134$, $\varphi_{34}(2) = 234$, $\varphi_{34}(3) = 4$, $\varphi_{34}(4) = 3$,
$\varphi_{34}(12) = E$, $\varphi_{34}(13) = 14$, $\varphi_{34}(14) = 13$, $\varphi_{34}(23) = 24$, $\varphi_{34}(24) = 23$, $\varphi_{34}(34) = \varnothing$,
$\varphi_{34}(123) = 124$, $\varphi_{34}(124) = 123$, $\varphi_{34}(134) = 1$, $\varphi_{34}(234) = 2$, $\varphi_{34}(E) = 12$.

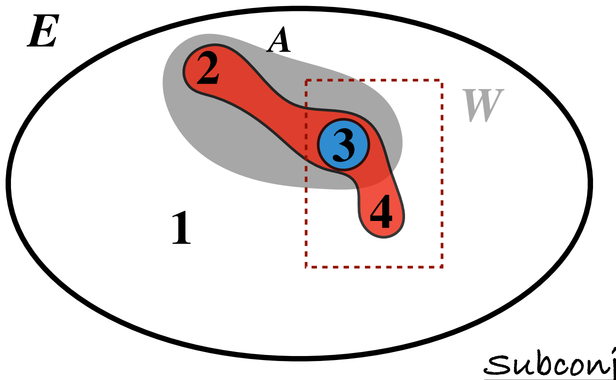
En consecuencia, de acuerdo con la expresión $\hat{g} = (\varphi_w \circ g \circ \varphi_w)$, las extensiones $\widehat{Int}_{34} = (\varphi_w \circ Int_{34} \circ \varphi_w)$ y $\widehat{Cl}_{34} = (\varphi_w \circ Cl_{34} \circ \varphi_w)$ son:



$\widehat{Int}_{34}(\varnothing) = \varnothing$, $\widehat{Int}_{34}(1) = 1$, $\widehat{Int}_{34}(2) = \varnothing$, $\widehat{Int}_{34}(3) = 34$, $\widehat{Int}_{34}(4) = 4$, $\widehat{Int}_{34}(12) = 12$,
$\widehat{Int}_{34}(13) = 134$, $\widehat{Int}_{34}(14) = 14$, $\widehat{Int}_{34}(23) = 34$, $\widehat{Int}_{34}(24) = 4$, $\widehat{Int}_{34}(34) = 34$,
$\widehat{Int}_{34}(123) = E$, $\widehat{Int}_{34}(124) = 124$, $\widehat{Int}_{34}(134) = 134$, $\widehat{Int}_{34}(234) = 34$, $\widehat{Int}_{34}(E) = E$.

$\widehat{Cl}_{34}(\varnothing) = \varnothing$, $\widehat{Cl}_{34}(1) = 12$, $\widehat{Cl}_{34}(2) = 2$, $\widehat{Cl}_{34}(3) = 3$, $\widehat{Cl}_{34}(4) = \varnothing$, $\widehat{Cl}_{34}(12) = 12$,
$\widehat{Cl}_{34}(13) = 123$, $\widehat{Cl}_{34}(14) = 12$, $\widehat{Cl}_{34}(23) = 23$, $\widehat{Cl}_{34}(24) = 2$, $\widehat{Cl}_{34}(34) = 34$,
$\widehat{Cl}_{34}(123) = 123$, $\widehat{Cl}_{34}(124) = 12$, $\widehat{Cl}_{34}(134) = E$, $\widehat{Cl}_{34}(234) = 234$, $\widehat{Cl}_{34}(E) = E$.

Ejemplo $E = \{1, 2, 3, 4\}$ $\quad P(E) = \{ \varnothing, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E \}$



Subconjunto: A=23

$\left(Int(23) \subseteq 23 \subseteq Cl(23)\right)$

$\left(\quad 3 \subseteq 23 \subseteq 234 \quad \right).$

Sea la familia de abiertos $\Im = \{ \varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$. En consecuencia, la familia de cerrados es $\Im^* = \{ \varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$.

En el espacio topológico $(E, \Im)$ se verifica:

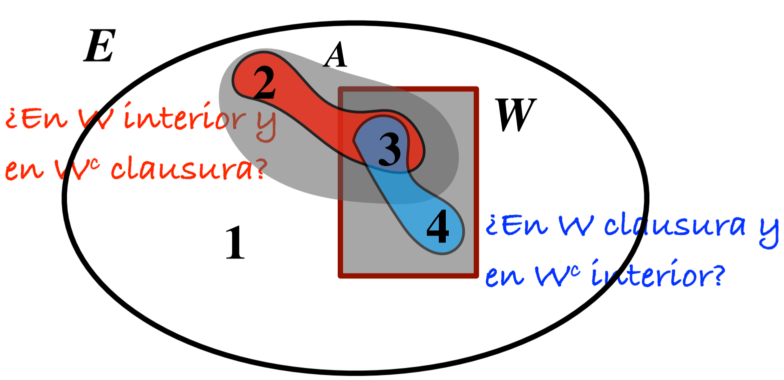
$Int(\varnothing) = \varnothing,\ Int(1) = 1,\ Int(2) = \varnothing,\ Int(3) = 3, Int(4) = \varnothing,$
$Int(12) = 12,\ Int(13) = 13,\ Int(14) = 1,\ Int(23) = 3,\ Int(24) = \varnothing,\ Int(34) = 34,$
$Int(123) = 123, Int(124) = 12,\ Int(134) = 134,\ Int(234) = 34,\ Int(E) = E.$

$Cl(\varnothing) = \varnothing,\ Cl(1) = 12,\ Cl(2) = 2,\ Cl(3) = 34, Cl(4) = 4,$
$Cl(12) = 12,\ Cl(13) = E,\ Cl(14) = 124,\ Cl(23) = 234,\ Cl(24) = 24,\ Cl(34) = 34,$
$Cl(123) = E,\ Cl(124) = 124,\ Cl(134) = E,\ Cl(234) = 234,\ Cl(E) = E.$

Consideremos en el espacio topológico el abierto y cerrado $W = 34$. Puesto que: $A \triangle W = A \triangle 34 = ((A \cap 12) \cup (A^c \cap 34))$,
La aplicación φ_w: $P(E) \rightarrow P(E)$ tal que $\varphi_w(A) = A \triangle W\ \ \forall A \in P(E)$ es, en este caso $\varphi_{34}(A) = A \triangle 34$:

$\varphi_{34}(\varnothing) = 34,\ \varphi_{34}(1) = 134,\ \varphi_{34}(2) = 234,\ \varphi_{34}(3) = 4, \varphi_{34}(4) = 3,$
$\varphi_{34}(12) = E,\ \varphi_{34}(13) = 14,\ \varphi_{34}(14) = 13,\ \varphi_{34}(23) = 24,\ \varphi_{34}(24) = 23,\ \varphi_{34}(34) = \varnothing,$
$\varphi_{34}(123) = 124, \varphi_{34}(124) = 123,\ \varphi_{34}(134) = 1,\ \varphi_{34}(234) = 2,\ \varphi_{34}(E) = 12.$

En consecuencia, de acuerdo con la expresión $\hat{g} = (\varphi_w \circ g \circ \varphi_w)$, las extensiones $\widehat{Int}_{34} = (\varphi_w \circ Int_{34} \circ \varphi_w)$ y $\widehat{Cl}_{34} = (\varphi_w \circ Cl_{34} \circ \varphi_w)$ son:



$\widehat{Int}_{34}(\varnothing) = \varnothing,\ \widehat{Int}_{34}(1) = 1,\ \widehat{Int}_{34}(2) = \varnothing,\ \widehat{Int}_{34}(3) = 34, \widehat{Int}_{34}(4) = 4,\ \widehat{Int}_{34}(12) = 12,$
$\widehat{Int}_{34}(13) = 134,\ \widehat{Int}_{34}(14) = 14,\ \widehat{Int}_{34}(23) = 34,\ \widehat{Int}_{34}(24) = 4,\ \widehat{Int}_{34}(34) = 34,$
$\widehat{Int}_{34}(123) = E, \widehat{Int}_{34}(124) = 124,\ \widehat{Int}_{34}(134) = 134,\ \widehat{Int}_{34}(234) = 34,\ \widehat{Int}_{34}(E) = E.$

$\widehat{Cl}_{34}(\varnothing) = \varnothing,\ \widehat{Cl}_{34}(1) = 12,\ \widehat{Cl}_{34}(2) = 2,\ \widehat{Cl}_{34}(3) = 3,\ \widehat{Cl}_{34}(4) = \varnothing,\ \widehat{Cl}_{34}(12) = 12,$
$\widehat{Cl}_{34}(13) = 123,\ \widehat{Cl}_{34}(14) = 12,\ \widehat{Cl}_{34}(23) = 23,\ \widehat{Cl}_{34}(24) = 2,\ \widehat{Cl}_{34}(34) = 34,$
$\widehat{Cl}_{34}(123) = 123,\ \widehat{Cl}_{34}(124) = 12,\ \widehat{Cl}_{34}(134) = E,\ \widehat{Cl}_{34}(234) = 234,\ \widehat{Cl}_{34}(E) = E.$

Orden de actividad:

$(A \sqsubseteq^{34} B) \Leftrightarrow ((34 \cap B) \subseteq A \subseteq (34 \cup B)),$

$34 \sqsubseteq^{34} A \sqsubseteq^{34} 12 \quad \forall A \in P(E)$

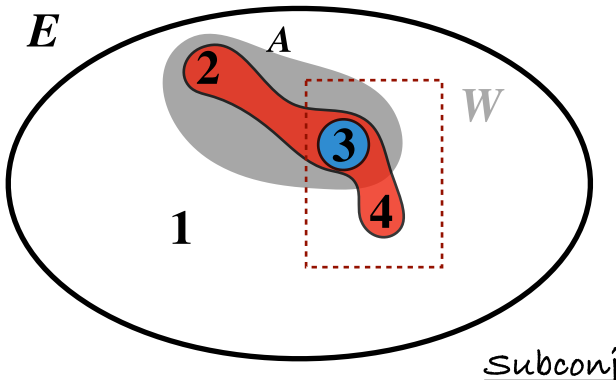
En $(E, \varphi_w(\Im))$ se verifica:

$\left(\widehat{Int}_{34}(23) \sqsubseteq^{34} 23 \sqsubseteq^{34} \widehat{Cl}_{34}(23)\right)$

$\left(\quad 34 \sqsubseteq^{34} 23 \sqsubseteq^{34} 23 \quad \right)$

W-TOPOLOGÍAS SOBRE CONJUNTOS FINITOS Y ORDEN DE ACTIVIDAD

Ejemplo $E = \{1, 2, 3, 4\}$ $P(E) = \{\,\emptyset, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E\,\}$



Subconjunto: A=23

$\big(\mathit{Int}(23) \subseteq 23 \subseteq \mathit{Cl}(23)\big)$

$(\quad 3 \subseteq 23 \subseteq 234 \quad).$

Sea la familia de abiertos $\Im = \{\,\emptyset, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E\,\}$. En consecuencia, la familia de cerrados es $\Im^* = \{\,\emptyset, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E\,\}$.

En el espacio topológico $(E, \Im)$ se verifica:

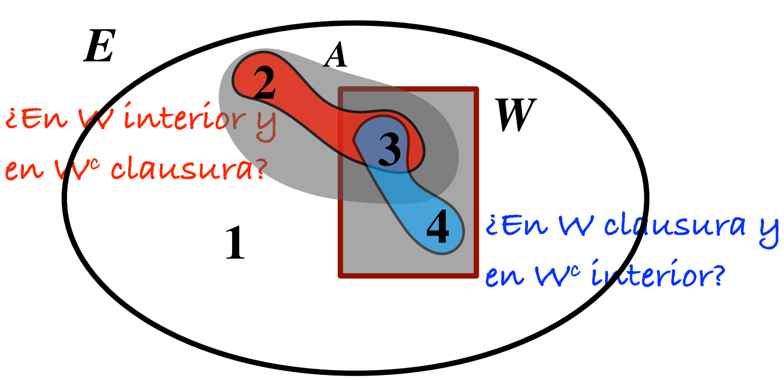
$\mathit{Int}(\emptyset) = \emptyset,\ \mathit{Int}(1) = 1,\ \mathit{Int}(2) = \emptyset,\ \mathit{Int}(3) = 3, \mathit{Int}(4) = \emptyset,$
$\mathit{Int}(12) = 12,\ \mathit{Int}(13) = 13,\ \mathit{Int}(14) = 1,\ \mathit{Int}(23) = 3,\ \mathit{Int}(24) = \emptyset,\ \mathit{Int}(34) = 34,$
$\mathit{Int}(123) = 123, \mathit{Int}(124) = 12,\ \mathit{Int}(134) = 134,\ \mathit{Int}(234) = 34,\ \mathit{Int}(E) = E.$

$\mathit{Cl}(\emptyset) = \emptyset,\ \mathit{Cl}(1) = 12,\ \mathit{Cl}(2) = 2,\ \mathit{Cl}(3) = 34, \mathit{Cl}(4) = 4,$
$\mathit{Cl}(12) = 12,\ \mathit{Cl}(13) = E,\ \mathit{Cl}(14) = 124,\ \mathit{Cl}(23) = 234,\ \mathit{Cl}(24) = 24,\ \mathit{Cl}(34) = 34,$
$\mathit{Cl}(123) = E,\ \mathit{Cl}(124) = 124,\ \mathit{Cl}(134) = E,\ \mathit{Cl}(234) = 234,\ \mathit{Cl}(E) = E.$

Consideremos en el espacio topológico el abierto y cerrado $W = 34$. Puesto que: $A \triangle W = A \triangle 34 = ((A \cap 12) \cup (A^c \cap 34))$,
La aplicación φ_w: $P(E) \to P(E)$ tal que $\varphi_w(A) = A \triangle W\ \ \forall A \in P(E)$ es, en este caso $\varphi_{34}(A) = A \triangle 34$:

$\varphi_{34}(\emptyset) = 34,\ \varphi_{34}(1) = 134,\ \varphi_{34}(2) = 234,\ \varphi_{34}(3) = 4, \varphi_{34}(4) = 3,$
$\varphi_{34}(12) = E,\ \varphi_{34}(13) = 14,\ \varphi_{34}(14) = 13,\ \varphi_{34}(23) = 24,\ \varphi_{34}(24) = 23,\ \varphi_{34}(34) = \emptyset,$
$\varphi_{34}(123) = 124, \varphi_{34}(124) = 123,\ \varphi_{34}(134) = 1,\ \varphi_{34}(234) = 2,\ \varphi_{34}(E) = 12.$

En consecuencia, de acuerdo con la expresión $\hat{g} = (\varphi_w \circ g \circ \varphi_w)$, las extensiones $\widehat{\mathit{Int}}_{34} = (\varphi_w \circ \mathit{Int}_{34} \circ \varphi_w)$ y $\widehat{\mathit{Cl}}_{34} = (\varphi_w \circ \mathit{Cl}_{34} \circ \varphi_w)$ son:



$\widehat{\mathit{Int}}_{34}(\emptyset) = \emptyset,\ \widehat{\mathit{Int}}_{34}(1) = 1,\ \widehat{\mathit{Int}}_{34}(2) = \emptyset,\ \widehat{\mathit{Int}}_{34}(3) = 34, \widehat{\mathit{Int}}_{34}(4) = 4,\ \widehat{\mathit{Int}}_{34}(12) = 12,$
$\widehat{\mathit{Int}}_{34}(13) = 134,\ \widehat{\mathit{Int}}_{34}(14) = 14,\ \widehat{\mathit{Int}}_{34}(23) = 34,\ \widehat{\mathit{Int}}_{34}(24) = 4,\ \widehat{\mathit{Int}}_{34}(34) = 34,$
$\widehat{\mathit{Int}}_{34}(123) = E, \widehat{\mathit{Int}}_{34}(124) = 124,\ \widehat{\mathit{Int}}_{34}(134) = 134,\ \widehat{\mathit{Int}}_{34}(234) = 34,\ \widehat{\mathit{Int}}_{34}(E) = E.$

$\widehat{\mathit{Cl}}_{34}(\emptyset) = \emptyset,\ \widehat{\mathit{Cl}}_{34}(1) = 12,\ \widehat{\mathit{Cl}}_{34}(2) = 2,\ \widehat{\mathit{Cl}}_{34}(3) = 3,\ \widehat{\mathit{Cl}}_{34}(4) = \emptyset,\ \widehat{\mathit{Cl}}_{34}(12) = 12,$
$\widehat{\mathit{Cl}}_{34}(13) = 123,\ \widehat{\mathit{Cl}}_{34}(14) = 12,\ \widehat{\mathit{Cl}}_{34}(23) = 23,\ \widehat{\mathit{Cl}}_{34}(24) = 2,\ \widehat{\mathit{Cl}}_{34}(34) = 34,$
$\widehat{\mathit{Cl}}_{34}(123) = 123,\ \widehat{\mathit{Cl}}_{34}(124) = 12,\ \widehat{\mathit{Cl}}_{34}(134) = E,\ \widehat{\mathit{Cl}}_{34}(234) = 234,\ \widehat{\mathit{Cl}}_{34}(E) = E.$

Orden de actividad:

$(A \sqsubseteq^{34} B) \Leftrightarrow ((34 \cap B) \subseteq A \subseteq (34 \cup B)),$

$34 \sqsubseteq^{34} A \sqsubseteq^{34} 12 \quad \forall A \in P(E)$

En $(E, \varphi_w(\Im))$ se verifica:

$\big(\widehat{\mathit{Int}}_{34}(23) \sqsubseteq^{34} 23 \sqsubseteq^{34} \widehat{\mathit{Cl}}_{34}(23)\big)$

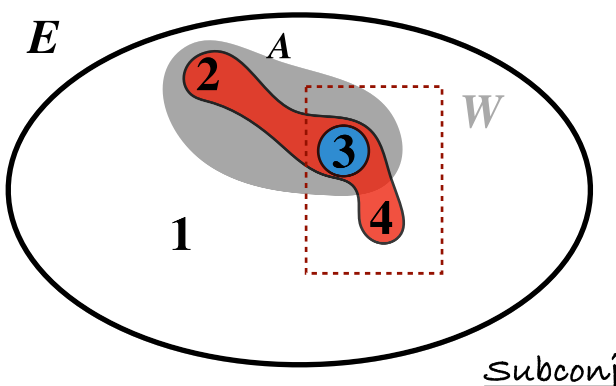
$(\quad 34 \sqsubseteq^{34} 23 \sqsubseteq^{34} 23 \quad)$

$\varphi_{34}(\Im)$ es cerrado para $\cap$ y $\cup$,

$\varphi_{34}(\Im)$ es cerrado para $\sqcap^{34}$ y $\sqcup^{34}$.

W-TOPOLOGÍAS SOBRE CONJUNTOS FINITOS Y ORDEN DE ACTIVIDAD

Ejemplo $E = \{1, 2, 3, 4\}$ $P(E) = \{\varnothing, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E\}$



Subconjunto: A=23

$\left(Int(23) \subseteq 23 \subseteq Cl(23)\right)$

$(\quad 3 \subseteq 23 \subseteq 234 \quad)$.

Sea la familia de abiertos $\Im = \{\varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E\}$. En consecuencia, la familia de cerrados es $\Im^* = \{\varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E\}$.

En el espacio topológico $(E, \Im)$ se verifica:

$Int(\varnothing) = \varnothing,\ Int(1) = 1,\ Int(2) = \varnothing,\ Int(3) = 3, Int(4) = \varnothing,$
$Int(12) = 12,\ Int(13) = 13,\ Int(14) = 1,\ \underline{Int(23) = 3},\ Int(24) = \varnothing,\ Int(34) = 34,$
$Int(123) = 123, Int(124) = 12,\ Int(134) = 134,\ Int(234) = 34,\ Int(E) = E.$

$Cl(\varnothing) = \varnothing,\ Cl(1) = 12,\ Cl(2) = 2,\ Cl(3) = 34, Cl(4) = 4,$
$Cl(12) = 12,\ Cl(13) = E,\ Cl(14) = 124,\ \underline{Cl(23) = 234},\ Cl(24) = 24,\ Cl(34) = 34,$
$Cl(123) = E,\ Cl(124) = 124,\ Cl(134) = E,\ Cl(234) = 234,\ Cl(E) = E.$

Consideremos en el espacio topológico el abierto y cerrado $W = 34$. Puesto que: $A\triangle W = A\triangle 34 = ((A\cap 12)\cup(A^c\cap 34))$,
La aplicación φ_w: $P(E)\rightarrow P(E)$ tal que $\varphi_w(A) = A\triangle W$ $\forall A\in P(E)$ es, en este caso $\varphi_{34}(A) = A\triangle 34$:

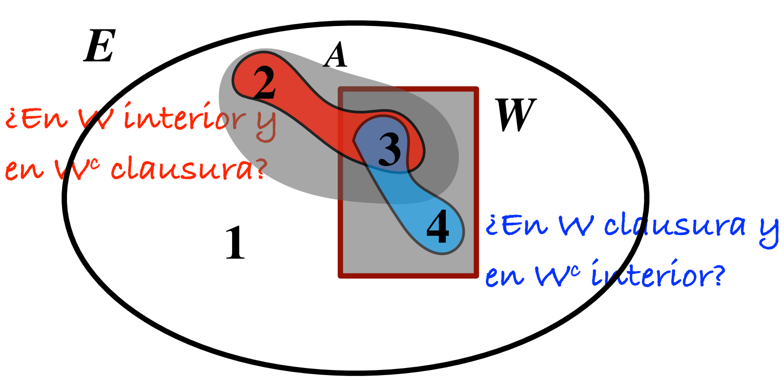
espacio topológico y w-topológico $(E, \varphi_{34}(\Im))$:

$\varphi_w(\Im) = \{\varnothing, 1, 4, 12, 14, 34, 124, 134, E\}$

$\varphi_w(\Im^*) = \{\varnothing, 2, 3, 12, 23, 34, 123, 234, E\}$

$\varphi_{34}(\varnothing) = 34,\ \varphi_{34}(1) = 134,\ \varphi_{34}(2) = 234,\ \varphi_{34}(3) = 4, \varphi_{34}(4) = 3,$
$\varphi_{34}(12) = E,\ \varphi_{34}(13) = 14,\ \varphi_{34}(14) = 13,\ \varphi_{34}(23) = 24,\ \varphi_{34}(24) = 23,\ \varphi_{34}(34) = \varnothing,$
$\varphi_{34}(123) = 124, \varphi_{34}(124) = 123,\ \varphi_{34}(134) = 1,\ \varphi_{34}(234) = 2,\ \varphi_{34}(E) = 12.$

En consecuencia, de acuerdo con la expresión $\hat{g} = (\varphi_w \circ g \circ \varphi_w)$, las extensiones $\widehat{Int}_{34} = (\varphi_w \circ Int_{34} \circ \varphi_w)$ y $\widehat{Cl}_{34} = (\varphi_w \circ Cl_{34} \circ \varphi_w)$ son:



$\widehat{Int}_{34}(\varnothing) = \varnothing,\ \widehat{Int}_{34}(1) = 1,\ \widehat{Int}_{34}(2) = \varnothing,\ \widehat{Int}_{34}(3) = 34, \widehat{Int}_{34}(4) = 4,\ \widehat{Int}_{34}(12) = 12,$
$\widehat{Int}_{34}(13) = 134,\ \widehat{Int}_{34}(14) = 14,\ \underline{\widehat{Int}_{34}(23) = 34},\ \widehat{Int}_{34}(24) = 4,\ \widehat{Int}_{34}(34) = 34,$
$\widehat{Int}_{34}(123) = E, \widehat{Int}_{34}(124) = 124,\ \widehat{Int}_{34}(134) = 134,\ \widehat{Int}_{34}(234) = 34,\ \widehat{Int}_{34}(E) = E.$

$\widehat{Cl}_{34}(\varnothing) = \varnothing,\ \widehat{Cl}_{34}(1) = 12,\ \widehat{Cl}_{34}(2) = 2,\ \widehat{Cl}_{34}(3) = 3,\ \widehat{Cl}_{34}(4) = \varnothing,\ \widehat{Cl}_{34}(12) = 12,$
$\widehat{Cl}_{34}(13) = 123,\ \widehat{Cl}_{34}(14) = 12,\ \underline{\widehat{Cl}_{34}(23) = 23},\ \widehat{Cl}_{34}(24) = 2,\ \widehat{Cl}_{34}(34) = 34,$
$\widehat{Cl}_{34}(123) = 123,\ \widehat{Cl}_{34}(124) = 12,\ \widehat{Cl}_{34}(134) = E,\ \widehat{Cl}_{34}(234) = 234,\ \widehat{Cl}_{34}(E) = E.$

Orden de actividad:

$(A \sqsubseteq^{34} B) \Leftrightarrow ((34 \cap B) \subseteq A \subseteq (34 \cup B)),$

$34 \sqsubseteq^{34} A \sqsubseteq^{34} 12 \quad \forall A \in P(E)$

En $(E, \varphi_w(\Im))$ se verifica:

$\left(\widehat{Int}_{34}(23) \sqsubseteq^{34} 23 \sqsubseteq^{34} \widehat{Cl}_{34}(23)\right)$

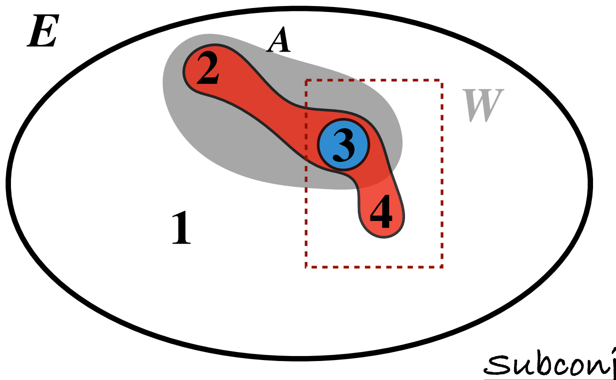
$(\quad 34 \sqsubseteq^{34} 23 \sqsubseteq^{34} 23 \quad)$

$\varphi_{34}(\Im)$ es cerrado para $\cap$ y $\cup$,

$\varphi_{34}(\Im)$ es cerrado para $\sqcap^{34}$ y $\sqcup^{34}$.

W-TOPOLOGÍAS SOBRE CONJUNTOS FINITOS Y ORDEN DE ACTIVIDAD

Ejemplo $E = \{1, 2, 3, 4\}$ $P(E) = \{\varnothing, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E\}$



Subconjunto: $A=23$

$\left(\color{blue}{Int(23)} \subseteq 23 \subseteq \color{red}{Cl(23)}\right)$

$(\quad 3 \subseteq 23 \subseteq 234 \quad).$

Sea la familia de abiertos $\Im = \{\varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E\}$. En consecuencia, la familia de cerrados es $\Im^* = \{\varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E\}$.

En el espacio topológico $(E, \Im)$ se verifica:

$Int(\varnothing) = \varnothing,\ Int(1) = 1,\ Int(2) = \varnothing,\ Int(3) = 3, Int(4) = \varnothing,$

$Int(12) = 12,\ Int(13) = 13,\ Int(14) = 1,\ Int(23) = 3,\ Int(24) = \varnothing,\ Int(34) = 34,$

$Int(123) = 123, Int(124) = 12,\ Int(134) = 134,\ Int(234) = 34,\ Int(E) = E.$

$Cl(\varnothing) = \varnothing,\ Cl(1) = 12,\ Cl(2) = 2,\ Cl(3) = 34, Cl(4) = 4,$

$Cl(12) = 12,\ Cl(13) = E,\ Cl(14) = 124,\ Cl(23) = 234,\ Cl(24) = 24,\ Cl(34) = 34,$

$Cl(123) = E,\ Cl(124) = 124,\ Cl(134) = E,\ Cl(234) = 234,\ Cl(E) = E.$

Consideremos en el espacio topológico el abierto y cerrado $W = 34$. Puesto que: $A\triangle W = A\triangle 34 = ((A\cap 12)\cup(A^c\cap 34))$,
La aplicación φ_w: $P(E)\rightarrow P(E)$ tal que $\varphi_w(A) = A\triangle W\ \ \forall A\in P(E)$ es, en este caso $\varphi_{34}(A) = A\triangle 34$:

espacio topológico y w-topológico $(E, \varphi_{34}(\Im))$:

$\varphi_w(\Im) = \{\varnothing, 1, \color{red}{4}, 12, \color{red}{14}, 34, \color{red}{124}, 134, E\}$

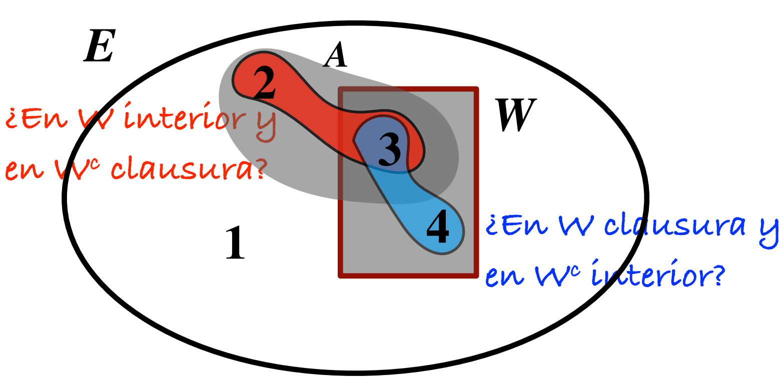
$\varphi_w(\Im^*) = \{\varnothing, 2, \color{red}{3}, 12, \color{red}{23}, 34, \color{red}{123}, 234, E\}$

$\varphi_{34}(\varnothing) = 34,\ \varphi_{34}(1) = 134,\ \varphi_{34}(2) = 234,\ \varphi_{34}(3) = 4, \varphi_{34}(4) = 3,$

$\varphi_{34}(12) = E,\ \varphi_{34}(13) = 14,\ \varphi_{34}(14) = 13,\ \varphi_{34}(23) = 24,\ \varphi_{34}(24) = 23,\ \varphi_{34}(34) = \varnothing,$

$\varphi_{34}(123) = 124, \varphi_{34}(124) = 123,\ \varphi_{34}(134) = 1,\ \varphi_{34}(234) = 2,\ \varphi_{34}(E) = 12.$

En consecuencia, de acuerdo con la expresión $\hat{g} = (\varphi_w \circ g \circ \varphi_w)$, las extensiones $\widehat{Int}_{34} = (\varphi_w \circ Int_{34} \circ \varphi_w)$ y $\widehat{Cl}_{34} = (\varphi_w \circ Cl_{34} \circ \varphi_w)$ son:



$\widehat{Int}_{34}(\varnothing) = \varnothing,\ \widehat{Int}_{34}(1) = 1,\ \widehat{Int}_{34}(2) = \varnothing,\ \widehat{Int}_{34}(3) = 34, \widehat{Int}_{34}(4) = 4,\ \widehat{Int}_{34}(12) = 12,$

$\widehat{Int}_{34}(13) = 134,\ \widehat{Int}_{34}(14) = 14,\ \widehat{Int}_{34}(23) = 34,\ \widehat{Int}_{34}(24) = 4,\ \widehat{Int}_{34}(34) = 34,$

$\widehat{Int}_{34}(123) = E, \widehat{Int}_{34}(124) = 124,\ \widehat{Int}_{34}(134) = 134,\ \widehat{Int}_{34}(234) = 34,\ \widehat{Int}_{34}(E) = E.$

$\widehat{Cl}_{34}(\varnothing) = \varnothing,\ \widehat{Cl}_{34}(1) = 12,\ \widehat{Cl}_{34}(2) = 2,\ \widehat{Cl}_{34}(3) = 3,\ \widehat{Cl}_{34}(4) = \varnothing,\ \widehat{Cl}_{34}(12) = 12,$

$\widehat{Cl}_{34}(13) = 123,\ \widehat{Cl}_{34}(14) = 12,\ \widehat{Cl}_{34}(23) = 23,\ \widehat{Cl}_{34}(24) = 2,\ \widehat{Cl}_{34}(34) = 34,$

$\widehat{Cl}_{34}(123) = 123,\ \widehat{Cl}_{34}(124) = 12,\ \widehat{Cl}_{34}(134) = E,\ \widehat{Cl}_{34}(234) = 234,\ \widehat{Cl}_{34}(E) = E.$

Orden de actividad:

$(A \sqsubseteq^{34} B) \Leftrightarrow ((34 \cap B) \subseteq A \subseteq (34 \cup B)),$

$34 \sqsubseteq^{34} A \sqsubseteq^{34} 12 \quad \forall A \in P(E)$

En $(E, \varphi_w(\Im))$ se verifica:

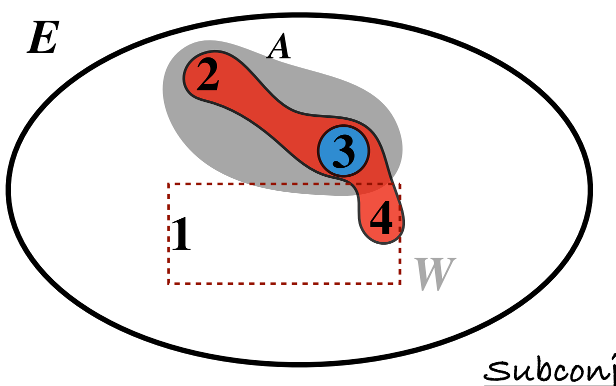
$\left(\color{blue}{\widehat{Int}_{34}(23)} \sqsubseteq^{34} 23 \sqsubseteq^{34} \color{red}{\widehat{Cl}_{34}(23)}\right)$

$(\quad 34 \sqsubseteq^{34} 23 \sqsubseteq^{34} 23 \quad)$

$\varphi_{34}(\Im)$ es cerrado para $\cap$ y $\cup$,

$\varphi_{34}(\Im)$ es cerrado para $\sqcap^{34}$ y $\sqcup^{34}$.

Ejemplo $E = \{1, 2, 3, 4\}$ $P(E) = \{ \varnothing, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E \}$



Subconjunto: $A=23$

Sea la familia de abiertos $\Im = \{ \varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$. En consecuencia, la familia de cerrados es $\Im^* = \{ \varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$.

En el espacio topológico $(E, \Im)$ se verifica:

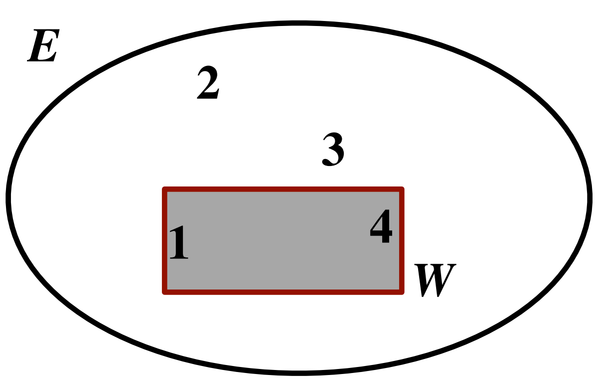
$Int(\varnothing) = \varnothing,\ Int(1) = 1,\ Int(2) = \varnothing,\ Int(3) = 3, Int(4) = \varnothing,$
$Int(12) = 12,\ Int(13) = 13,\ Int(14) = 1,\ \underline{Int(23) = 3},\ Int(24) = \varnothing,\ Int(34) = 34,$
$Int(123) = 123, Int(124) = 12,\ Int(134) = 134,\ Int(234) = 34,\ Int(E) = E.$

$(Int(23) \subseteq 23 \subseteq Cl(23))$

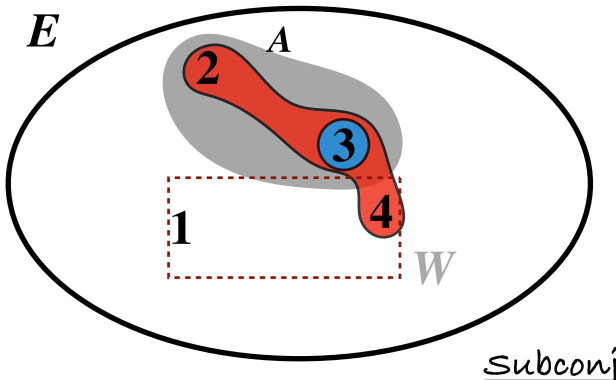
$(\quad 3 \subseteq 23 \subseteq 234 \quad).$

$Cl(\varnothing) = \varnothing,\ Cl(1) = 12,\ Cl(2) = 2,\ Cl(3) = 34, Cl(4) = 4,$
$Cl(12) = 12,\ Cl(13) = E,\ Cl(14) = 124,\ \underline{Cl(23) = 234},\ Cl(24) = 24,\ Cl(34) = 34,$
$Cl(123) = E,\ Cl(124) = 124,\ Cl(134) = E,\ Cl(234) = 234,\ Cl(E) = E.$

Consideremos ahora en el espacio topológico el subconjunto $W = 14$.



Ejemplo $E = \{1, 2, 3, 4\}$ $P(E) = \{ \emptyset, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E \}$



Subconjunto: A=23

Sea la familia de abiertos $\Im = \{ \emptyset, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$. En consecuencia, la familia de cerrados es $\Im^* = \{ \emptyset, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$.

En el espacio topológico $(E, \Im)$ se verifica:

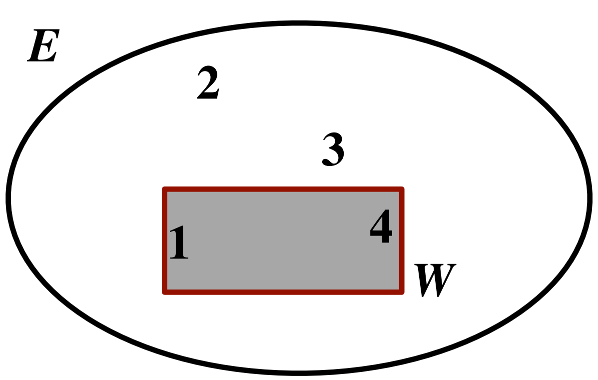
$Int(\emptyset) = \emptyset,\ Int(1) = 1,\ Int(2) = \emptyset,\ Int(3) = 3, Int(4) = \emptyset,$
$Int(12) = 12,\ Int(13) = 13,\ Int(14) = 1,\ Int(23) = 3,\ Int(24) = \emptyset,\ Int(34) = 34,$
$Int(123) = 123, Int(124) = 12,\ Int(134) = 134,\ Int(234) = 34,\ Int(E) = E.$

$\left(Int(23) \subseteq 23 \subseteq Cl(23)\right)$
$\left(\quad 3 \subseteq 23 \subseteq 234 \quad\right).$

$Cl(\emptyset) = \emptyset,\ Cl(1) = 12,\ Cl(2) = 2,\ Cl(3) = 34, Cl(4) = 4,$
$Cl(12) = 12,\ Cl(13) = E,\ Cl(14) = 124,\ Cl(23) = 234,\ Cl(24) = 24,\ Cl(34) = 34,$
$Cl(123) = E,\ Cl(124) = 124,\ Cl(134) = E,\ Cl(234) = 234,\ Cl(E) = E.$

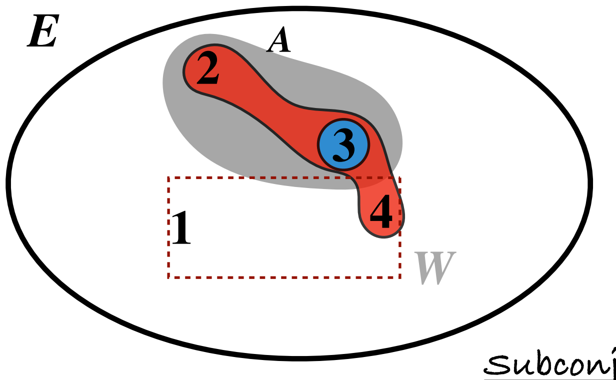
Consideremos ahora en el espacio topológico el subconjunto $W = 14$. Puesto que ahora: $A \triangle W = A \triangle 14 = ((A \cap 23) \cup (A^c \cap 14))$,
La aplicación φ_w: $P(E) \to P(E)$ tal que $\varphi_{14}(A) = A \triangle 14 \ \ \forall A \in P(E)$, es:

$\varphi_{14}(\emptyset) = 14,\ \varphi_{14}(1) = 4,\ \varphi_{14}(2) = 124,\ \varphi_{14}(3) = 134, \varphi_{14}(4) = 1,$
$\varphi_{14}(12) = 24,\ \varphi_{14}(13) = 34,\ \varphi_{14}(14) = \emptyset,\ \varphi_{14}(23) = E,\ \varphi_{14}(24) = 12,\ \varphi_{14}(34) = 13,$
$\varphi_{14}(123) = 234, \varphi_{14}(124) = 2,\ \varphi_{14}(134) = 3,\ \varphi_{14}(234) = 123,\ \varphi_{14}(E) = 23.$



W-TOPOLOGÍAS SOBRE CONJUNTOS FINITOS Y ORDEN DE ACTIVIDAD

Ejemplo $E = \{1, 2, 3, 4\}$ $P(E) = \{ \emptyset, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E \}$



Subconjunto: A=23

Sea la familia de abiertos $\Im = \{ \emptyset, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$. En consecuencia, la familia de cerrados es $\Im^* = \{ \emptyset, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$.

En el espacio topológico $(E, \Im)$ se verifica:

$Int(\emptyset) = \emptyset,\ Int(1) = 1,\ Int(2) = \emptyset,\ Int(3) = 3, Int(4) = \emptyset,$
$Int(12) = 12,\ Int(13) = 13,\ Int(14) = 1,\ Int(23) = 3,\ Int(24) = \emptyset,\ Int(34) = 34,$
$Int(123) = 123, Int(124) = 12,\ Int(134) = 134,\ Int(234) = 34,\ Int(E) = E.$

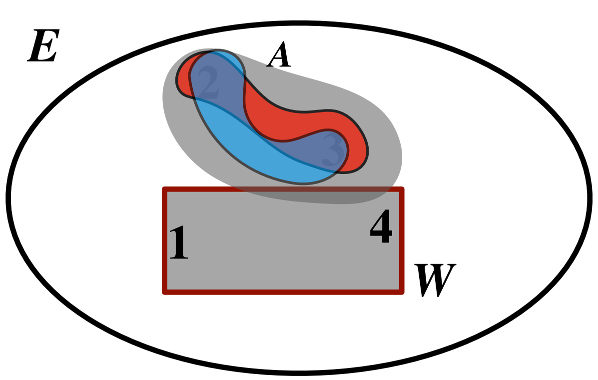
$\big(Int(23) \subseteq 23 \subseteq Cl(23)\big)$
$\big(\quad 3 \subseteq 23 \subseteq 234 \quad\big).$

$Cl(\emptyset) = \emptyset,\ Cl(1) = 12,\ Cl(2) = 2,\ Cl(3) = 34, Cl(4) = 4,$
$Cl(12) = 12,\ Cl(13) = E,\ Cl(14) = 124,\ Cl(23) = 234,\ Cl(24) = 24,\ Cl(34) = 34,$
$Cl(123) = E,\ Cl(124) = 124,\ Cl(134) = E,\ Cl(234) = 234,\ Cl(E) = E.$

Consideremos ahora en el espacio topológico el subconjunto $W = 14$. Puesto que ahora: $A \triangle W = A \triangle 14 = ((A \cap 23) \cup (A^c \cap 14))$,
La aplicación $\varphi_w: P(E) \to P(E)$ tal que $\varphi_{14}(A) = A \triangle 14\ \ \forall A \in P(E)$, es:

$\varphi_{14}(\emptyset) = 14,\ \varphi_{14}(1) = 4,\ \varphi_{14}(2) = 124,\ \varphi_{14}(3) = 134, \varphi_{14}(4) = 1,$
$\varphi_{14}(12) = 24,\ \varphi_{14}(13) = 34,\ \varphi_{14}(14) = \emptyset,\ \varphi_{14}(23) = E,\ \varphi_{14}(24) = 12,\ \varphi_{14}(34) = 13,$
$\varphi_{14}(123) = 234, \varphi_{14}(124) = 2,\ \varphi_{14}(134) = 3,\ \varphi_{14}(234) = 123,\ \varphi_{14}(E) = 23.$

En consecuencia, de acuerdo con la expresión $\hat{g} = (\varphi_w \circ g \circ \varphi_w)$, las extensiones $\widehat{Int}_{14} = (\varphi_{14} \circ Int_{14} \circ \varphi_{14})$ y $\widehat{Cl}_{14} = (\varphi_{14} \circ Cl_{14} \circ \varphi_{14})$ son:



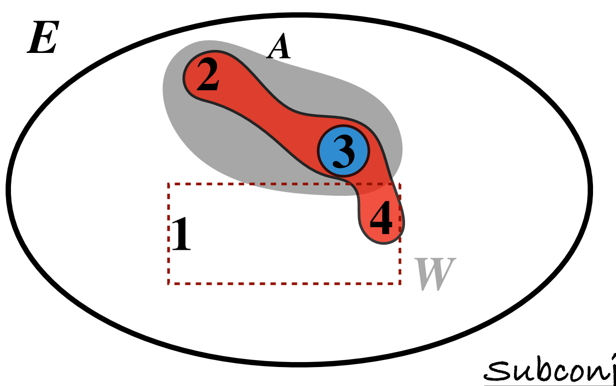
$\widehat{Int}_{14}(\emptyset) = 4,\ \widehat{Int}_{14}(1) = 14,\ \widehat{Int}_{14}(2) = 24,\ \widehat{Int}_{14}(3) = 3, \widehat{Int}_{14}(4) = 4,\ \widehat{Int}_{14}(12) = 14,$
$\widehat{Int}_{14}(13) = 13,\ \widehat{Int}_{14}(14) = 14,\ \widehat{Int}_{14}(23) = 23,\ \widehat{Int}_{14}(24) = 24,\ \widehat{Int}_{14}(34) = 34,$
$\widehat{Int}_{14}(123) = 13, \widehat{Int}_{14}(124) = 14,\ \widehat{Int}_{14}(134) = 134,\ \widehat{Int}_{14}(234) = 234,\ \widehat{Int}_{14}(E) = 134.$

$\widehat{Cl}_{14}(\emptyset) = 2,\ \widehat{Cl}_{14}(1) = 1,\ \widehat{Cl}_{14}(2) = 2,\ \widehat{Cl}_{14}(3) = 23,\ \widehat{Cl}_{14}(4) = 24,\ \widehat{Cl}_{14}(12) = 12,$
$\widehat{Cl}_{14}(13) = 13,\ \widehat{Cl}_{14}(14) = 14,\ \widehat{Cl}_{14}(23) = 23,\ \widehat{Cl}_{14}(24) = 24,\ \widehat{Cl}_{14}(34) = 23,$
$\widehat{Cl}_{14}(123) = 123,\ \widehat{Cl}_{14}(124) = 124, \widehat{Cl}_{14}(134) = 13,\ \widehat{Cl}_{14}(234) = 23,\ \widehat{Cl}_{14}(E) = 123.$

Orden de actividad:
$(A \sqsubseteq^{14} B) \Leftrightarrow ((14 \cap B) \subseteq A \subseteq (14 \cup B)),$
$14 \sqsubseteq^{14} A \sqsubseteq^{14} 23 \quad \forall A \in P(E)$

En $(E, \varphi_w(\Im))$ se verifica:
$\big(\widehat{Int}_{14}(23) \sqsubseteq^{14} 23 \sqsubseteq^{14} \widehat{Cl}_{14}(23)\big)$
$\big(\quad 23 \sqsubseteq^{14} 23 \sqsubseteq^{14} 23 \quad\big)$

Ejemplo $E = \{1, 2, 3, 4\}$ $P(E) = \{\, \varnothing, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E \,\}$



Subconjunto: $A=23$

$\big(Int(23) \subseteq 23 \subseteq Cl(23)\big)$

$\big(\quad 3 \subseteq 23 \subseteq 234 \quad\big).$

Sea la familia de abiertos $\Im = \{\, \varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \,\}$. En consecuencia, la familia de cerrados es $\Im^* = \{\, \varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \,\}$.

En el espacio topológico $(E, \Im)$ se verifica:

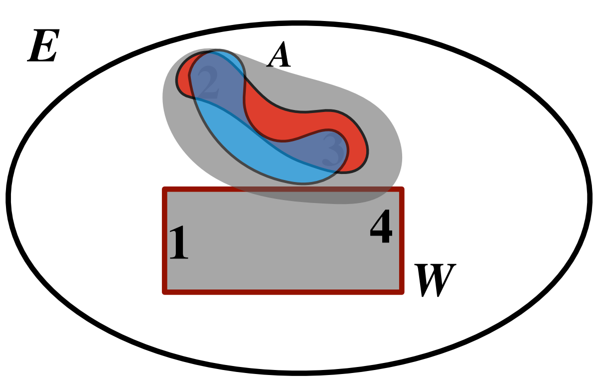
$Int(\varnothing) = \varnothing,\ Int(1) = 1,\ Int(2) = \varnothing,\ Int(3) = 3, Int(4) = \varnothing,$
$Int(12) = 12,\ Int(13) = 13,\ Int(14) = 1,\ Int(23) = 3,\ Int(24) = \varnothing,\ Int(34) = 34,$
$Int(123) = 123, Int(124) = 12,\ Int(134) = 134,\ Int(234) = 34,\ Int(E) = E.$

$Cl(\varnothing) = \varnothing,\ Cl(1) = 12,\ Cl(2) = 2,\ Cl(3) = 34, Cl(4) = 4,$
$Cl(12) = 12,\ Cl(13) = E,\ Cl(14) = 124,\ Cl(23) = 234,\ Cl(24) = 24,\ Cl(34) = 34,$
$Cl(123) = E,\ Cl(124) = 124,\ Cl(134) = E,\ Cl(234) = 234,\ Cl(E) = E.$

Consideremos ahora en el espacio topológico el subconjunto $W = 14$. Puesto que ahora: $A \triangle W = A \triangle 14 = ((A \cap 23) \cup (A^c \cap 14))$,
La aplicación φ_w: $P(E) \to P(E)$ tal que $\varphi_{14}(A) = A \triangle 14 \ \ \forall A \in P(E)$, es:

$\varphi_{14}(\varnothing) = 14,\ \varphi_{14}(1) = 4,\ \varphi_{14}(2) = 124,\ \varphi_{14}(3) = 134, \varphi_{14}(4) = 1,$
$\varphi_{14}(12) = 24,\ \varphi_{14}(13) = 34,\ \varphi_{14}(14) = \varnothing,\ \varphi_{14}(23) = E,\ \varphi_{14}(24) = 12,\ \varphi_{14}(34) = 13,$
$\varphi_{14}(123) = 234, \varphi_{14}(124) = 2,\ \varphi_{14}(134) = 3,\ \varphi_{14}(234) = 123,\ \varphi_{14}(E) = 23.$

En consecuencia, de acuerdo con la expresión $\hat{g} = (\varphi_w \circ g \circ \varphi_w)$, las extensiones $\widehat{Int}_{14} = (\varphi_{14} \circ Int_{14} \circ \varphi_{14})$ y $\widehat{Cl}_{14} = (\varphi_{14} \circ Cl_{14} \circ \varphi_{14})$ son:



$\widehat{Int}_{14}(\varnothing) = 4,\ \widehat{Int}_{14}(1) = 14,\ \widehat{Int}_{14}(2) = 24,\ \widehat{Int}_{14}(3) = 3, \widehat{Int}_{14}(4) = 4,\ \widehat{Int}_{14}(12) = 14,$
$\widehat{Int}_{14}(13) = 13,\ \widehat{Int}_{14}(14) = 14,\ \widehat{Int}_{14}(23) = 23,\ \widehat{Int}_{14}(24) = 24,\ \widehat{Int}_{14}(34) = 34,$
$\widehat{Int}_{14}(123) = 13, \widehat{Int}_{14}(124) = 14,\ \widehat{Int}_{14}(134) = 134,\ \widehat{Int}_{14}(234) = 234,\ \widehat{Int}_{14}(E) = 134.$

$\widehat{Cl}_{14}(\varnothing) = 2,\ \widehat{Cl}_{14}(1) = 1,\ \widehat{Cl}_{14}(2) = 2,\ \widehat{Cl}_{14}(3) = 23,\ \widehat{Cl}_{14}(4) = 24,\ \widehat{Cl}_{14}(12) = 12,$
$\widehat{Cl}_{14}(13) = 13,\ \widehat{Cl}_{14}(14) = 14,\ \widehat{Cl}_{14}(23) = 23,\ \widehat{Cl}_{14}(24) = 24,\ \widehat{Cl}_{14}(34) = 23,$
$\widehat{Cl}_{14}(123) = 123,\ \widehat{Cl}_{14}(124) = 124, \widehat{Cl}_{14}(134) = 13,\ \widehat{Cl}_{14}(234) = 23,\ \widehat{Cl}_{14}(E) = 123.$

Orden de actividad:

$(A \sqsubseteq^{14} B) \Leftrightarrow ((14 \cap B) \subseteq A \subseteq (14 \cup B)),$

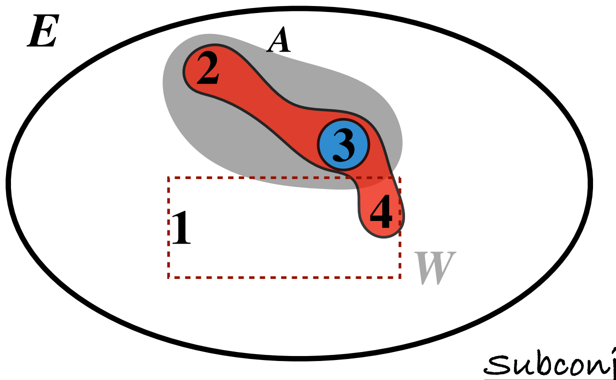
$14 \sqsubseteq^{14} A \sqsubseteq^{14} 23 \quad \forall A \in P(E)$

En $(E, \varphi_w(\Im))$ se verifica:

$\big(\widehat{Int}_{14}(23) \sqsubseteq^{14} 23 \sqsubseteq^{14} \widehat{Cl}_{14}(23)\big)$

$\big(\quad 23 \sqsubseteq^{14} 23 \sqsubseteq^{14} 23 \quad\big)$

$\varphi_{14}(\Im)$ **no** es cerrado para $\cap$ y $\cup$, Ejemplo $E = \{1, 2, 3, 4\}$ $P(E) = \{\varnothing, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E\}$



Subconjunto: A=23

$\left(Int(23) \subseteq 23 \subseteq Cl(23)\right)$

$\left(3 \subseteq 23 \subseteq 234\right)$.

Sea la familia de abiertos $\Im = \{\varnothing, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E\}$. En consecuencia, la familia de cerrados es $\Im^* = \{\varnothing, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E\}$.

En el espacio topológico $(E, \Im)$ se verifica:

$Int(\varnothing) = \varnothing,\ Int(1) = 1,\ Int(2) = \varnothing,\ Int(3) = 3, Int(4) = \varnothing,$
$Int(12) = 12,\ Int(13) = 13,\ Int(14) = 1,\ Int(23) = 3,\ Int(24) = \varnothing,\ Int(34) = 34,$
$Int(123) = 123, Int(124) = 12,\ Int(134) = 134,\ Int(234) = 34,\ Int(E) = E.$

$Cl(\varnothing) = \varnothing,\ Cl(1) = 12,\ Cl(2) = 2,\ Cl(3) = 34, Cl(4) = 4,$
$Cl(12) = 12,\ Cl(13) = E,\ Cl(14) = 124,\ Cl(23) = 234,\ Cl(24) = 24,\ Cl(34) = 34,$
$Cl(123) = E,\ Cl(124) = 124,\ Cl(134) = E,\ Cl(234) = 234,\ Cl(E) = E.$

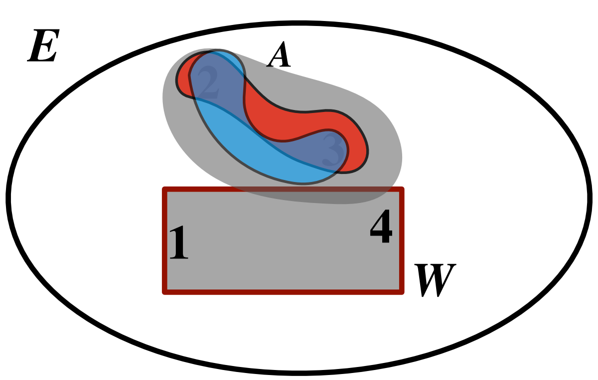
Consideremos ahora en el espacio topológico el subconjunto $W = 14$. Puesto que ahora: $A \triangle W = A \triangle 14 = ((A \cap 23) \cup (A^c \cap 14))$,
La aplicación φ_w: $P(E) \to P(E)$ tal que $\varphi_{14}(A) = A \triangle 14\ \ \forall A \in P(E)$, es:

$\varphi_{14}(\varnothing) = 14,\ \varphi_{14}(1) = 4,\ \varphi_{14}(2) = 124,\ \varphi_{14}(3) = 134, \varphi_{14}(4) = 1,$
$\varphi_{14}(12) = 24,\ \varphi_{14}(13) = 34,\ \varphi_{14}(14) = \varnothing,\ \varphi_{14}(23) = E,\ \varphi_{14}(24) = 12,\ \varphi_{14}(34) = 13,$
$\varphi_{14}(123) = 234, \varphi_{14}(124) = 2,\ \varphi_{14}(134) = 3,\ \varphi_{14}(234) = 123,\ \varphi_{14}(E) = 23.$

NO es espacio topológico $(E, \varphi_w(\Im))$:

$\varphi_w(\Im) = \{3, 4, 13, 14, 23, 24, 34, 134, 234\}$
$\varphi_w(\Im^*) = \{1, 2, 12, 13, 14, 23, 24, 123, 124\}$

En consecuencia, de acuerdo con la expresión $\hat{g} = (\varphi_w \circ g \circ \varphi_w)$, las extensiones $\widehat{Int}_{14} = (\varphi_{14} \circ Int_{14} \circ \varphi_{14})$ y $\widehat{Cl}_{14} = (\varphi_{14} \circ Cl_{14} \circ \varphi_{14})$ son:



$\widehat{Int}_{14}(\varnothing) = 4,\ \widehat{Int}_{14}(1) = 14,\ \widehat{Int}_{14}(2) = 24,\ \widehat{Int}_{14}(3) = 3, \widehat{Int}_{14}(4) = 4,\ \widehat{Int}_{14}(12) = 14,$
$\widehat{Int}_{14}(13) = 13,\ \widehat{Int}_{14}(14) = 14,\ \widehat{Int}_{14}(23) = 23,\ \widehat{Int}_{14}(24) = 24,\ \widehat{Int}_{14}(34) = 34,$
$\widehat{Int}_{14}(123) = 13, \widehat{Int}_{14}(124) = 14,\ \widehat{Int}_{14}(134) = 134,\ \widehat{Int}_{14}(234) = 234,\ \widehat{Int}_{14}(E) = 134.$

$\widehat{Cl}_{14}(\varnothing) = 2,\ \widehat{Cl}_{14}(1) = 1,\ \widehat{Cl}_{14}(2) = 2,\ \widehat{Cl}_{14}(3) = 23,\ \widehat{Cl}_{14}(4) = 24,\ \widehat{Cl}_{14}(12) = 12,$
$\widehat{Cl}_{14}(13) = 13,\ \widehat{Cl}_{14}(14) = 14,\ \widehat{Cl}_{14}(23) = 23,\ \widehat{Cl}_{14}(24) = 24,\ \widehat{Cl}_{14}(34) = 23,$
$\widehat{Cl}_{14}(123) = 123,\ \widehat{Cl}_{14}(124) = 124, \widehat{Cl}_{14}(134) = 13,\ \widehat{Cl}_{14}(234) = 23,\ \widehat{Cl}_{14}(E) = 123.$

Orden de actividad:

$(A \sqsubseteq^{14} B) \Leftrightarrow ((14 \cap B) \subseteq A \subseteq (14 \cup B))$,

$14 \sqsubseteq^{14} A \sqsubseteq^{14} 23 \quad \forall A \in P(E)$

En $(E, \varphi_w(\Im))$ se verifica:

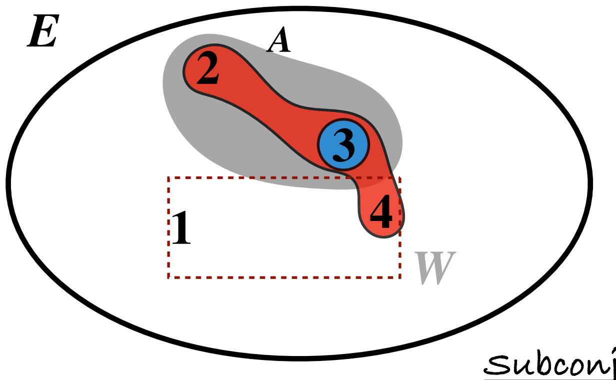
$\left(\widehat{Int}_{14}(23) \sqsubseteq^{14} 23 \sqsubseteq^{14} \widehat{Cl}_{14}(23)\right)$

$\left(23 \sqsubseteq^{14} 23 \sqsubseteq^{14} 23\right)$

$\varphi_{14}(\Im)$ **no** es cerrado para $\cap$ y $\cup$,

W-TOPOLOGÍAS SOBRE CONJUNTOS FINITOS Y ORDEN DE ACTIVIDAD

Ejemplo $E = \{1, 2, 3, 4\}$ $P(E) = \{ \emptyset, 1, 2, 3, 4, 12, 13, 14, 23, 24, 34, 123, 124, 134, 234, E \}$



Subconjunto: $A=23$

$\left(\color{blue}{Int(23)} \subseteq 23 \subseteq \color{red}{Cl(23)}\right)$

$(\quad 3 \subseteq 23 \subseteq 234 \quad).$

Sea la familia de abiertos $\Im = \{ \emptyset, 1, 3, 12, 13, 34, 123, 134, E \}$. En consecuencia, la familia de cerrados es $\Im^* = \{ \emptyset, 2, 4, 12, 24, 34, 124, 234, E \}$.

En el espacio topológico $(E, \Im)$ se verifica:

$Int(\emptyset) = \emptyset,\ Int(1) = 1,\ Int(2) = \emptyset,\ Int(3) = 3, Int(4) = \emptyset,$
$Int(12) = 12,\ Int(13) = 13,\ Int(14) = 1,\ Int(23) = 3,\ Int(24) = \emptyset,\ Int(34) = 34,$
$Int(123) = 123, Int(124) = 12,\ Int(134) = 134,\ Int(234) = 34,\ Int(E) = E.$

$Cl(\emptyset) = \emptyset,\ Cl(1) = 12,\ Cl(2) = 2,\ Cl(3) = 34, Cl(4) = 4,$
$Cl(12) = 12,\ Cl(13) = E,\ Cl(14) = 124,\ Cl(23) = 234,\ Cl(24) = 24,\ Cl(34) = 34,$
$Cl(123) = E,\ Cl(124) = 124,\ Cl(134) = E,\ Cl(234) = 234,\ Cl(E) = E.$

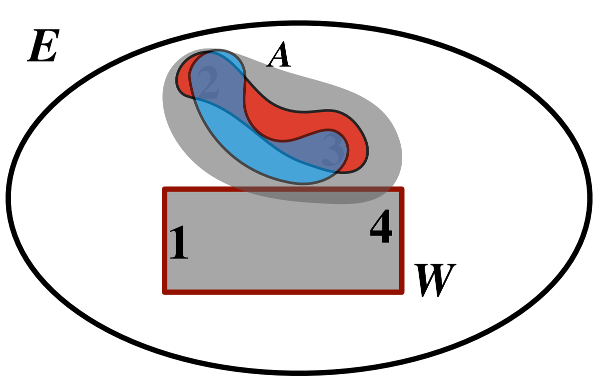
Consideremos ahora en el espacio topológico el subconjunto $W = 14$. Puesto que ahora: $A\triangle W = A\triangle 14 =((A\cap 23)\cup(A^c\cap 14)),$
La aplicación φ_w: $P(E)\rightarrow P(E)$ tal que $\varphi_{14}(A) = A\triangle 14$ $\forall A\in P(E)$, es:

$\varphi_{14}(\emptyset) = 14,\ \varphi_{14}(1) = 4,\ \varphi_{14}(2) = 124,\ \varphi_{14}(3) = 134, \varphi_{14}(4) = 1,$
$\varphi_{14}(12) = 24,\ \varphi_{14}(13) = 34,\ \varphi_{14}(14) = \emptyset,\ \varphi_{14}(23) = E,\ \varphi_{14}(24) = 12,\ \varphi_{14}(34) =13,$
$\varphi_{14}(123) = 234, \varphi_{14}(124) = 2,\ \varphi_{14}(134) = 3,\ \varphi_{14}(234) = 123,\ \varphi_{14}(E) =23.$

SI es espacio w-topológico $(E, \varphi_w(\Im))$:

$\varphi_w(\Im) = \{ 3, 4, 13, 14, 23, 24, 34, 134, 234 \}$
$\varphi_w(\Im^*) = \{ 1, 2, 12, 13, 14, 23, 24, 123, 124 \}$

En consecuencia, de acuerdo con la expresión $\hat{g} = (\varphi_w \circ g \circ \varphi_w)$, las extensiones $\widehat{Int}_{14} = (\varphi_{14} \circ Int_{14} \circ \varphi_{14})$ y $\widehat{Cl}_{14} = (\varphi_{14} \circ Cl_{14} \circ \varphi_{14})$ son:



$\widehat{Int}_{14}(\emptyset) = 4,\ \widehat{Int}_{14}(1) = 14,\ \widehat{Int}_{14}(2) = 24,\ \widehat{Int}_{14}(3) = 3, \widehat{Int}_{14}(4) = 4,\ \widehat{Int}_{14}(12) = 14,$
$\widehat{Int}_{14}(13) = 13,\ \widehat{Int}_{14}(14) = 14,\ \widehat{Int}_{14}(23) = 23,\ \widehat{Int}_{14}(24) = 24,\ \widehat{Int}_{14}(34) = 34,$
$\widehat{Int}_{14}(123) = 13, \widehat{Int}_{14}(124) = 14,\ \widehat{Int}_{14}(134) = 134,\ \widehat{Int}_{14}(234) = 234,\ \widehat{Int}_{14}(E) = 134.$

$\widehat{Cl}_{14}(\emptyset) = 2,\ \widehat{Cl}_{14}(1) = 1,\ \widehat{Cl}_{14}(2) = 2,\ \widehat{Cl}_{14}(3) = 23,\ \widehat{Cl}_{14}(4) = 24,\ \widehat{Cl}_{14}(12) = 12,$
$\widehat{Cl}_{14}(13) = 13,\ \widehat{Cl}_{14}(14) = 14,\ \widehat{Cl}_{14}(23) = 23,\ \widehat{Cl}_{14}(24) = 24,\ \widehat{Cl}_{14}(34) = 23,$
$\widehat{Cl}_{14}(123) = 123,\ \widehat{Cl}_{14}(124) = 124, \widehat{Cl}_{14}(134) = 13,\ \widehat{Cl}_{14}(234) = 23,\ \widehat{Cl}_{14}(E) = 123.$

Orden de actividad:

$(A \sqsubseteq^{14} B) \Leftrightarrow ((14 \cap B) \subseteq A \subseteq (14 \cup B)),$

$14 \sqsubseteq^{14} A \sqsubseteq^{14} 23 \quad \forall A \in P(E)$

En $(E, \varphi_w(\Im))$ se verifica:

$\left(\color{blue}{\widehat{Int}_{14}(23)} \sqsubseteq^{14} 23 \sqsubseteq^{14} \color{red}{\widehat{Cl}_{14}(23)}\right)$

$(\quad 23 \sqsubseteq^{14} 23 \sqsubseteq^{14} 23 \quad)$

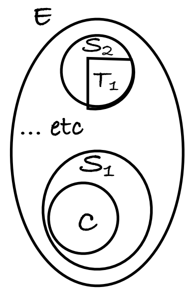
$\varphi_{14}(\Im)$ **no** es cerrado para $\cap$ y $\cup$,

$\varphi_{34}(\Im)$ es cerrado para $\sqcap^{14}$ y $\sqcup^{14}$.

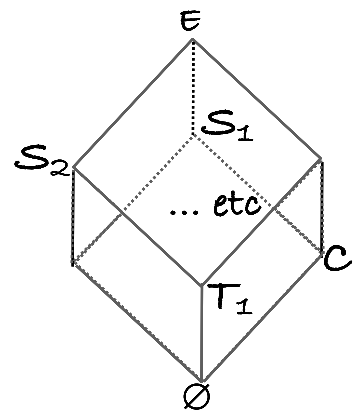
Definición de “w-topología” en $(P(X),\sqsubseteq^w,\sqcap^w,\sqcup^w,w, w^c),^c)$ utilizando el concepto de marco (frame) y el orden $\sqsubseteq^w$.

Espacio topológico (E, τ):

$E \neq \varnothing$, $\tau \subseteq \mathcal{P}(E)$, $\{\varnothing, E\} \subseteq \tau$,



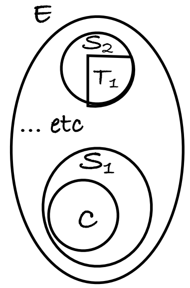
$(\mathcal{P}(E), \subseteq)$

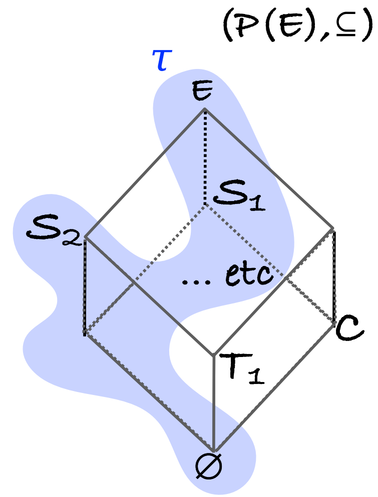


Espacio topológico (E, τ):

$E \neq \emptyset$, $\tau \subseteq \mathcal{P}(E)$, $\{\emptyset, E\} \subseteq \tau$,

(τ conjunto de abiertos).





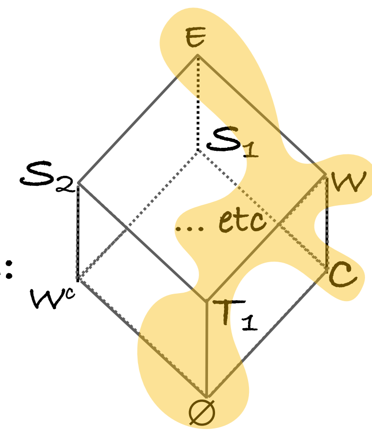
$S_j \in \tau \;\; \forall j \in J \Rightarrow (\bigcup_{j \in J} S_j) \in \tau$

$(S_1 \in \tau) \& (S_2 \in \tau) \Rightarrow (S_1 \cap S_2) \in \tau$

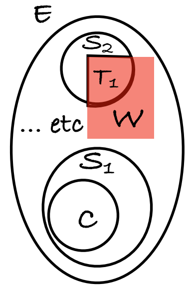
$x \in E$ es interior a $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow (\exists S \in \tau : x \in S \subseteq A)$

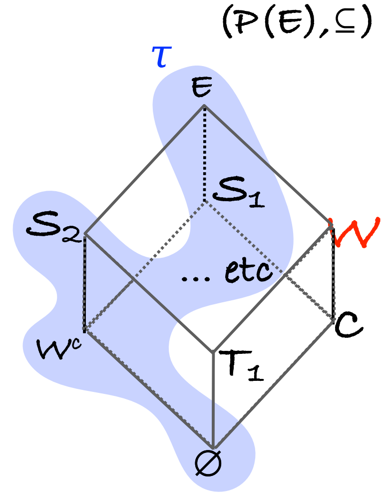
$\mathrm{int}(A) = \{x \,/\, x$ es interior a $A\}$

Cerrados:



Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:





$E\neq\emptyset$, $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{P}(E)$, $\{\emptyset,E\}\subseteq\mathcal{T}$,

($\mathcal{T}$ conjunto de abiertos).

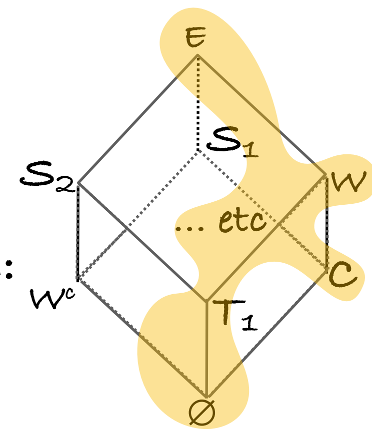
$S_j\in\mathcal{T}\ \ \forall j\in J \Rightarrow \left(\bigcup_{j\in J} S_j\right)\in\mathcal{T}$

$(S_1\in\mathcal{T})\,\&\,(S_2\in\mathcal{T}) \Rightarrow (S_1\cap S_2)\in\mathcal{T}$

$x\in E$ es interior a $A\in\mathcal{P}(E) \Leftrightarrow (\exists S \in \mathcal{T}: x \in S \subseteq A)$

$\mathrm{int}(A)=\{x \,/\, x \text{ es interior a } A\}$

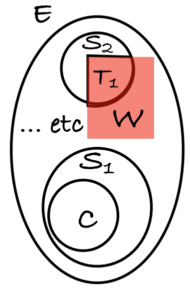
Cerrados:

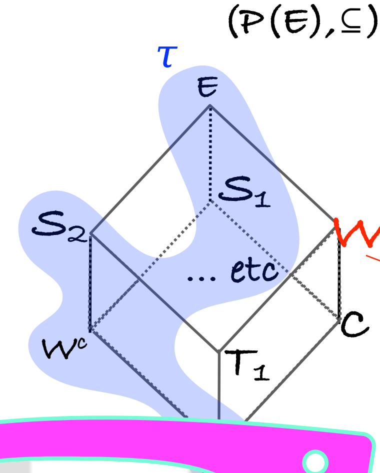


Espacio topológico (E, τ):

$E\neq\emptyset$, $\tau\subseteq\mathcal{P}(E)$, $\{\emptyset,E\}\subseteq\tau$,

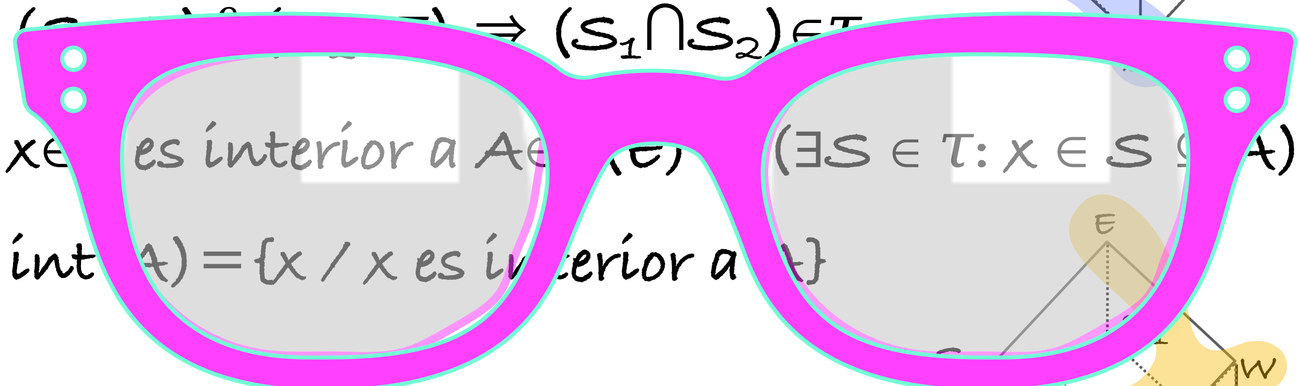
(τ conjunto de abiertos).





$S_j\in\tau \ \ \forall j\in J \Rightarrow (\bigcup_{j\in J} S_j)\in\tau$

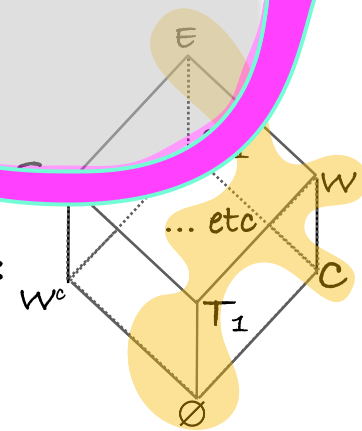
$\Rightarrow (S_1\cap S_2)\in\tau$

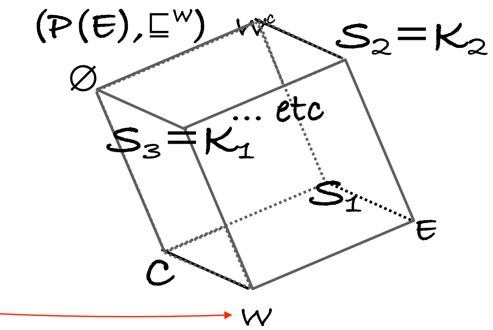


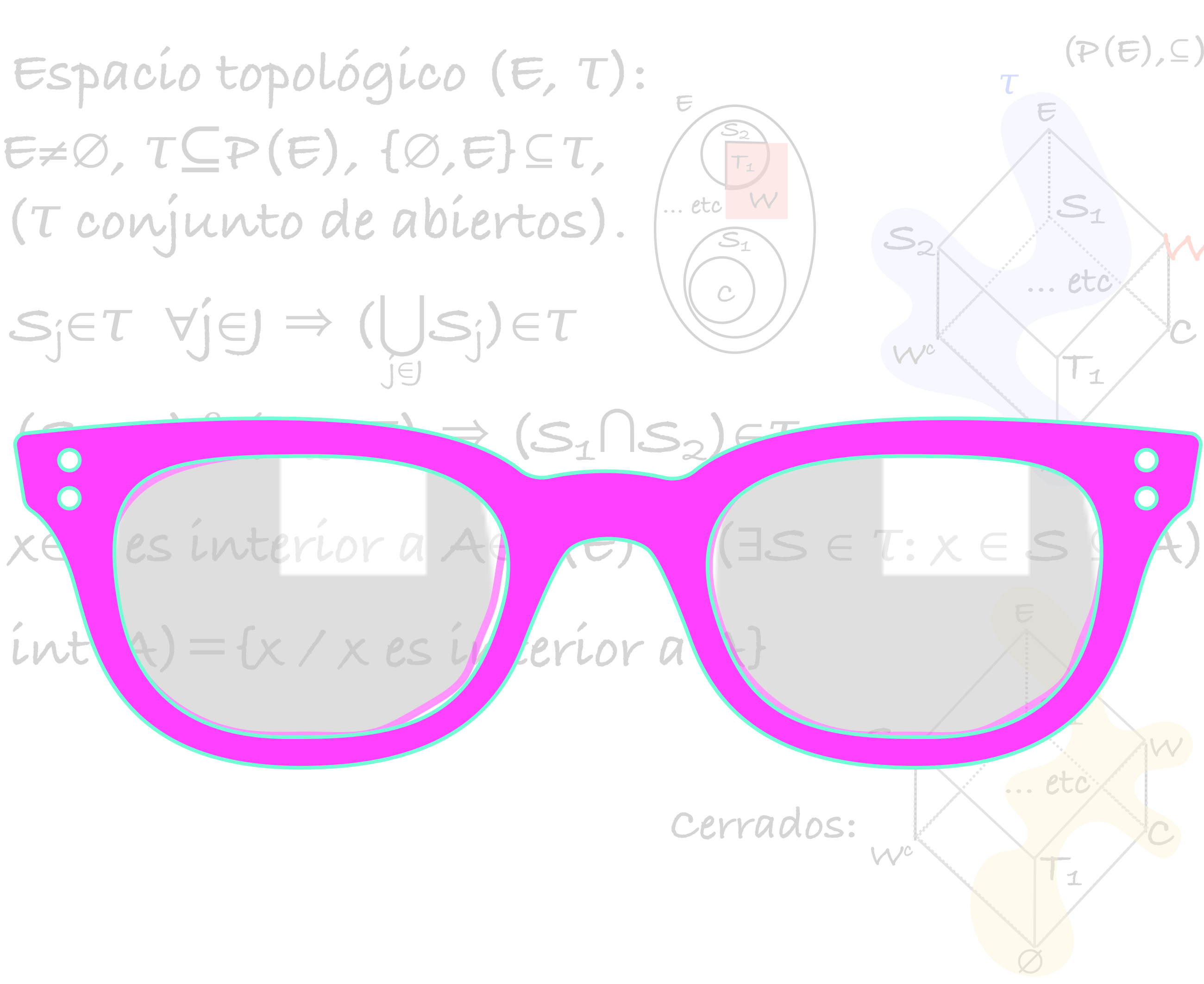
$x\in$ es interior a $A\in$ (E) $(\exists S \in \tau: x \in S$ $A)$

int $A) = \{x \,/\, x$ es in terior a $\}$

Cerrados:





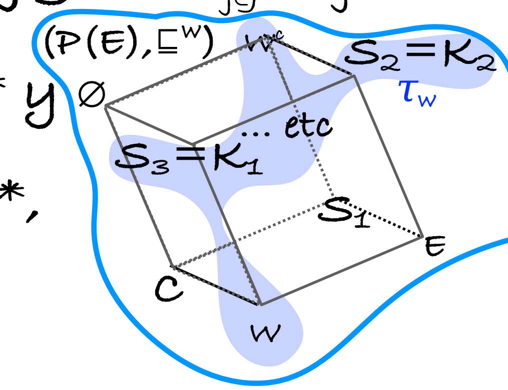


Sea $E\neq\varnothing$ y $W\in\mathcal{P}(E)$. En $(\mathcal{P}(E),\sqsubseteq^W)$ consideremos $\mathcal{T}^*\subseteq\mathcal{P}(E)$ tal que: (1) $\{W, W^c\}\subseteq\mathcal{T}^*$, (2) $(K_j\in\mathcal{T}^*\ \ \forall j\in J) \Rightarrow (\bigsqcup^W_{j\in J} K_j)\in\mathcal{T}^*$,

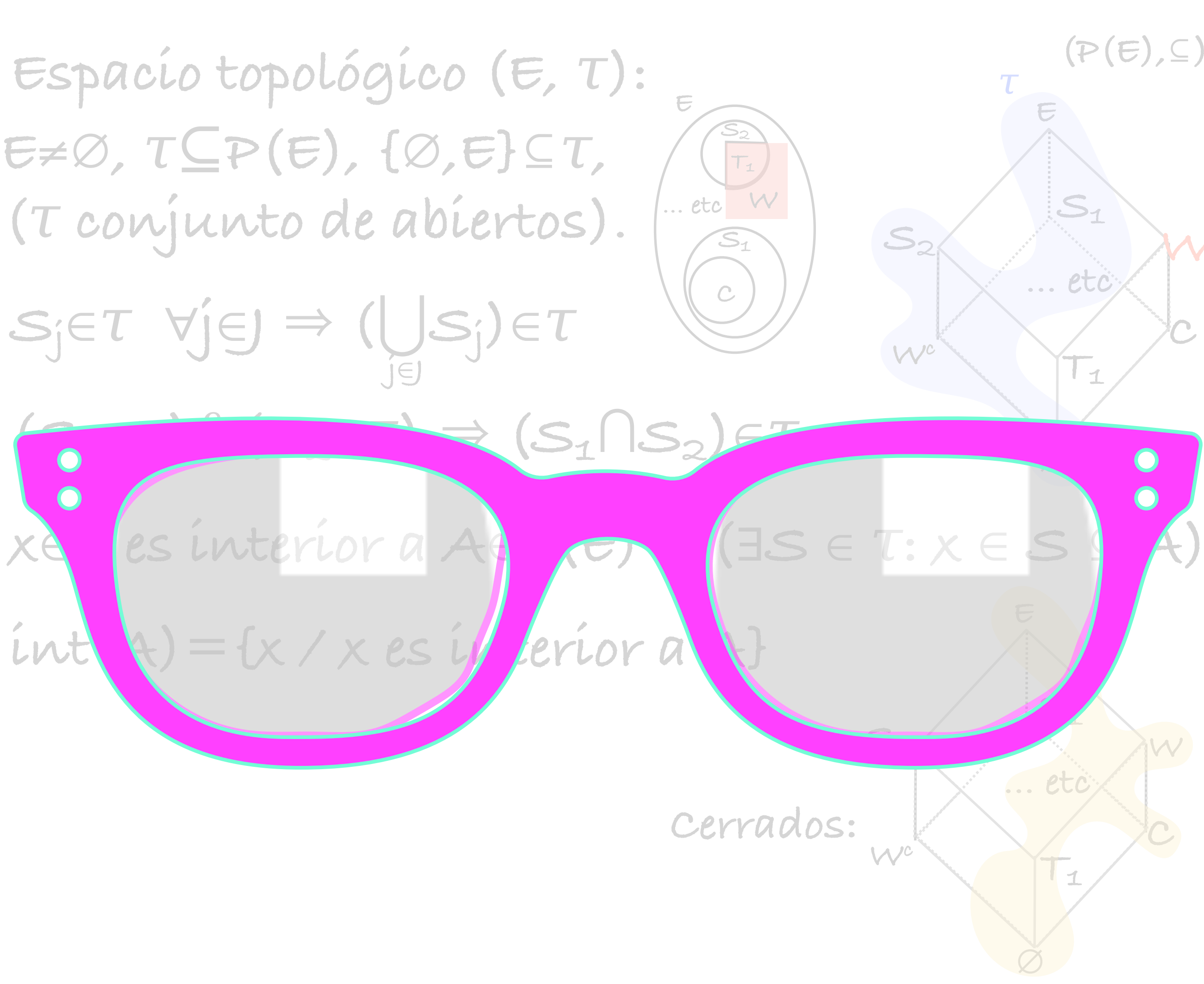
(3) $(K_1\in\mathcal{T}^*)\,\&\,(K_2\in\mathcal{T}^*) \Rightarrow (K_1\sqcap^W K_2)\in\mathcal{T}^*$ y

(4) $K\sqcap^W(\bigsqcup^W_{j\in J}K_j)=\bigsqcup^W_{j\in J}(K\sqcap^W K_j)\ \ \forall K,K_j\in\mathcal{T}^*$,

es decir, $\mathcal{T}^*$ es un <u>marco</u> (frame).(1)



(1) Topología sin puntos

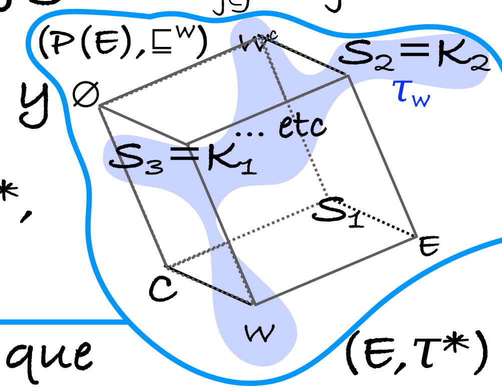


Sea $E \neq \emptyset$ y $W \in \mathcal{P}(E)$. En $(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^W)$ consideremos $\mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{P}(E)$ tal que: (1) $\{W, W^c\} \subseteq \mathcal{T}^*$, (2) $(K_j \in \mathcal{T}^* \ \ \forall j \in J) \Rightarrow (\bigsqcup^W_{j \in J} K_j) \in \mathcal{T}^*$,

(3) $(K_1 \in \mathcal{T}^*) \& (K_2 \in \mathcal{T}^*) \Rightarrow (K_1 \sqcap^W K_2) \in \mathcal{T}^*$ y

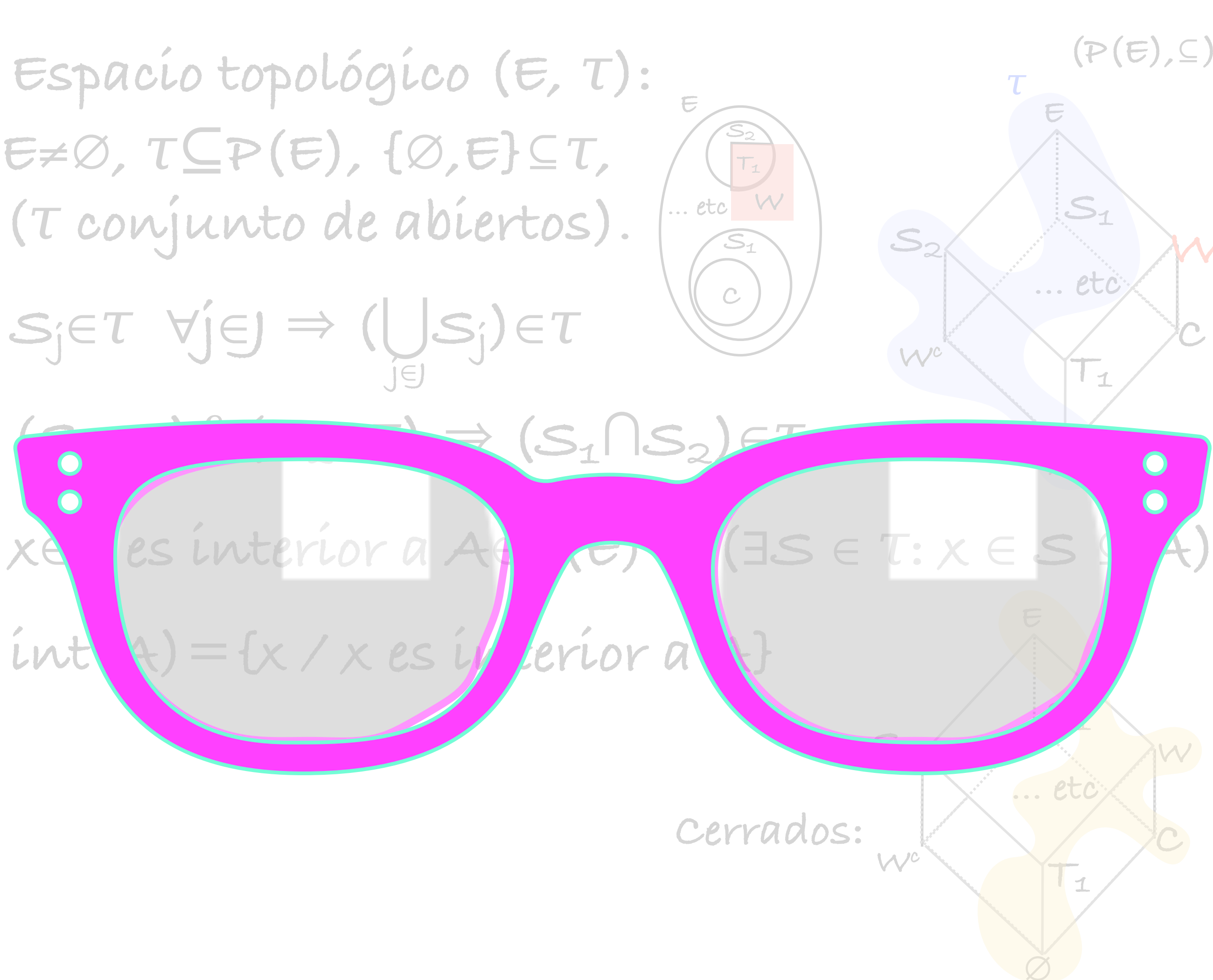
(4) $K \sqcap^W (\bigsqcup^W_{j \in J} K_j) = \bigsqcup^W_{j \in J} (K \sqcap^W K_j) \ \forall K, K_j \in \mathcal{T}^*$,

es decir, $\mathcal{T}^*$ es un <u>marco</u> (frame).[1]



Diremos que $\mathcal{T}^*$ es una "<u>w-topología</u>"; que $(E, \mathcal{T}^*)$ es un "<u>espacio w-topológico</u>" y que $K \in \mathcal{T}^*$ es <u>w-abierto.</u>

[1] Topología sin puntos

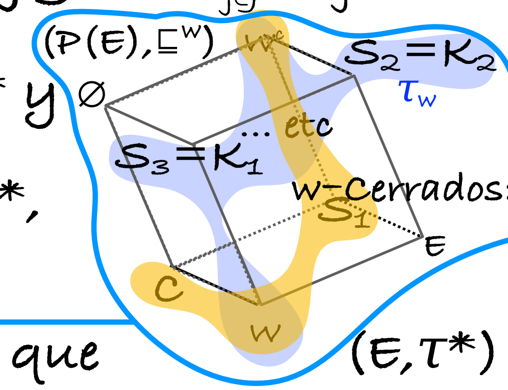


Sea $E\neq\emptyset$ y $W\in\mathcal{P}(E)$. En $(\mathcal{P}(E),\sqsubseteq^W)$ consideremos $\mathcal{T}^*\subseteq\mathcal{P}(E)$ tal que: (1) $\{W, W^c\}\subseteq\mathcal{T}^*$, (2) $(K_j\in\mathcal{T}^*\ \ \forall j\in J)\Rightarrow(\bigsqcup^W_{j\in J}K_j)\in\mathcal{T}^*$,

(3) $(K_1\in\mathcal{T}^*)\,\&\,(K_2\in\mathcal{T}^*)\Rightarrow(K_1\sqcap^W K_2)\in\mathcal{T}^*$ y

(4) $K\sqcap^W(\bigsqcup^W_{j\in J}K_j)=\bigsqcup^W_{j\in J}(K\sqcap^W K_j)\ \ \forall K,K_j\in\mathcal{T}^*$,

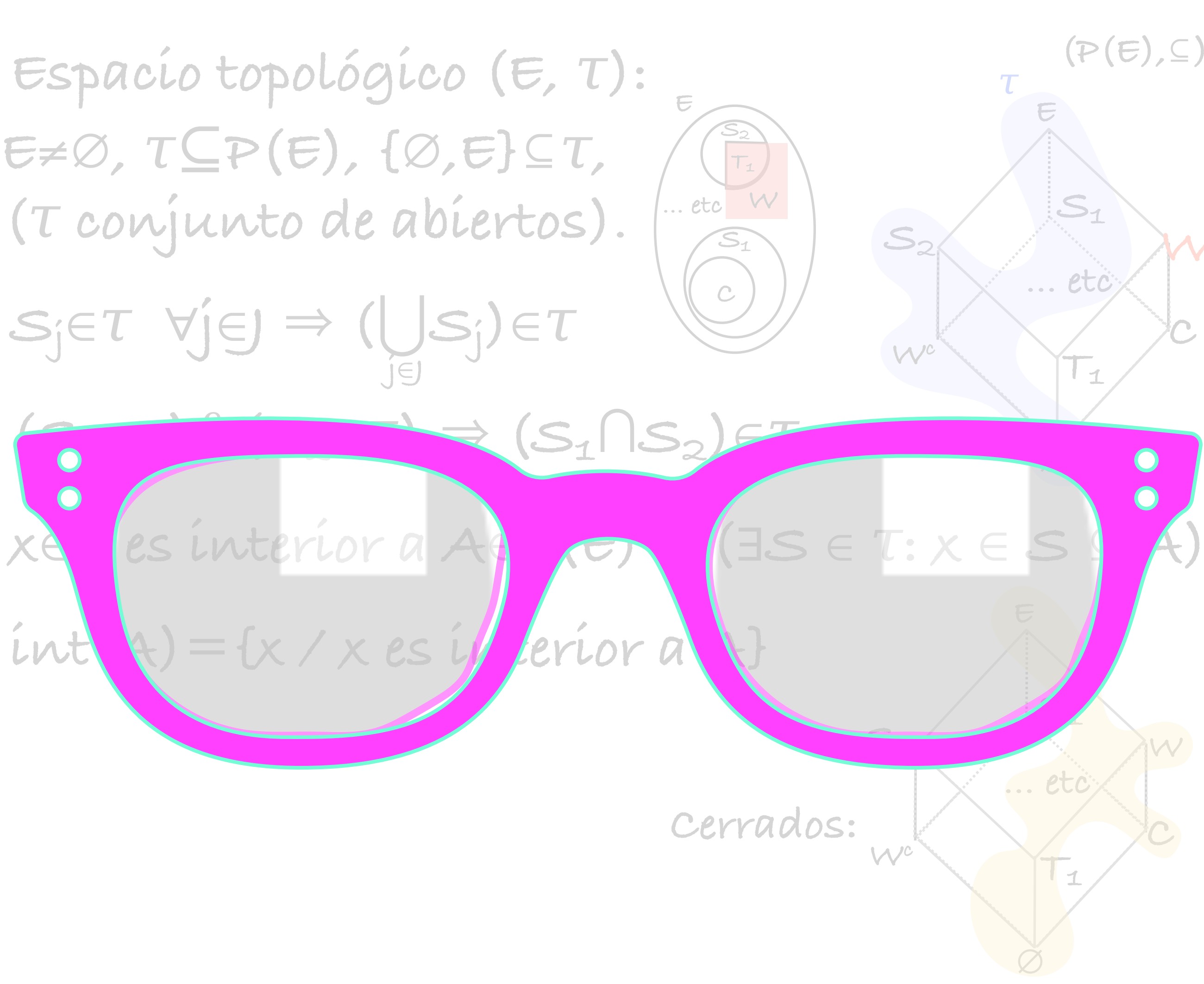
es decir, $\mathcal{T}^*$ es un marco (frame). (1)



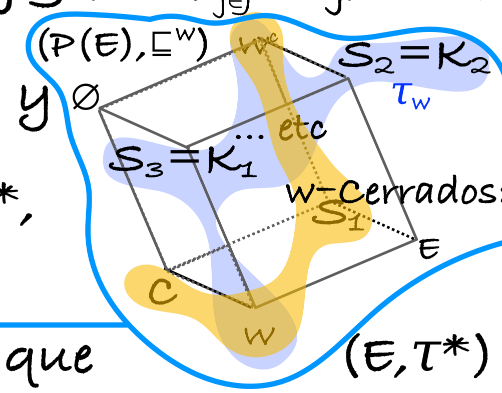
Diremos que $\mathcal{T}^*$ es una "w-topología"; que $(E,\mathcal{T}^*)$ es un "espacio w-topológico" y que $K\in\mathcal{T}^*$ es w-abierto.

T es w-cerrado $\Leftrightarrow$ $K=T^c$ es w-abierto.

(1) Topología sin puntos



Sea $E\neq\varnothing$ y $W\in\mathcal{P}(E)$. En $(\mathcal{P}(E),\sqsubseteq^W)$ consideremos $\mathcal{T}^*\subseteq\mathcal{P}(E)$ tal que: (1) $\{W, W^c\}\subseteq\mathcal{T}^*$, (2) $(K_j\in\mathcal{T}^*\ \ \forall j\in J)\Rightarrow(\bigsqcup^W_{j\in J}K_j)\in\mathcal{T}^*$, (3) $(K_1\in\mathcal{T}^*)\,\&\,(K_2\in\mathcal{T}^*)\Rightarrow(K_1\sqcap^W K_2)\in\mathcal{T}^*$ y (4) $K\sqcap^W(\bigsqcup^W_{j\in J}K_j)=\bigsqcup^W_{j\in J}(K\sqcap^W K_j)\ \ \forall K,K_j\in\mathcal{T}^*$, es decir, $\mathcal{T}^*$ es un <u>marco</u> (frame).(1)



Diremos que $\mathcal{T}^*$ es una "<u>w-topología</u>"; que $(E,\mathcal{T}^*)$ es un "<u>espacio w-topológico</u>" y que $K\in\mathcal{T}^*$ es <u>w-abierto.</u>

<u>Def.</u> <u>w-interior</u>$(A)=\begin{cases} W & \text{si } \{K\in\mathcal{T}^*/\ K\sqsubseteq^W A\}=\varnothing \\ \bigsqcup^W(K\in\mathcal{T}^*/\ K\sqsubseteq^W A) & \text{en otro caso.}\end{cases}\ \ \forall A\in\mathcal{P}(E)$

y <u>w-cl(A)</u> $=(\text{w-interior}(A^c))^c\ \ \forall A\in\mathcal{P}(E)$

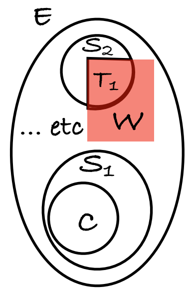
T es <u>w-cerrado</u> $\Leftrightarrow$ $K=T^c$ es w-abierto.

(1) Topología sin puntos

Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:

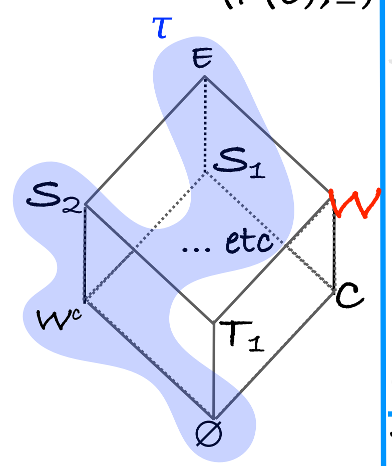
$E \neq \emptyset$, $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{P}(E)$, $\{\emptyset, E\} \subseteq \mathcal{T}$,

($\mathcal{T}$ conjunto de abiertos).



$S_j \in \mathcal{T} \;\; \forall j \in J \Rightarrow (\bigcup_{j\in J} S_j) \in \mathcal{T}$

$(S_1 \in \mathcal{T}) \,\&\, (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \cap S_2) \in \mathcal{T}$

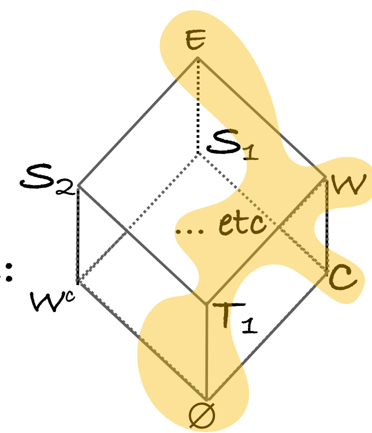


$x \in E$ es interior a $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow (\exists S \in \mathcal{T} : x \in S \subseteq A)$

$int(A) = \{x \,/\, x$ es interior a $A\}$

Marco

Cerrados:



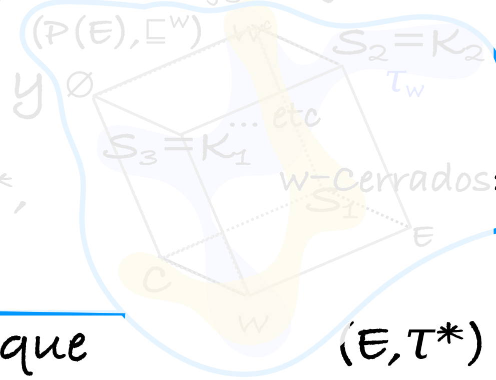
Sea $E \neq \emptyset$ y $W \in \mathcal{P}(E)$. En $(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^W)$ consideremos $\mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{P}(E)$

tal que: (1) $\{W, W^c\} \subseteq \mathcal{T}^*$, (2) $(K_j \in \mathcal{T}^* \;\; \forall j \in J) \Rightarrow (\bigsqcup^W_{j\in J} K_j) \in \mathcal{T}^*$,

(3) $(K_1 \in \mathcal{T}^*) \,\&\, (K_2 \in \mathcal{T}^*) \Rightarrow (K_1 \sqcap^W K_2) \in \mathcal{T}^*$ y $\emptyset$

(4) $K \sqcap^W (\bigsqcup^W_{j\in J} K_j) = \bigsqcup^W_{j\in J} (K \sqcap^W K_j) \;\; \forall K, K_j \in \mathcal{T}^*$,

es decir, $\mathcal{T}^*$ es un marco (frame).(1)



Diremos que $\mathcal{T}^*$ es una "w-topología"; que $(E, \mathcal{T}^*)$ es un "espacio w-topológico" y que $K \in \mathcal{T}^*$ es w-abierto.

Def. w-interior$(A) = \begin{cases} W & \text{si } \{K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^W A\} = \emptyset \\ \bigsqcup^W (K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^W A) & \text{en otro caso.} \end{cases} \;\; \forall A \in \mathcal{P}(E)$

y w-cl$(A) = ($w-interior$(A^c))^c \;\; \forall A \in \mathcal{P}(E)$

T es w-cerrado $\Leftrightarrow$ $K = T^c$ es w-abierto.

$W \in \mathcal{P}(E)$, Espacio w-topológico $(E, \mathcal{T}_W) = (E, \varphi_W(\mathcal{T}))$:

$\varphi_W(A) = A \Delta W = (A^c \cap W) \cup (A \cap W^c)$

$$\varphi_W(\mathcal{T}) = \{\varphi_W(S) \,/\, S \in \mathcal{T}\} \subseteq \mathcal{P}(E),$$

$$W = \varphi_W(\emptyset),\; W^c = \varphi_W(E),\; \emptyset = \varphi_W(W),\; E = \varphi_W(W^c),$$

$$\{W, W^c\} \subseteq \varphi_W(\mathcal{T})$$

$\{W^c, W\}$ es un subconjunto de w-abiertos y w-cerrados

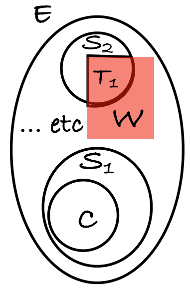
$$S_j \in \varphi_W(\mathcal{T}) \;\; \forall j \in J \Rightarrow (\bigsqcup^W_{j\in J} S_j) \in \mathcal{T}$$

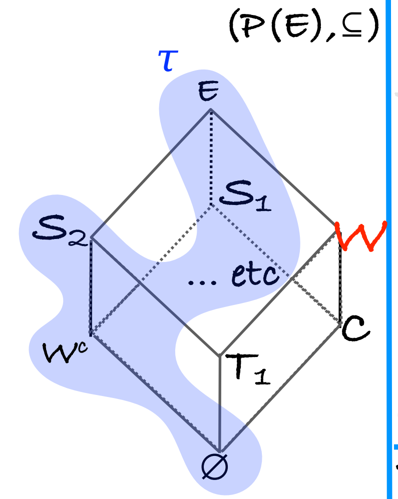
$$(S_1 \in \mathcal{T}) \,\&\, (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \sqcap^W S_2) \in \mathcal{T}$$

Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:

$E \neq \emptyset$, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(E)$, $\{\emptyset, E\} \subseteq \mathcal{T}$,

($\mathcal{T}$ conjunto de abiertos).





$S_j \in \mathcal{T} \;\; \forall j \in J \Rightarrow (\bigcup_{j \in J} S_j) \in \mathcal{T}$

$(S_1 \in \mathcal{T}) \& (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \cap S_2) \in \mathcal{T}$

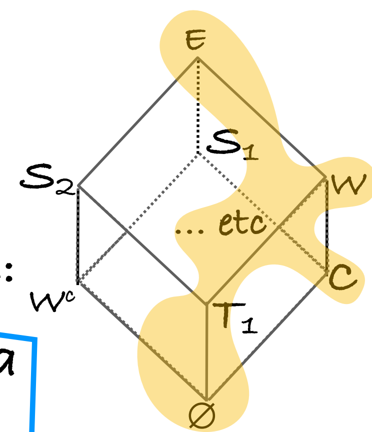
$x \in E$ es interior a $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow (\exists S \in \mathcal{T}: x \in S \subseteq A)$

$\mathrm{int}(A) = \{x \,/\, x$ es interior a $A\}$

Si $W = \emptyset$, el marco $\mathcal{T}_\emptyset$ es una topología en E por abiertos: $(\sqcup^\emptyset = \bigcup, \sqcap^\emptyset = \bigcap)$.

Marco

Cerrados:



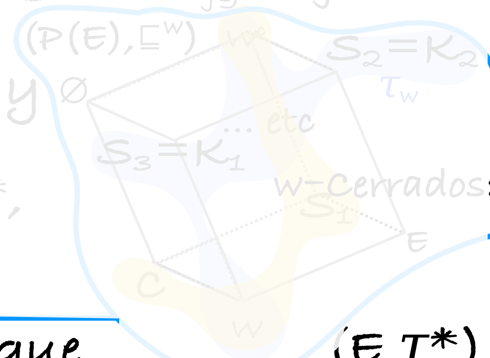
Si $W = E$, el marco $\mathcal{T}_E$ es una topología en E por cerrados: $(\sqcup^E = \bigcap, \sqcap^E = \bigcup)$.

Sea $E \neq \emptyset$ y $W \in \mathcal{P}(E)$. En $(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^W)$ consideremos $\mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{P}(E)$ tal que: (1) $\{W, W^c\} \subseteq \mathcal{T}^*$, (2) $(K_j \in \mathcal{T}^* \;\; \forall j \in J) \Rightarrow (\bigsqcup^W_{j \in J} K_j) \in \mathcal{T}^*$,

(3) $(K_1 \in \mathcal{T}^*) \& (K_2 \in \mathcal{T}^*) \Rightarrow (K_1 \sqcap^W K_2) \in \mathcal{T}^*$ y

(4) $K \sqcap^W (\bigsqcup^W_{j \in J} K_j) = \bigsqcup^W_{j \in J} (K \sqcap^W K_j) \;\; \forall K, K_j \in \mathcal{T}^*$,

es decir, $\mathcal{T}^*$ es un marco (frame).(1)



Diremos que $\mathcal{T}^*$ es una "w-topología"; que $(E, \mathcal{T}^*)$ es un "espacio w-topológico" y que $K \in \mathcal{T}^*$ es w-abierto.

Def. w-interior$(A) = \begin{cases} W & \text{si } \{K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^W A\} = \emptyset \\ \sqcup^W (K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^W A) & \text{en otro caso.} \end{cases} \;\; \forall A \in \mathcal{P}(E)$

y w-cl$(A) = ($w-interior$(A^c))^c \;\; \forall A \in \mathcal{P}(E)$

T es w-cerrado $\Leftrightarrow$ $K = T^c$ es w-abierto.

$W \in \mathcal{P}(E)$, Espacio w-topológico $(E, \mathcal{T}_W) = (E, \varphi_W(\mathcal{T}))$:

$\varphi_W(A) = A \Delta W = (A^c \cap W) \cup (A \cap W^c)$

$$\varphi_W(\mathcal{T}) = \{\varphi_W(S) \,/\, S \in \mathcal{T}\} \subseteq \mathcal{P}(E),$$

$$W = \varphi_W(\emptyset),\; W^c = \varphi_W(E),\; \emptyset = \varphi_W(W),\; E = \varphi_W(W^c),$$

$$\{W, W^c\} \subseteq \varphi_W(\mathcal{T})$$

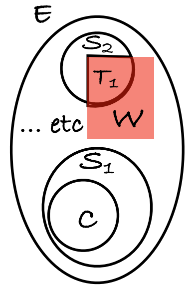
$\{W^c, W\}$ es un subconjunto de w-abiertos y w-cerrados

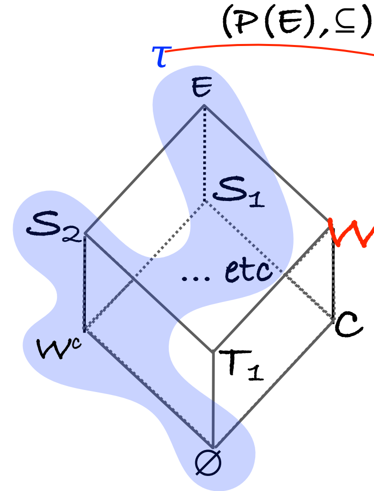
$$S_j \in \varphi_W(\mathcal{T}) \;\; \forall j \in J \Rightarrow (\bigsqcup^W_{j \in J} S_j) \in \mathcal{T}$$

$$(S_1 \in \mathcal{T}) \& (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \sqcap^W S_2) \in \mathcal{T}$$

Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:

$E\neq\varnothing$, $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{P}(E)$, $\{\varnothing,E\}\subseteq\mathcal{T}$,
($\mathcal{T}$ conjunto de abiertos).





$$S_j\in\mathcal{T}\ \ \forall j\in J \Rightarrow (\bigcup_{j\in J} S_j)\in\mathcal{T}$$

$$(S_1\in\mathcal{T})\,\&\,(S_2\in\mathcal{T}) \Rightarrow (S_1\cap S_2)\in\mathcal{T}$$

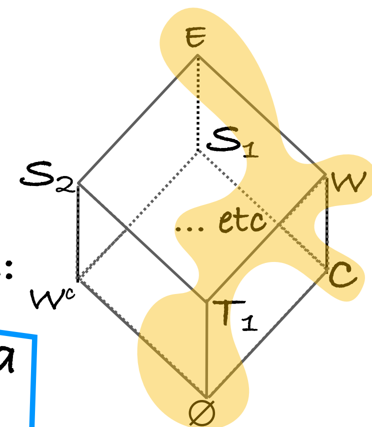
$x\in E$ es interior a $A\in\mathcal{P}(E) \Leftrightarrow (\exists S\in\mathcal{T}: x\in S\subseteq A)$

$\mathrm{int}(A)=\{x \,/\, x$ es interior a $A\}$

Si $W=\varnothing$, el marco $\mathcal{T}_\varnothing$ es una topología en E por abiertos: ($\sqcup^\varnothing=\bigcup$, $\sqcap^\varnothing=\bigcap$).

Marco

Cerrados:



Si $W=E$, el marco $\mathcal{T}_E$ es una topología en E por cerrados: ($\sqcup^E=\bigcap$, $\sqcap^E=\bigcup$).

Sea $E\neq\varnothing$ y $W\in\mathcal{P}(E)$. En $(\mathcal{P}(E),\sqsubseteq^W)$ consideremos $\mathcal{T}^*\subseteq\mathcal{P}(E)$ tal que: (1) $\{W, W^c\}\subseteq\mathcal{T}^*$, (2) $(K_j\in\mathcal{T}^*\ \ \forall j\in J) \Rightarrow (\sqcup^W_{j\in J} K_j)\in\mathcal{T}^*$, (3) $(K_1\in\mathcal{T}^*)\,\&\,(K_2\in\mathcal{T}^*) \Rightarrow (K_1\sqcap^W K_2)\in\mathcal{T}^*$ y $\varnothing$ (4) $K\sqcap^W(\sqcup^W_{j\in J} K_j)=\sqcup^W_{j\in J}(K\sqcap^W K_j)$ $\forall K, K_j\in\mathcal{T}^*$, es decir, $\mathcal{T}^*$ es un marco (frame). (1)

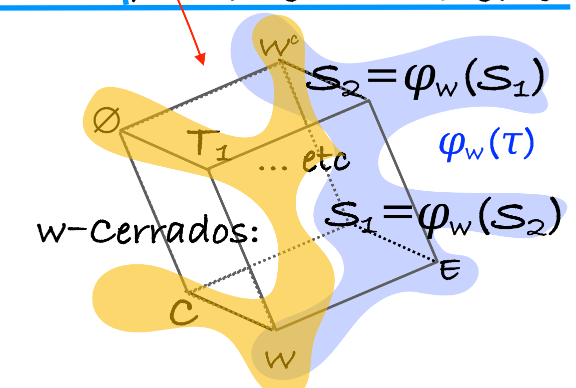
En general: W-TOPOLOGÍA

Diremos que $\mathcal{T}^*$ es una "w-topología"; que $(E,\mathcal{T}^*)$ es un "espacio w-topológico" y que $K\in\mathcal{T}^*$ es w-abierto.

Def. w-interior$(A)=\begin{cases} W & \text{si } \{K\in\mathcal{T}^*/\ K\sqsubseteq^W A)=\varnothing \\ \sqcup^W(K\in\mathcal{T}^*/\ K\sqsubseteq^W A) & \text{en otro caso.} \end{cases}$ $\forall A\in\mathcal{P}(E)$

y w-cl$(A)=($w-interior$(A^c))^c$ $\forall A\in\mathcal{P}(E)$

T es w-cerrado $\Leftrightarrow$ $K=T^c$ es w-abierto.



$W\in\mathcal{P}(E)$, Espacio w-topológico $(E, \mathcal{T}_W)=(E, \varphi_W(\mathcal{T}))$:

$$\varphi_W(A)=A\Delta W=(A^c\cap W)\cup(A\cap W^c)$$

$$\varphi_W(\mathcal{T})=\{\varphi_W(S) \,/\, S\in\mathcal{T}\}\subseteq\mathcal{P}(E),$$

$$W=\varphi_W(\varnothing),\ W^c=\varphi_W(E),\ \varnothing=\varphi_W(W),\ E=\varphi_W(W^c),$$

$$\{W, W^c\}\subseteq\varphi_W(\mathcal{T})$$

$\{W^c, W\}$ es un subconjunto de w-abiertos y w-cerrados

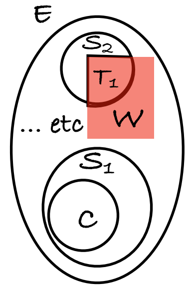
$$S_j\in\varphi_W(\mathcal{T})\ \ \forall j\in J \Rightarrow (\sqcup^W_{j\in J} S_j)\in\mathcal{T}$$

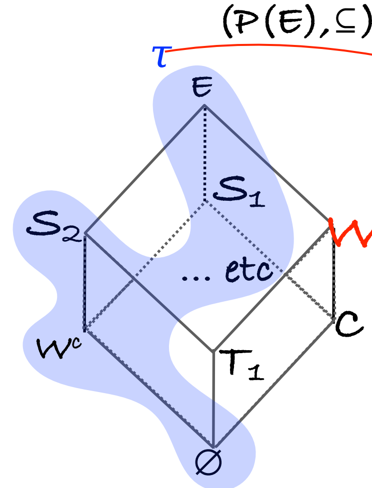
$$(S_1\in\mathcal{T})\,\&\,(S_2\in\mathcal{T}) \Rightarrow (S_1\sqcap^W S_2)\in\mathcal{T}$$

Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:

$E\neq\varnothing$, $\mathcal{T}\subsetneq\mathcal{P}(E)$, $\{\varnothing,E\}\subseteq\mathcal{T}$,

($\mathcal{T}$ conjunto de abiertos).





$$S_j\in\mathcal{T}\ \ \forall j\in J \Rightarrow \Big(\bigcup_{j\in J}S_j\Big)\in\mathcal{T}$$

$$(S_1\in\mathcal{T})\,\&\,(S_2\in\mathcal{T}) \Rightarrow (S_1\cap S_2)\in\mathcal{T}$$

$x\in E$ es interior a $A\in\mathcal{P}(E) \Leftrightarrow (\exists S\in\mathcal{T}: x\in S\subseteq A)$

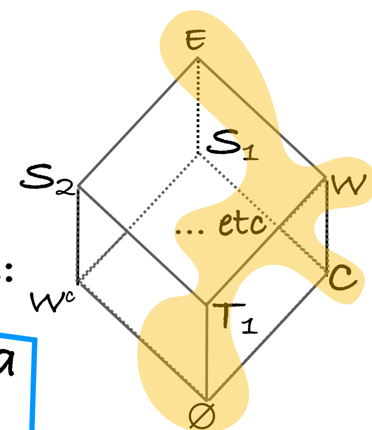
$\mathrm{int}(A)=\{x\ /\ x$ es interior a $A\}$

Si $W=\varnothing$, el marco $\mathcal{T}_\varnothing$ es una topología en E por abiertos: $(\sqcup^\varnothing=\bigcup,\ \sqcap^\varnothing=\bigcap)$.

Marco

Si $W=E$, el marco $\mathcal{T}_E$ es una topología en E por cerrados: $(\sqcup^E=\bigcap,\ \sqcap^E=\bigcup)$.

Cerrados:



$W\in\mathcal{P}(E)$, Espacio w-topológico $(E,\mathcal{T}_W)=(E,\varphi_W(\mathcal{T}))$:

$$\varphi_W(A)=A\Delta W=(A^c\cap W)\cup(A\cap W^c)$$

$$\varphi_W(\mathcal{T})=\{\varphi_W(S)\ /\ S\in\mathcal{T}\}\subseteq\mathcal{P}(E),$$

$$W=\varphi_W(\varnothing),\ W^c=\varphi_W(E),\ \varnothing=\varphi_W(W),\ E=\varphi_W(W^c),$$

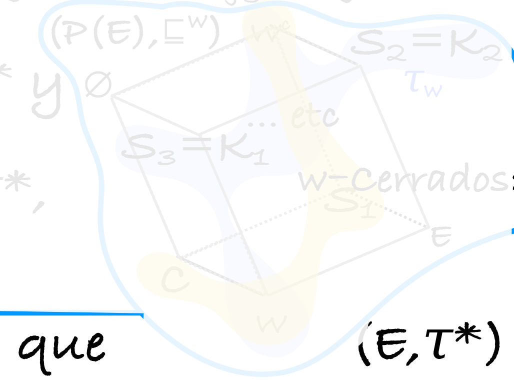
$$\{W, W^c\}\subseteq\varphi_W(\mathcal{T})$$

$\{W^c, W\}$ es un subconjunto de w-abiertos y w-cerrados

$$S_j\in\varphi_W(\mathcal{T})\ \ \forall j\in J \Rightarrow \Big(\bigsqcup^W_{j\in J}S_j\Big)\in\mathcal{T}$$

$$(S_1\in\mathcal{T})\,\&\,(S_2\in\mathcal{T}) \Rightarrow (S_1\sqcap^W S_2)\in\mathcal{T}$$

Sea $E\neq\varnothing$ y $W\in\mathcal{P}(E)$. En $(\mathcal{P}(E),\sqsubseteq^W)$ consideremos $\mathcal{T}^*\subseteq\mathcal{P}(E)$ tal que: (1) $\{W, W^c\}\subseteq\mathcal{T}^*$, (2) $(K_j\in\mathcal{T}^*\ \ \forall j\in J)\Rightarrow(\bigsqcup^W_{j\in J}K_j)\in\mathcal{T}^*$, (3) $(K_1\in\mathcal{T}^*)\,\&\,(K_2\in\mathcal{T}^*)\Rightarrow(K_1\sqcap^W K_2)\in\mathcal{T}^*$ y (4) $K\sqcap^W(\bigsqcup^W_{j\in J}K_j)=\bigsqcup^W_{j\in J}(K\sqcap^W K_j)\ \forall K,K_j\in\mathcal{T}^*$, es decir, $\mathcal{T}^*$ es un marco (frame). (1)



En general: W-TOPOLOGÍA

Diremos que $\mathcal{T}^*$ es una "w-topología"; que $(E,\mathcal{T}^*)$ es un "espacio w-topológico" y que $K\in\mathcal{T}^*$ es w-abierto.

Def. $\text{w-interior}(A)=\begin{cases} W & \text{si } \{K\in\mathcal{T}^*/\ K\sqsubseteq^W A\}=\varnothing \\ \bigsqcup^W(K\in\mathcal{T}^*/\ K\sqsubseteq^W A) & \text{en otro caso.}\end{cases}\ \forall A\in\mathcal{P}(E)$

y $\text{w-cl}(A)=(\text{w-interior}(A^c))^c\ \forall A\in\mathcal{P}(E)$

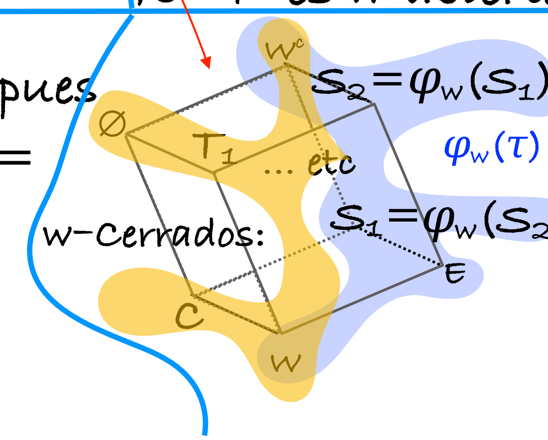
T es w-cerrado $\Leftrightarrow K=T^c$ es w-abierto.

Proposición. Se verifica:

(1) $\text{w-int}(A)=\widehat{\mathrm{int}}_W(A)\ \forall A\in\mathcal{P}(E)$, pues

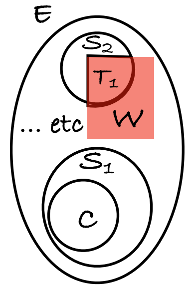
$$\bigsqcup^W(\varphi_W(S)/\ (S\in\mathcal{T})\,\&\,(\varphi_W(S)\sqsubseteq^W A))=$$

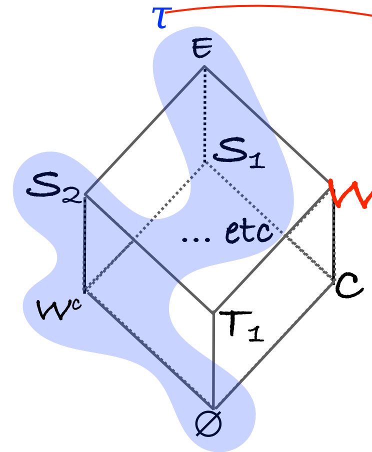
$$\varphi_W[\textstyle\bigcup S/\ (S\in\mathcal{T})\,\&\,(S\subseteq\varphi_W(A))]=\varphi_W(\mathrm{int}(\varphi_W(A)))\ \ \forall A\in\mathcal{P}(E).$$



Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:

$E \neq \varnothing$, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(E)$, $\{\varnothing, E\} \subseteq \mathcal{T}$, ($\mathcal{T}$ conjunto de abiertos).





$S_j \in \mathcal{T}\ \ \forall j \in J \Rightarrow (\bigcup_{j\in J} S_j) \in \mathcal{T}$

$(S_1 \in \mathcal{T}) \& (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \cap S_2) \in \mathcal{T}$

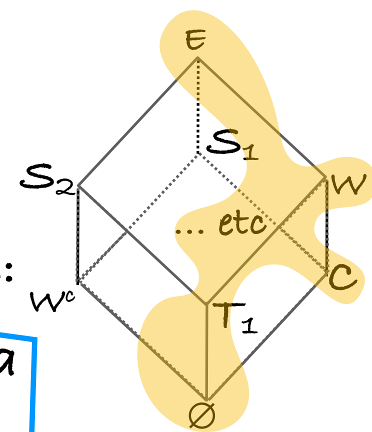
$x \in E$ es interior a $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow (\exists S \in \mathcal{T}: x \in S \subseteq A)$

$\mathrm{int}(A) = \{x \,/\, x$ es interior a $A\}$

Si $W = \varnothing$, el marco $\mathcal{T}_\varnothing$ es una topología en E por abiertos: $(\sqcup^\varnothing = \bigcup, \sqcap^\varnothing = \bigcap)$.

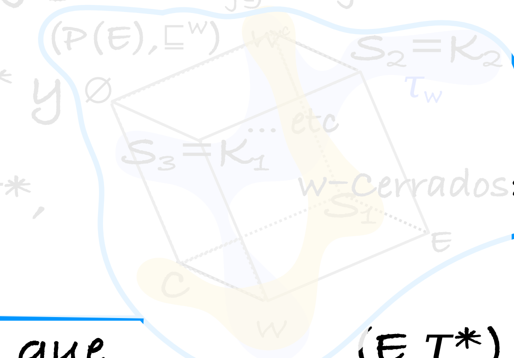
Marco

Cerrados:



Si $W = E$, el marco $\mathcal{T}_E$ es una topología en E por cerrados: $(\sqcup^E = \bigcap, \sqcap^E = \bigcup)$.

Sea $E \neq \varnothing$ y $W \in \mathcal{P}(E)$. En $(\mathcal{P}(E), \sqsubseteq^W)$ consideremos $\mathcal{T}^* \subseteq \mathcal{P}(E)$ tal que: (1) $\{W, W^c\} \subseteq \mathcal{T}^*$, (2) $(K_j \in \mathcal{T}^*\ \ \forall j \in J) \Rightarrow (\bigsqcup^W_{j\in J} K_j) \in \mathcal{T}^*$, (3) $(K_1 \in \mathcal{T}^*) \& (K_2 \in \mathcal{T}^*) \Rightarrow (K_1 \sqcap^W K_2) \in \mathcal{T}^*$ y $\varnothing$ (4) $K \sqcap^W (\bigsqcup^W_{j\in J} K_j) = \bigsqcup^W_{j\in J} (K \sqcap^W K_j)\ \forall K, K_j \in \mathcal{T}^*$, es decir, $\mathcal{T}^*$ es un marco (frame).(1)



En general: W-TOPOLOGÍA

Diremos que $\mathcal{T}^*$ es una "w-topología"; que $(E, \mathcal{T}^*)$ es un "espacio w-topológico" y que $K \in \mathcal{T}^*$ es w-abierto.

Def. w-interior$(A) = \begin{cases} W & \text{si } \{K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^W A\} = \varnothing \\ \sqcup^W (K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^W A) & \text{en otro caso.} \end{cases}$ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$

y w-cl$(A) = (\text{w-interior}(A^c))^c\ \forall A \in \mathcal{P}(E)$

T es w-cerrado $\Leftrightarrow K = T^c$ es w-abierto.

Proposición. Se verifica:

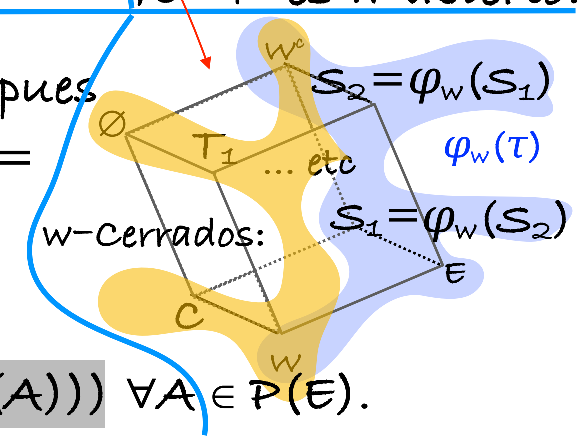
(1) w-int$(A) = \widehat{\mathrm{int}}_W(A)\ \forall A \in \mathcal{P}(E)$, pues

$\sqcup^W(\varphi_W(S) / (S \in \mathcal{T}) \& (\varphi_W(S) \sqsubseteq^W A)) =$

$\varphi_W([\bigcup S / (S \in \mathcal{T}) \& (S \subseteq \varphi_W(A)]) =$

$\varphi_W(\mathrm{int}(\varphi_W(A)))\ \ \forall A \in \mathcal{P}(E)$.

(2) w-cl$(A) = \widehat{\mathrm{cl}}_W(A) = \varphi_W(\mathrm{cl}(\varphi_W(A)))\ \forall A \in \mathcal{P}(E)$.



$W \in \mathcal{P}(E)$, Espacio w-topológico $(E, \mathcal{T}_W) = (E, \varphi_W(\mathcal{T}))$:

$\varphi_W(A) = A \Delta W = (A^c \cap W) \cup (A \cap W^c)$

$\varphi_W(\mathcal{T}) = \{\varphi_W(S) \,/\, S \in \mathcal{T}\} \subseteq \mathcal{P}(E)$,

$W = \varphi_W(\varnothing)$, $W^c = \varphi_W(E)$, $\varnothing = \varphi_W(W)$, $E = \varphi_W(W^c)$,

$\{W, W^c\} \subseteq \varphi_W(\mathcal{T})$

$\{W^c, W\}$ es un subconjunto de w-abiertos y w-cerrados

$S_j \in \varphi_W(\mathcal{T})\ \ \forall j \in J \Rightarrow (\bigsqcup^W_{j\in J} S_j) \in \mathcal{T}$

$(S_1 \in \mathcal{T}) \& (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \sqcap^W S_2) \in \mathcal{T}$

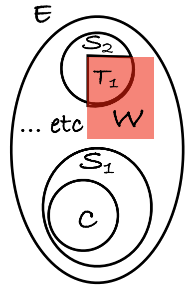
Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:

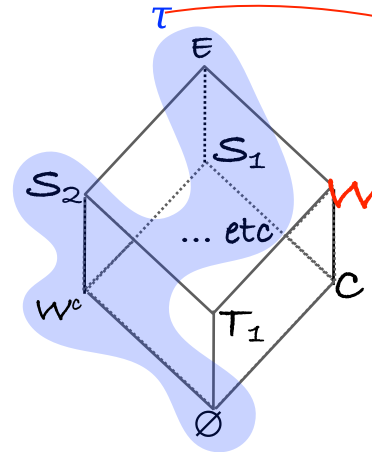
$E\neq\varnothing$, $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{P}(E)$, $\{\varnothing,E\}\subseteq\mathcal{T}$,

($\mathcal{T}$ conjunto de abiertos).

$S_j\in\mathcal{T}\ \ \forall j\in J \Rightarrow (\bigcup_{j\in J} S_j)\in\mathcal{T}$

$(S_1\in\mathcal{T})\&(S_2\in\mathcal{T}) \Rightarrow (S_1\cap S_2)\in\mathcal{T}$





$x\in E$ es interior a $A\in\mathcal{P}(E) \Leftrightarrow (\exists S\in\mathcal{T}: x\in S\subseteq A)$

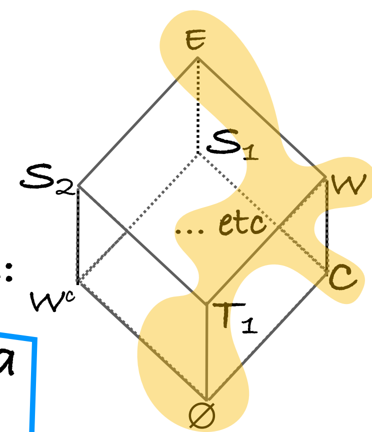
$int(A)=\{x\ /\ x$ es interior a $A\}$

Si $W=\varnothing$, el marco $\mathcal{T}_\varnothing$ es una topología en E por abiertos: $(\sqcup^\varnothing=\bigcup,\ \sqcap^\varnothing=\bigcap)$.

Si $W=E$, el marco $\mathcal{T}_E$ es una topología en E por cerrados: $(\sqcup^E=\bigcap,\ \sqcap^E=\bigcup)$.

Marco

Cerrados:



¿La w-topología $(E, \varphi_W(\mathcal{T}))$ como una "perspectiva" de la topología $(E, \mathcal{T})$ proporcionada por $W\in\mathcal{P}(E)$?

En general: W-TOPOLOGÍA

Diremos que $\mathcal{T}^*$ es una "<u>w-topología</u>"; que $(E,\mathcal{T}^*)$ es un "<u>espacio w-topológico</u>" y que $K\in\mathcal{T}^*$ es <u>w-abierto.</u>

<u>Def.</u> $\underline{\text{w-interior}}(A)=\begin{cases} W & \text{si } \{K\in\mathcal{T}^*/\ K\sqsubseteq^W A\}=\varnothing \\ \sqcup^W(K\in\mathcal{T}^*/\ K\sqsubseteq^W A) & \text{en otro caso.}\end{cases}$ $\forall A\in\mathcal{P}(E)$

y $\underline{\text{w-cl}(A)}=(\text{w-interior}(A^c))^c\ \forall A\in\mathcal{P}(E)$

T es <u>w-cerrado</u> $\Leftrightarrow$ $K=T^c$ es w-abierto.

<u>Proposición</u>. Se verifica:

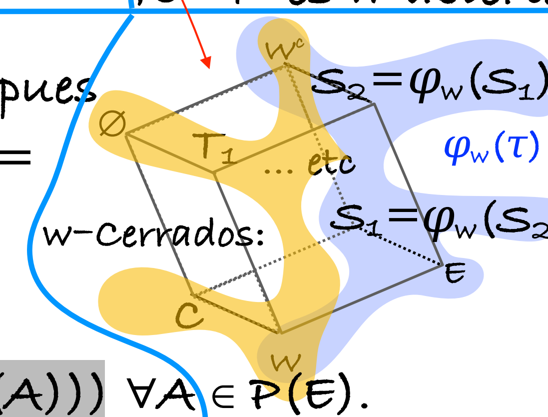
(1) $\text{w-int}(A)=\widehat{int}_W(A)\ \forall A\in\mathcal{P}(E)$, pues

$\sqcup^W(\varphi_W(S)/\ (S\in\mathcal{T})\ \&(\varphi_W(S)\sqsubseteq^W A))=$

$\varphi_W([\bigcup S/\ (S\in\mathcal{T})\ \&(S\subseteq\varphi_W(A)])=$

$\varphi_W(int(\varphi_W(A)))\ \ \forall A\in\mathcal{P}(E)$.

(2) $\text{w-cl}(A)=\widehat{cl}_W(A)=\varphi_W(cl(\varphi_W(A)))\ \forall A\in\mathcal{P}(E)$.



$W\in\mathcal{P}(E)$, Espacio w-topológico $(E, \mathcal{T}_W)=(E, \varphi_W(\mathcal{T}))$:

$\varphi_W(A)=A\Delta W=(A^c\cap W)\cup(A\cap W^c)$

$$\varphi_W(\mathcal{T})=\{\varphi_W(S)\ /\ S\in\mathcal{T}\}\subseteq\mathcal{P}(E),$$

$$W=\varphi_W(\varnothing),\ W^c=\varphi_W(E),\ \varnothing=\varphi_W(W),\ E=\varphi_W(W^c),$$

$$\{W, W^c\}\subseteq\varphi_W(\mathcal{T})$$

$\{W^c, W\}$ es un subconjunto de w-abiertos y w-cerrados

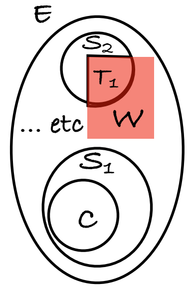
$$S_j\in\varphi_W(\mathcal{T})\ \ \forall j\in J \Rightarrow (\sqcup^W_{j\in J} S_j)\in\mathcal{T}$$

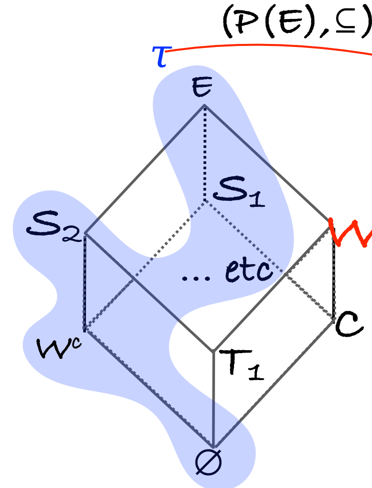
$$(S_1\in\mathcal{T})\&(S_2\in\mathcal{T}) \Rightarrow (S_1\sqcap^W S_2)\in\mathcal{T}$$

Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:

$E \neq \varnothing$, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(E)$, $\{\varnothing, E\} \subseteq \mathcal{T}$,

($\mathcal{T}$ conjunto de abiertos).





$$S_j \in \mathcal{T} \quad \forall j \in J \Rightarrow (\bigcup_{j \in J} S_j) \in \mathcal{T}$$

$$(S_1 \in \mathcal{T}) \,\&\, (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \cap S_2) \in \mathcal{T}$$

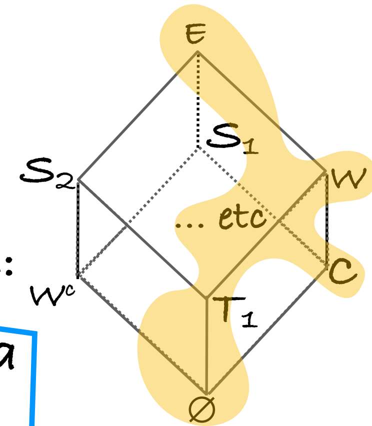
$x \in E$ es interior a $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow (\exists S \in \mathcal{T}: x \in S \subseteq A)$

$\mathrm{int}(A) = \{x \,/\, x$ es interior a $A\}$

Si $W = \varnothing$, el marco $\mathcal{T}_\varnothing$ es una topología en E por abiertos: $(\sqcup^\varnothing = \bigcup, \sqcap^\varnothing = \bigcap)$.

Marco

Cerrados:



Si $W = E$, el marco $\mathcal{T}_E$ es una topología en E por cerrados: $(\sqcup^E = \bigcap, \sqcap^E = \bigcup)$.

$W \in \mathcal{P}(E)$, Espacio w-topológico $(E, \mathcal{T}_W) = (E, \varphi_W(\mathcal{T}))$:

$$\varphi_W(A) = A \Delta W = (A^c \cap W) \cup (A \cap W^c)$$

$$\varphi_W(\mathcal{T}) = \{\varphi_W(S) \,/\, S \in \mathcal{T}\} \subseteq \mathcal{P}(E),$$

$$W = \varphi_W(\varnothing),\ W^c = \varphi_W(E),\ \varnothing = \varphi_W(W),\ E = \varphi_W(W^c),$$

$$\{W, W^c\} \subseteq \varphi_W(\mathcal{T})$$

$\{W^c, W\}$ es un subconjunto de w-abiertos y w-cerrados

$$S_j \in \varphi_W(\mathcal{T}) \quad \forall j \in J \Rightarrow (\bigsqcup^W_{j \in J} S_j) \in \mathcal{T}$$

$$(S_1 \in \mathcal{T}) \,\&\, (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \sqcap^W S_2) \in \mathcal{T}$$

¿La w-topología $(E, \varphi_W(\mathcal{T}))$ como una "perspectiva" de la topología $(E, \mathcal{T})$ proporcionada por $W \in \mathcal{P}(E)$?

En general: W-TOPOLOGÍA

Diremos que $\mathcal{T}^*$ es una "w-topología"; que $(E, \mathcal{T}^*)$ es un "espacio w-topológico" y que $K \in \mathcal{T}^*$ es w-abierto.

Def. w-interior$(A) = \begin{cases} W & \text{si } \{K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^W A\} = \varnothing \\ \sqcup^W (K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^W A) & \text{en otro caso.} \end{cases}$ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$

y w-cl$(A) = (\text{w-interior}(A^c))^c$ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$

T es w-cerrado $\Leftrightarrow$ $K = T^c$ es w-abierto.

Proposición. Se verifica:

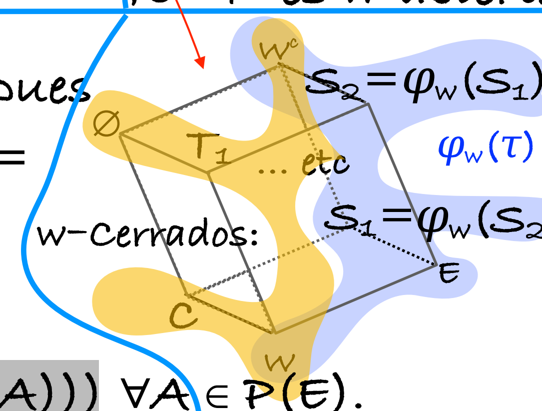
(1) $\text{w-int}(A) = \widehat{\mathrm{int}}_W(A)$ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, pues

$\sqcup^W(\varphi_W(S) / (S \in \mathcal{T}) \,\&\, (\varphi_W(S) \sqsubseteq^W A)) =$

$\varphi_W([\bigcup S / (S \in \mathcal{T}) \,\&\, (S \subseteq \varphi_W(A)]) =$

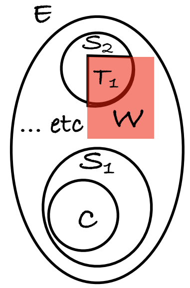
$\varphi_W(\mathrm{int}(\varphi_W(A)))$ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$.

(2) $\text{w-cl}(A) = \widehat{\mathrm{cl}}_W(A) = \varphi_W(\mathrm{cl}(\varphi_W(A)))$ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$.

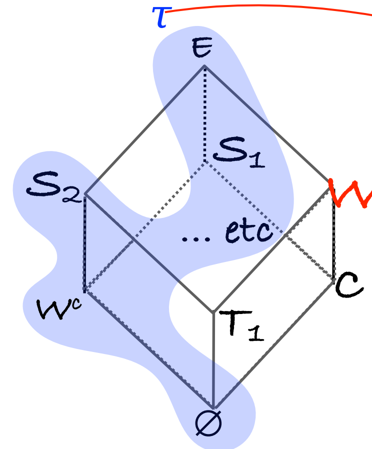


Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:

$E \neq \emptyset$, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(E)$, $\{\emptyset, E\} \subseteq \mathcal{T}$, ($\mathcal{T}$ conjunto de abiertos).



$(\mathcal{P}(E), \subseteq)$



$$S_j \in \mathcal{T} \ \ \forall j \in J \Rightarrow \left(\bigcup_{j \in J} S_j\right) \in \mathcal{T}$$

$$(S_1 \in \mathcal{T}) \,\&\, (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \cap S_2) \in \mathcal{T}$$

$x \in E$ es interior a $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow (\exists S \in \mathcal{T}: x \in S \subseteq A)$

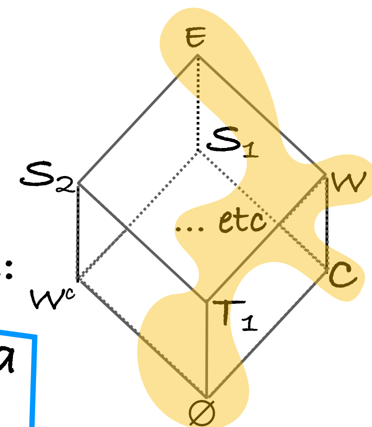
$\mathrm{int}(A) = \{x \,/\, x \text{ es interior a } A\}$

Si $W = \emptyset$, el marco $\mathcal{T}_\emptyset$ es una topología en E por abiertos: $(\sqcup^\emptyset = \bigcup,\ \sqcap^\emptyset = \bigcap)$.

Marco

Si $W = E$, el marco $\mathcal{T}_E$ es una topología en E por cerrados: $(\sqcup^E = \bigcap,\ \sqcap^E = \bigcup)$.

Cerrados:



En general: W-TOPOLOGÍA

¿La w-topología $(E, \varphi_W(\mathcal{T}))$ como una "perspectiva" de la topología $(E, \mathcal{T})$ proporcionada por $W \in \mathcal{P}(E)$?

Diremos que $\mathcal{T}^*$ es una "w-topología"; que $(E, \mathcal{T}^*)$ es un "espacio w-topológico" y que $K \in \mathcal{T}^*$ es w-abierto.

Def. $\text{w-interior}(A) = \begin{cases} W & \text{si } \{K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^W A\} = \emptyset \\ \sqcup^W (K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^W A) & \text{en otro caso.} \end{cases}$ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$

y $\text{w-cl}(A) = (\text{w-interior}(A^c))^c \ \forall A \in \mathcal{P}(E)$

T es w-cerrado $\Leftrightarrow K = T^c$ es w-abierto.

Proposición. Se verifica:

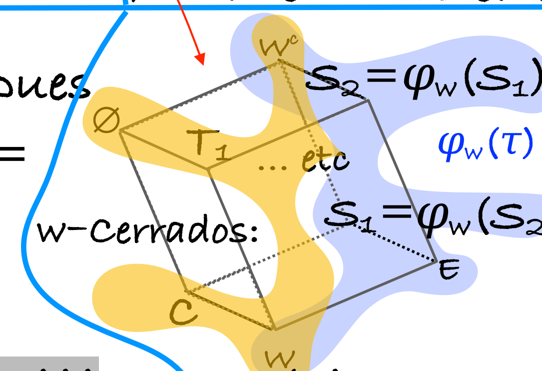
(1) $\text{w-int}(A) = \widehat{\mathrm{int}}_W(A) \ \forall A \in \mathcal{P}(E)$, pues

$\sqcup^W(\varphi_W(S) / (S \in \mathcal{T}) \,\&\, (\varphi_W(S) \sqsubseteq^W A)) =$

$\varphi_W([\bigcup S / (S \in \mathcal{T}) \,\&\, (S \subseteq \varphi_W(A)]) =$

$\varphi_W(\mathrm{int}(\varphi_W(A))) \ \ \forall A \in \mathcal{P}(E)$.

(2) $\text{w-cl}(A) = \widehat{\mathrm{cl}}_W(A) = \varphi_W(\mathrm{cl}(\varphi_W(A))) \ \forall A \in \mathcal{P}(E)$.



$W \in \mathcal{P}(E)$, Espacio w-topológico $(E, \mathcal{T}_W) = (E, \varphi_W(\mathcal{T}))$:

$$\varphi_W(A) = A \Delta W = (A^c \cap W) \cup (A \cap W^c)$$

$$\varphi_W(\mathcal{T}) = \{\varphi_W(S) \,/\, S \in \mathcal{T}\} \subseteq \mathcal{P}(E),$$

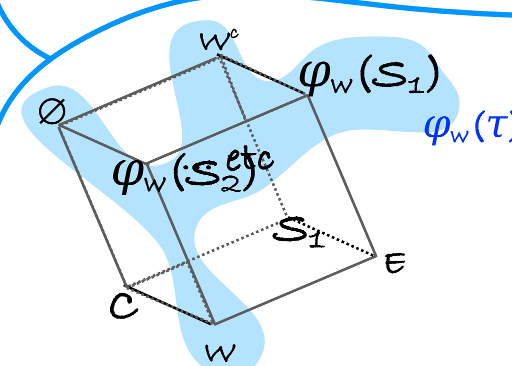
$$W = \varphi_W(\emptyset),\ W^c = \varphi_W(E),\ \emptyset = \varphi_W(W),\ E = \varphi_W(W^c),$$

$$\{W, W^c\} \subseteq \varphi_W(\mathcal{T})$$

$\{W^c, W\}$ es un subconjunto de w-abiertos y w-cerrados

$$S_j \in \varphi_W(\mathcal{T}) \ \ \forall j \in J \Rightarrow \left(\sqcup^W_{j \in J} S_j\right) \in \mathcal{T}$$

$$(S_1 \in \mathcal{T}) \,\&\, (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \sqcap^W S_2) \in \mathcal{T}$$



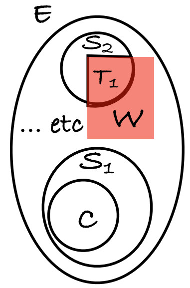
Si W es abierto en $\mathcal{T}$:

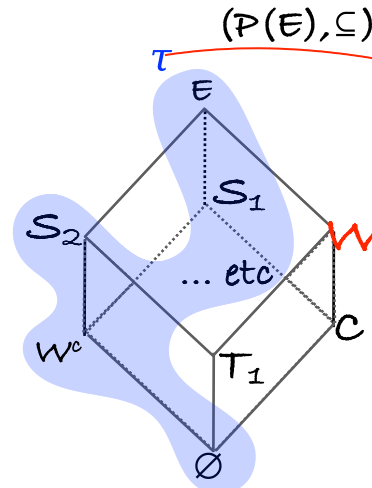
$W \in \mathcal{T} \Rightarrow \emptyset \in \varphi_W(\mathcal{T})$

(∅ es w-abierto y E w-cerrado)

Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:

$E \neq \emptyset$, $\mathcal{T} \subsetneq \mathcal{P}(E)$, $\{\emptyset, E\} \subseteq \mathcal{T}$, ($\mathcal{T}$ conjunto de abiertos).





$S_j \in \mathcal{T}\ \ \forall j \in J \Rightarrow (\bigcup_{j \in J} S_j) \in \mathcal{T}$

$(S_1 \in \mathcal{T}) \& (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \cap S_2) \in \mathcal{T}$

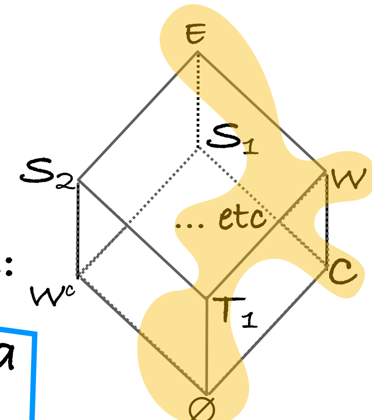
$x \in E$ es interior a $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow (\exists S \in \mathcal{T}: x \in S \subseteq A)$

$int(A) = \{x \,/\, x$ es interior a $A\}$

Si $W = \emptyset$, el marco $\mathcal{T}_\emptyset$ es una topología en E por abiertos: $(\sqcup^\emptyset = \bigcup,\ \sqcap^\emptyset = \bigcap)$.

Marco

Cerrados:



Si $W = E$, el marco $\mathcal{T}_E$ es una topología en E por cerrados: $(\sqcup^E = \bigcap,\ \sqcap^E = \bigcup)$.

En general: W-TOPOLOGÍA

¿La w-topología $(E, \varphi_W(\mathcal{T}))$ como una "perspectiva" de la topología $(E, \mathcal{T})$ proporcionada por $W \in \mathcal{P}(E)$?

Diremos que $\mathcal{T}^*$ es una "w-topología"; que $(E, \mathcal{T}^*)$ es un "espacio w-topológico" y que $K \in \mathcal{T}^*$ es w-abierto.

Def. $\text{w-interior}(A) = \begin{cases} W & \text{si } \{K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^W A\} = \emptyset \\ \sqcup^W (K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^W A) & \text{en otro caso.} \end{cases}\ \forall A \in \mathcal{P}(E)$

y $\text{w-cl}(A) = (\text{w-interior}(A^c))^c\ \forall A \in \mathcal{P}(E)$

T es w-cerrado $\Leftrightarrow$ $K = T^c$ es w-abierto.

Proposición. Se verifica:

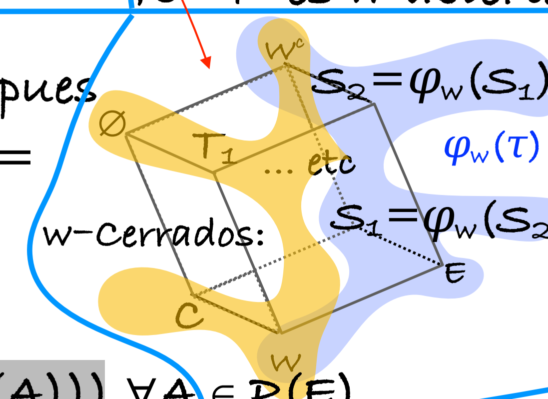
(1) $\text{w-int}(A) = \widehat{int}_W(A)\ \forall A \in \mathcal{P}(E)$, pues

$\sqcup^W(\varphi_W(S) / (S \in \mathcal{T}) \& (\varphi_W(S) \sqsubseteq^W A)) =$

$\varphi_W([\bigcup S / (S \in \mathcal{T}) \& (S \subseteq \varphi_W(A)]) =$

$\varphi_W(int(\varphi_W(A)))\ \ \forall A \in \mathcal{P}(E)$.

(2) $\text{w-cl}(A) = \widehat{cl}_W(A) = \varphi_W(cl(\varphi_W(A)))\ \forall A \in \mathcal{P}(E)$.



$W \in \mathcal{P}(E)$, Espacio w-topológico $(E, \mathcal{T}_W) = (E, \varphi_W(\mathcal{T}))$:

$\varphi_W(A) = A \Delta W = (A^c \cap W) \cup (A \cap W^c)$

$\varphi_W(\mathcal{T}) = \{\varphi_W(S) \,/\, S \in \mathcal{T}\} \subseteq \mathcal{P}(E)$,

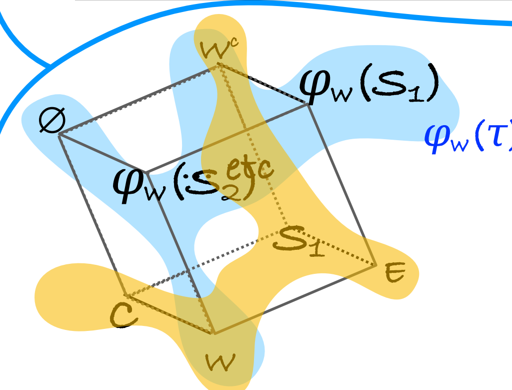
$W = \varphi_W(\emptyset)$, $W^c = \varphi_W(E)$, $\emptyset = \varphi_W(W)$, $E = \varphi_W(W^c)$,

$\{W, W^c\} \subseteq \varphi_W(\mathcal{T})$

$\{W^c, W\}$ es un subconjunto de w-abiertos y w-cerrados

$S_j \in \varphi_W(\mathcal{T})\ \ \forall j \in J \Rightarrow (\sqcup^W_{j \in J} S_j) \in \mathcal{T}$

$(S_1 \in \mathcal{T}) \& (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \sqcap^W S_2) \in \mathcal{T}$



Si W es abierto en $\mathcal{T}$:

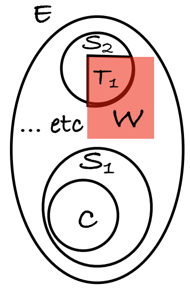
$W \in \mathcal{T} \Rightarrow \emptyset \in \varphi_W(\mathcal{T})$

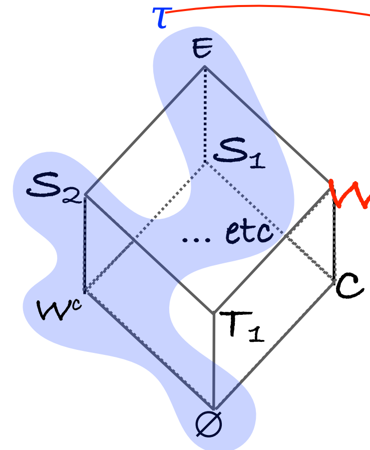
($\emptyset$ es w-abierto y E w-cerrado)

Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:

$E \neq \varnothing$, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(E)$, $\{\varnothing, E\} \subseteq \mathcal{T}$,

($\mathcal{T}$ conjunto de abiertos).





$S_j \in \mathcal{T} \ \ \forall j \in J \Rightarrow (\bigcup_{j \in J} S_j) \in \mathcal{T}$

$(S_1 \in \mathcal{T}) \& (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \cap S_2) \in \mathcal{T}$

$x \in E$ es interior a $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow (\exists S \in \mathcal{T}: x \in S \subseteq A)$

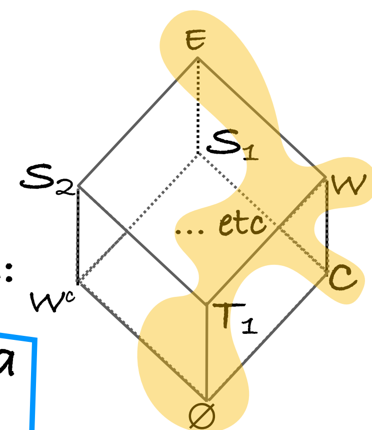
$\mathrm{int}(A) = \{x \ / \ x$ es interior a $A\}$

Si $W = \varnothing$, el marco $\mathcal{T}_\varnothing$ es una topología en E por abiertos: $(\sqcup^\varnothing = \bigcup, \ \sqcap^\varnothing = \bigcap)$.

Si $W = E$, el marco $\mathcal{T}_E$ es una topología en E por cerrados: $(\sqcup^E = \bigcap, \ \sqcap^E = \bigcup)$.

Marco

Cerrados:



¿La w-topología $(E, \varphi_W(\mathcal{T}))$ como una "perspectiva" de la topología $(E, \mathcal{T})$ proporcionada por $W \in \mathcal{P}(E)$?

En general: W-TOPOLOGÍA

Diremos que $\mathcal{T}^*$ es una "w-topología"; que $(E, \mathcal{T}^*)$ es un "espacio w-topológico" y que $K \in \mathcal{T}^*$ es w-abierto.

Def. $\text{w-interior}(A) = \begin{cases} W & \text{si } \{K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^W A\} = \varnothing \\ \sqcup^W (K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^W A) & \text{en otro caso.} \end{cases}$ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$

y $\text{w-cl}(A) = (\text{w-interior}(A^c))^c \ \forall A \in \mathcal{P}(E)$

T es w-cerrado $\Leftrightarrow$ $K = T^c$ es w-abierto.

Proposición. Se verifica:

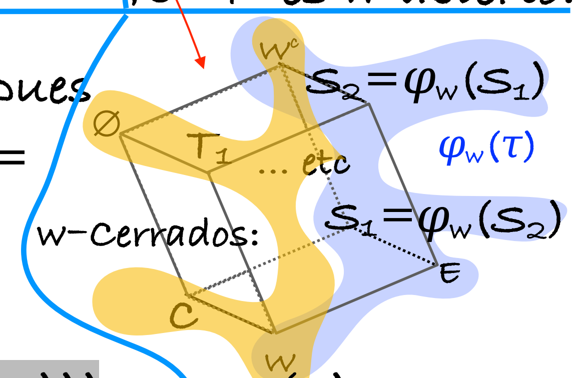
(1) $\text{w-int}(A) = \widehat{\mathrm{int}}_W(A) \ \forall A \in \mathcal{P}(E)$, pues

$\sqcup^W (\varphi_W(S) / (S \in \mathcal{T}) \& (\varphi_W(S) \sqsubseteq^W A)) =$

$\varphi_W([\bigcup S / (S \in \mathcal{T}) \& (S \subseteq \varphi_W(A)]) =$

$\varphi_W(\mathrm{int}(\varphi_W(A))) \ \ \forall A \in \mathcal{P}(E)$.

(2) $\text{w-cl}(A) = \widehat{\mathrm{cl}}_W(A) = \varphi_W(\mathrm{cl}(\varphi_W(A))) \ \forall A \in \mathcal{P}(E)$.



$W \in \mathcal{P}(E)$, Espacio w-topológico $(E, \mathcal{T}_W) = (E, \varphi_W(\mathcal{T}))$:

$\varphi_W(A) = A \Delta W = (A^c \cap W) \cup (A \cap W^c)$

$\varphi_W(\mathcal{T}) = \{\varphi_W(S) \ / \ S \in \mathcal{T}\} \subseteq \mathcal{P}(E)$,

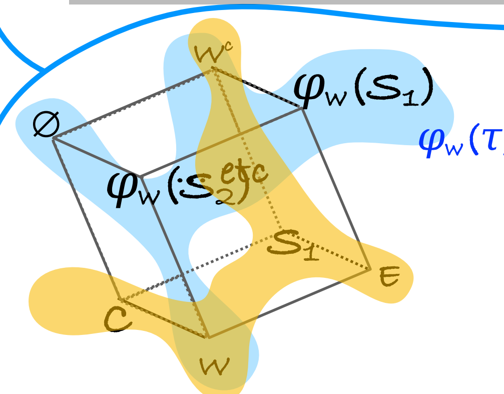
$W = \varphi_W(\varnothing)$, $W^c = \varphi_W(E)$, $\varnothing = \varphi_W(W)$, $E = \varphi_W(W^c)$,

$\{W, W^c\} \subseteq \varphi_W(\mathcal{T})$

$\{W^c, W\}$ es un subconjunto de w-abiertos y w-cerrados

$S_j \in \varphi_W(\mathcal{T}) \ \ \forall j \in J \Rightarrow (\sqcup^W_{j \in J} S_j) \in \mathcal{T}$

$(S_1 \in \mathcal{T}) \& (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \sqcap^W S_2) \in \mathcal{T}$



Si W es abierto en $\mathcal{T}$:

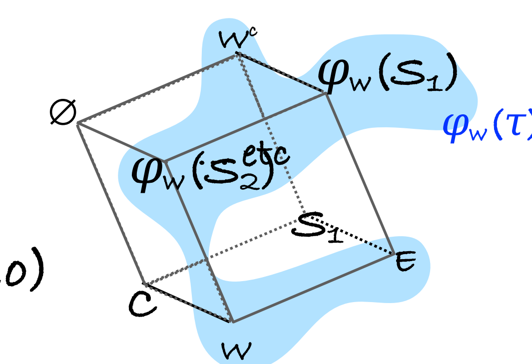
$W \in \mathcal{T} \Rightarrow \varnothing \in \varphi_W(\mathcal{T})$

($\varnothing$ es w-abierto y E w-cerrado)

Si W es cerrado en $\mathcal{T}$:

$W^c \in \mathcal{T} \Rightarrow E \in \varphi_W(\mathcal{T})$

(E es w-abierto y $\varnothing$ w-cerrado)

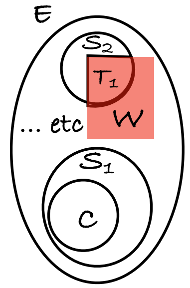


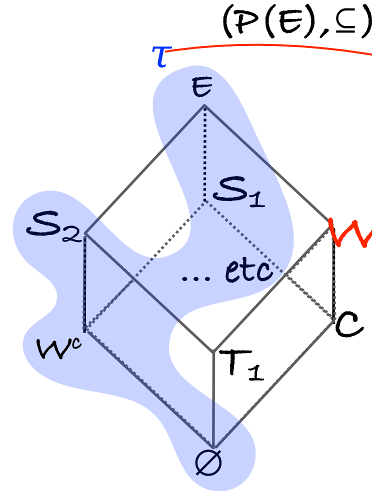
Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:

$E \neq \varnothing$, $\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(E)$, $\{\varnothing, E\} \subseteq \mathcal{T}$, ($\mathcal{T}$ conjunto de abiertos).

$S_j \in \mathcal{T} \;\; \forall j \in J \Rightarrow (\bigcup_{j \in J} S_j) \in \mathcal{T}$

$(S_1 \in \mathcal{T}) \& (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \cap S_2) \in \mathcal{T}$





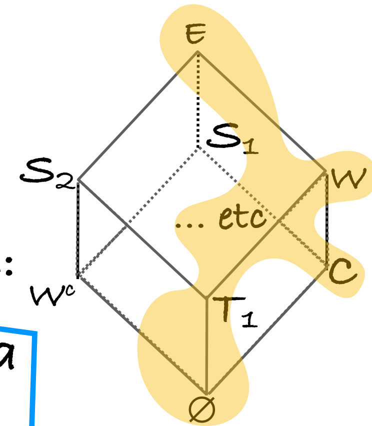
$x \in E$ es interior a $A \in \mathcal{P}(E) \Leftrightarrow (\exists S \in \mathcal{T}: x \in S \subseteq A)$

$int(A) = \{x \,/\, x$ es interior a $A\}$

Si $W = \varnothing$, el marco $\mathcal{T}_\varnothing$ es una topología en E por abiertos: $(\sqcup^\varnothing = \bigcup, \sqcap^\varnothing = \bigcap)$.

Marco

Cerrados:



Si $W = E$, el marco $\mathcal{T}_E$ es una topología en E por cerrados: $(\sqcup^E = \bigcap, \sqcap^E = \bigcup)$.

En general: W-TOPOLOGÍA

$W \in \mathcal{P}(E)$, Espacio w-topológico $(E, \mathcal{T}_W) = (E, \varphi_W(\mathcal{T}))$:

$\varphi_W(A) = A \Delta W = (A^c \cap W) \cup (A \cap W^c)$

$\varphi_W(\mathcal{T}) = \{\varphi_W(S) \,/\, S \in \mathcal{T}\} \subseteq \mathcal{P}(E)$,

$W = \varphi_W(\varnothing)$, $W^c = \varphi_W(E)$, $\varnothing = \varphi_W(W)$, $E = \varphi_W(W^c)$,

$\{W, W^c\} \subseteq \varphi_W(\mathcal{T})$

$\{W^c, W\}$ es un subconjunto de w-abiertos y w-cerrados

$S_j \in \varphi_W(\mathcal{T}) \;\; \forall j \in J \Rightarrow (\sqcup^W_{j \in J} S_j) \in \mathcal{T}$

$(S_1 \in \mathcal{T}) \& (S_2 \in \mathcal{T}) \Rightarrow (S_1 \sqcap^W S_2) \in \mathcal{T}$

¿La w-topología $(E, \varphi_W(\mathcal{T}))$ como una "perspectiva" de la topología $(E, \mathcal{T})$ proporcionada por $W \in \mathcal{P}(E)$?

Diremos que $\mathcal{T}^*$ es una "w-topología"; que $(E, \mathcal{T}^*)$ es un "espacio w-topológico" y que $K \in \mathcal{T}^*$ es w-abierto.

Def. w-interior$(A) = \begin{cases} W & \text{si } \{K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^W A\} = \varnothing \\ \sqcup^W (K \in \mathcal{T}^* / K \sqsubseteq^W A) & \text{en otro caso.} \end{cases}$ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$

y w-cl$(A) = (\text{w-interior}(A^c))^c \;\; \forall A \in \mathcal{P}(E)$

T es w-cerrado $\Leftrightarrow$ $K = T^c$ es w-abierto.

Proposición. Se verifica:

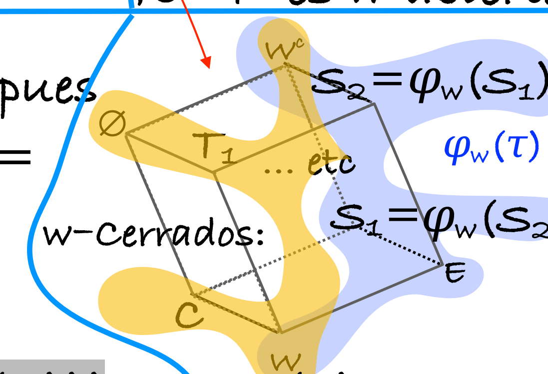
(1) $\boxed{\text{w-int}(A) = \widehat{int}_W(A)}$ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$, pues

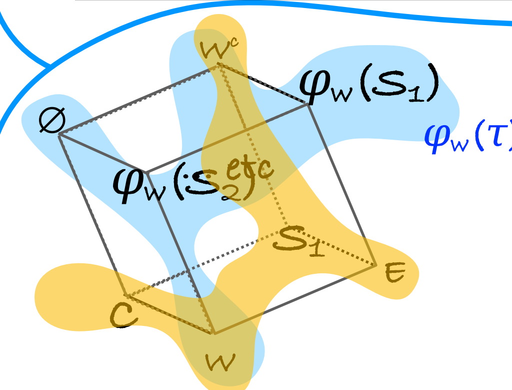
$\sqcup^W(\varphi_W(S) / (S \in \mathcal{T}) \& (\varphi_W(S) \sqsubseteq^W A)) =$

$\varphi_W([\bigcup S / (S \in \mathcal{T}) \& (S \subseteq \varphi_W(A)]) =$

$\varphi_W(int(\varphi_W(A))) \;\; \forall A \in \mathcal{P}(E)$.

(2) $\boxed{\text{w-cl}(A) = \widehat{cl}_W(A) = \varphi_W(cl(\varphi_W(A)))}$ $\forall A \in \mathcal{P}(E)$.





Si W es abierto en $\mathcal{T}$:

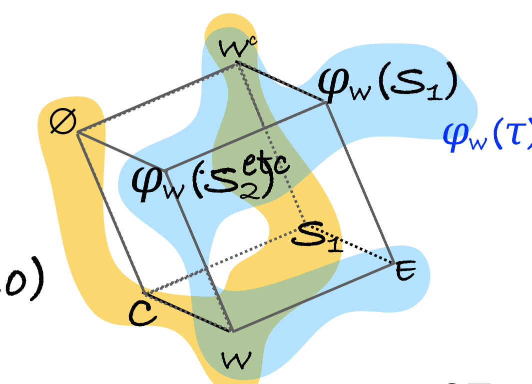
$W \in \mathcal{T} \Rightarrow \varnothing \in \varphi_W(\mathcal{T})$

($\varnothing$ es w-abierto y E w-cerrado)

Si W es cerrado en $\mathcal{T}$:

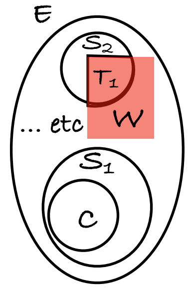
$W^c \in \mathcal{T} \Rightarrow E \in \varphi_W(\mathcal{T})$

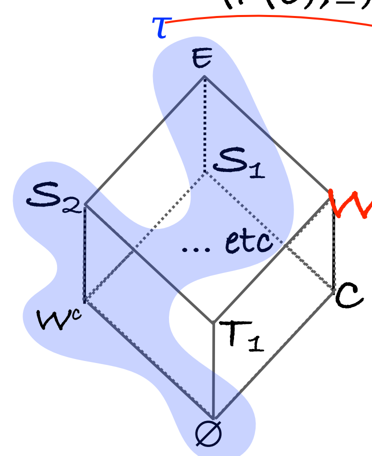
(E es w-abierto y $\varnothing$ w-cerrado)



Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:

$E\neq\varnothing$, $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{P}(E)$, $\{\varnothing, E\}\subseteq\mathcal{T}$, ($\mathcal{T}$ conjunto de abiertos).





$$S_j\in\mathcal{T}\ \ \forall j\in J \Rightarrow \Big(\bigcup_{j\in J} S_j\Big)\in\mathcal{T}$$

$$(S_1\in\mathcal{T})\,\&\,(S_2\in\mathcal{T}) \Rightarrow (S_1\cap S_2)\in\mathcal{T}$$

$x\in E$ es interior a $A\in\mathcal{P}(E) \Leftrightarrow (\exists S\in\mathcal{T}: x\in S\subseteq A)$

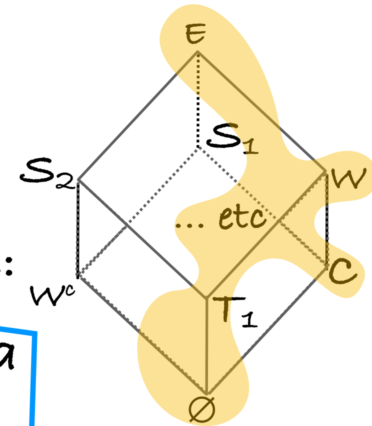
$\mathrm{int}(A)=\{x \,/\, x$ es interior a $A\}$

Si $W=\varnothing$, el marco $\mathcal{T}_\varnothing$ es una topología en E por abiertos: $(\sqcup^\varnothing=\bigcup,\ \sqcap^\varnothing=\bigcap)$.

Si $W=E$, el marco $\mathcal{T}_E$ es una topología en E por cerrados: $(\sqcup^E=\bigcap,\ \sqcap^E=\bigcup)$.

Marco

Cerrados:



¿La w-topología $(E, \varphi_W(\mathcal{T}))$ como una "perspectiva" de la topología $(E, \mathcal{T})$ proporcionada por $W\in\mathcal{P}(E)$?

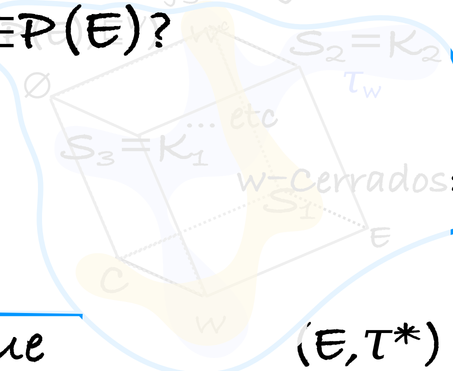
Sea $E\neq\varnothing$ y $W\in\mathcal{P}(E)$ ... tal que: (1) $\{W, W^c\}\subseteq\mathcal{T}^*$, ...

(3) $(K_1\in\mathcal{T}^*)\,\&\,(K_2\in\mathcal{T}^*) \Rightarrow (K_1\sqcap^W K_2)\in\mathcal{T}^*$ y ∅ ...

(4) $K\sqcap^W\big(\bigsqcup^W_{j\in J} K_j\big)=\bigsqcup^W_{j\in J}(K\sqcap^W K_j)\ \ \forall K, K_j\in\mathcal{T}^*$,

es decir, $\mathcal{T}^*$ es un marco (frame).(1)

En general: W-TOPOLOGÍA



Diremos que $\mathcal{T}^*$ es una "w-topología"; que $(E,\mathcal{T}^*)$ es un "espacio w-topológico" y que $K\in\mathcal{T}^*$ es w-abierto.

Def. w-interior$(A)=\begin{cases} W & \text{si } \{K\in\mathcal{T}^* / K\sqsubseteq^W A\}=\varnothing \\ \sqcup^W(K\in\mathcal{T}^* / K\sqsubseteq^W A) & \text{en otro caso.}\end{cases}$ $\forall A\in\mathcal{P}(E)$

y w-cl$(A)=(\text{w-interior}(A^c))^c\ \forall A\in\mathcal{P}(E)$

T es w-cerrado $\Leftrightarrow K=T^c$ es w-abierto.

Proposición. Se verifica:

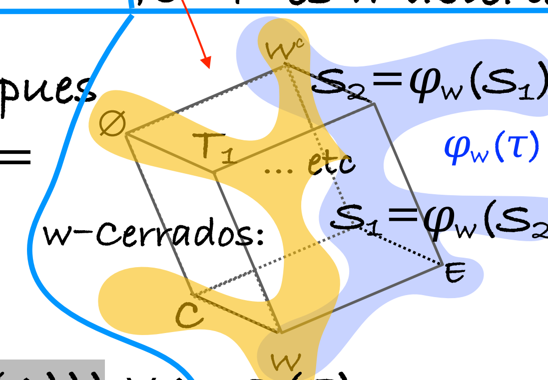
(1) $\text{w-int}(A)=\widehat{\mathrm{int}}_W(A)\ \forall A\in\mathcal{P}(E)$, pues

$\sqcup^W(\varphi_W(S) / (S\in\mathcal{T})\,\&\,(\varphi_W(S)\sqsubseteq^W A))=$

$\varphi_W([\bigcup S / (S\in\mathcal{T})\,\&\,(S\subseteq\varphi_W(A)])=$

$\varphi_W(\mathrm{int}(\varphi_W(A)))\ \ \forall A\in\mathcal{P}(E)$.

(2) $\text{w-cl}(A)=\widehat{\mathrm{cl}}_W(A)=\varphi_W(\mathrm{cl}(\varphi_W(A)))\ \forall A\in\mathcal{P}(E)$.



$W\in\mathcal{P}(E)$, Espacio w-topológico $(E, \mathcal{T}_W)=(E, \varphi_W(\mathcal{T}))$:

$\varphi_W(A)=A\Delta W=(A^c\cap W)\cup(A\cap W^c)$

$$\varphi_W(\mathcal{T})=\{\varphi_W(S) \,/\, S\in\mathcal{T}\}\subseteq\mathcal{P}(E),$$

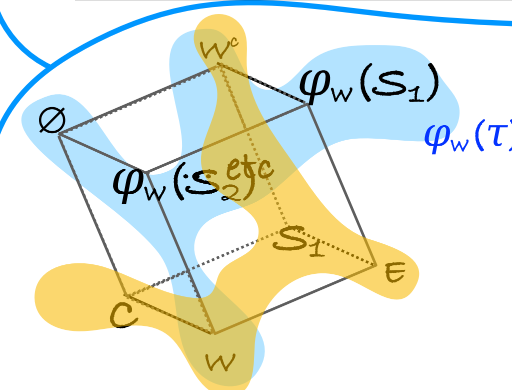
$$W=\varphi_W(\varnothing),\ W^c=\varphi_W(E),\ \varnothing=\varphi_W(W),\ E=\varphi_W(W^c),$$

$$\{W, W^c\}\subseteq\varphi_W(\mathcal{T})$$

$\{W^c, W\}$ es un subconjunto de w-abiertos y w-cerrados

$$S_j\in\varphi_W(\mathcal{T})\ \ \forall j\in J \Rightarrow \Big(\bigsqcup^W_{j\in J} S_j\Big)\in\mathcal{T}$$

$$(S_1\in\mathcal{T})\,\&\,(S_2\in\mathcal{T}) \Rightarrow (S_1\sqcap^W S_2)\in\mathcal{T}$$



Si W es abierto en $\mathcal{T}$:

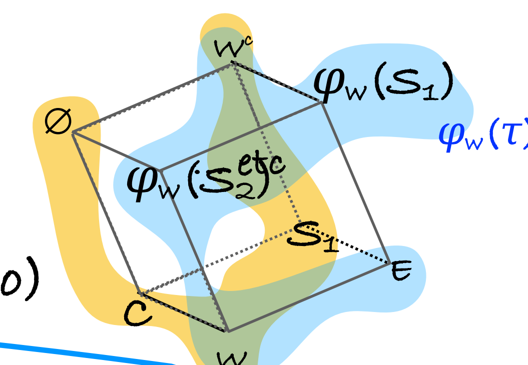
$W\in\mathcal{T} \Rightarrow \varnothing\in\varphi_W(\mathcal{T})$

(∅ es w-abierto y E w-cerrado)

Si W es cerrado en $\mathcal{T}$:

$W^c\in\mathcal{T} \Rightarrow E\in\varphi_W(\mathcal{T})$

(E es w-abierto y ∅ w-cerrado)



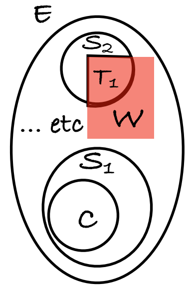
Proposición. Se verifica: $x\in^W(\text{w-int}(A))\Leftrightarrow$

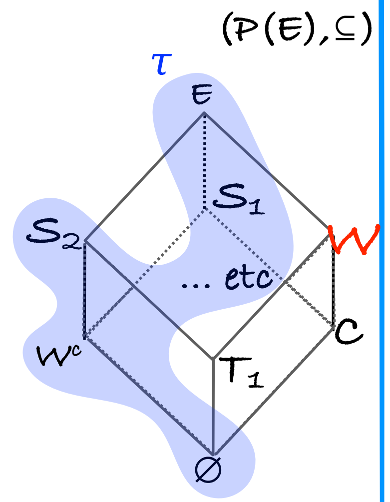
$(x\in\mathrm{int}(\varphi_W(A)))\Leftrightarrow(\exists S\in\mathcal{T}: x\in S\subseteq A)\Leftrightarrow(\exists S^*\in\mathcal{T}^*: x\in^W S^*\sqsubseteq^W A)$

Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:

$E\neq\emptyset$, $\mathcal{T}\subseteq\mathcal{P}(E)$, $\{\emptyset,E\}\subseteq\mathcal{T}$,

($\mathcal{T}$ conjunto de abiertos).





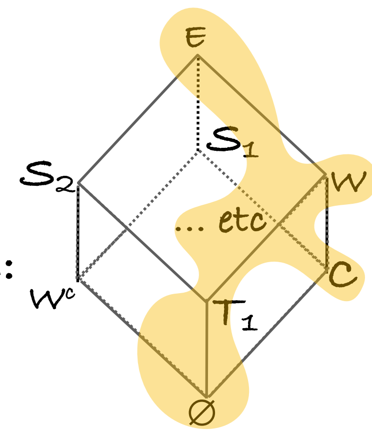
$S_j\in\mathcal{T}\ \ \forall j\in J \Rightarrow (\bigcup_{j\in J} S_j)\in\mathcal{T}$

$(S_1\in\mathcal{T})\&(S_2\in\mathcal{T}) \Rightarrow (S_1\cap S_2)\in\mathcal{T}$

$x\in E$ es interior a $A\in\mathcal{P}(E) \Leftrightarrow (\exists S\in\mathcal{T}: x\in S\subseteq A)$

$int(A)=\{x / x$ es interior a $A\}$

Cerrados:



$w\in\mathcal{P}(E)$, Espacio w-topológico $(E, \mathcal{T}_w)=(E, \varphi_w(\mathcal{T}))$.

¿La w-topología $(E, \varphi_w(\mathcal{T}))$ como una "perspectiva" de la topología $(E, \mathcal{T})$ proporcionada por $W\in\mathcal{P}(E)$?

Proposición. Se verifica:

(1) $w\text{-}int(A)=\widehat{int}_w(A)\ \forall A\in\mathcal{P}(E)$, pues

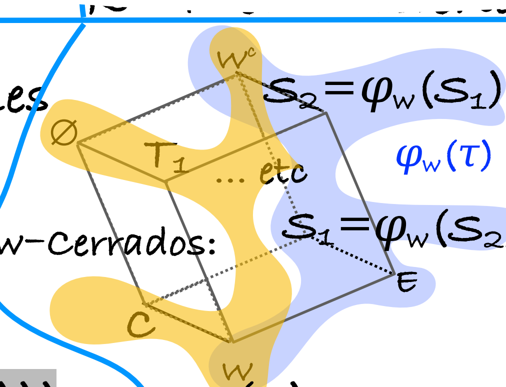
$\sqcup^w(\varphi_w(S)/ (S\in\mathcal{T})\ \&(\varphi_w(S)\sqsubseteq^w A))=$

$\varphi_w([\bigcup S/ (S\in\mathcal{T})\ \&(S\subseteq\varphi_w(A)])=$

$\varphi_w(int(\varphi_w(A)))\ \ \forall A\in\mathcal{P}(E)$.

(2) $w\text{-}cl(A)=\widehat{cl}_w(A)=\ \varphi_w(cl(\varphi_w(A)))\ \forall A\in\mathcal{P}(E)$.

w-cerrados:



Proposición. Se verifica: $x\in^w(w\text{-}int(A))\Leftrightarrow$

$(x\in int(\varphi_w(A)))\Leftrightarrow (\exists S\in\mathcal{T}: x\in S\subseteq A)\Leftrightarrow (\exists S^*\in\mathcal{T}^*: x\in^w S^*\sqsubseteq^w A)$

$(S^*=\varphi_w(S))$

W-Topología en términos de conjuntos derivados. W-Puntos aislados

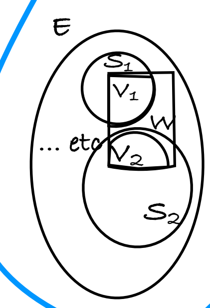
Sea conjunto E y un operador $Der:P(E)\rightarrow P(E)$ asociando tal que:

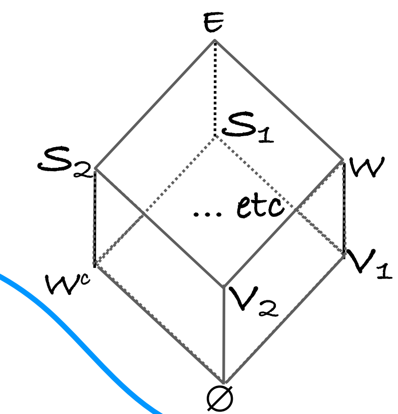
1. $\varnothing=Der(\varnothing)$,
2. $Der(Der(S))\subseteq Der(S)\quad \forall S\in P(E)$,
3. $Der(S)=Der(S-\{x\})\quad \forall S\in P(E),\ \forall x\in E$,
4. $Der(S\cup T)=Der(S)\cup Der(T)\quad \forall (S,T)\in P(E)\times P(E)$.

("Der" es un operador "derivado").

w-Topología en términos de conjuntos derivados. w-Puntos aislados

Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:
$\mathcal{T} \subseteq P(E)$, $\{\varnothing, E\} \subseteq \mathcal{T}$,
($\mathcal{T}$ conjunto de cerrados).





Sea conjunto E y un operador $Der: P(E) \rightarrow P(E)$ asociando tal que:

1. $\varnothing = Der(\varnothing)$,
2. $Der(Der(S)) \subseteq Der(S) \quad \forall S \in P(E)$,
3. $Der(S) = Der(S - \{x\}) \quad \forall S \in P(E), \forall x \in E$,
4. $Der(S \cup T) = Der(S) \cup Der(T) \quad \forall (S,T) \in P(E) \times P(E)$.

("Der" es un operador "derivado").
Tal operador $Der: P(E) \rightarrow P(E)$ define una topología por cerrados $\mathcal{T}$ en E en la que éstos son los subconjuntos $V \in P(E)$ tales que $Der(V)) \subseteq V$.

Esa topología es tal que, para todo S, $Der(S)$ es el conjunto de sus puntos límite o de acumulación.

w-Topología en términos de conjuntos derivados. w-Puntos aislados

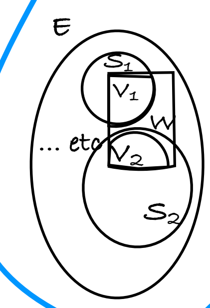
Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:

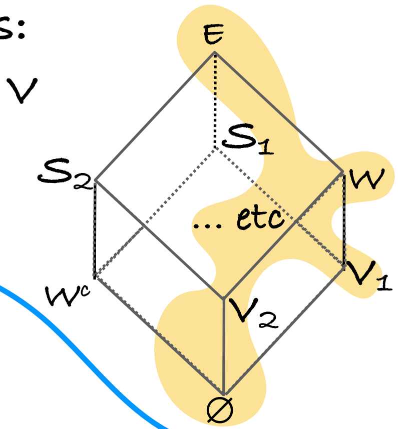
$\mathcal{T} \subseteq P(E)$, $\{\emptyset, E\} \subseteq \mathcal{T}$,

($\mathcal{T}$ conjunto de cerrados).

Cerrados:

$Der(V) \subseteq V$





Sea conjunto E y un operador $Der: P(E) \rightarrow P(E)$ asociando tal que:

1. $\emptyset = Der(\emptyset)$,
2. $Der(Der(S)) \subseteq Der(S) \quad \forall S \in P(E)$,
3. $Der(S) = Der(S - \{x\}) \quad \forall S \in P(E), \forall x \in E$,
4. $Der(S \cup T) = Der(S) \cup Der(T) \quad \forall (S,T) \in P(E) \times P(E)$.

("Der" es un operador "derivado").

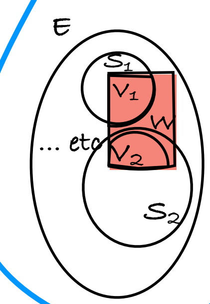
Tal operador $Der: P(E) \rightarrow P(E)$ define una topología por cerrados $\mathcal{T}$ en E en la que éstos son los subconjuntos $V \in P(E)$ tales que $Der(V)) \subseteq V$.

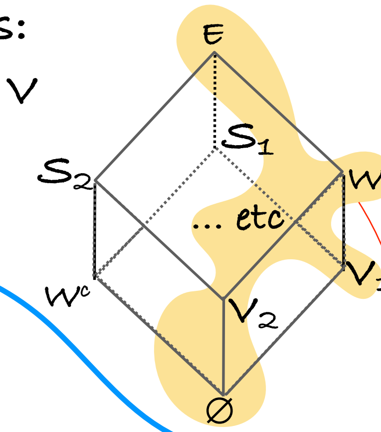
Esa topología es tal que, para todo S, $Der(S)$ es el conjunto de sus puntos límite o de acumulación.

w-Topología en términos de conjuntos derivados. w-Puntos aislados

Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:
$\mathcal{T}\subseteq P(E)$, $\{\emptyset,E\}\subseteq\mathcal{T}$,
($\mathcal{T}$ conjunto de cerrados).

Cerrados:
$Der(V)\subseteq V$





Sea conjunto E y un operador $Der:P(E)\rightarrow P(E)$ asociando tal que:

1. $\emptyset=Der(\emptyset)$,
2. $Der(Der(S))\subseteq Der(S)\quad \forall S\in P(E)$,
3. $Der(S)=Der(S-\{x\})\quad \forall S\in P(E),\ \forall x\in E$,
4. $Der(S\cup T)=Der(S)\cup Der(T)\quad \forall (S,T)\in P(E)\times P(E)$.

("Der" es un operador "derivado").

Tal operador $Der:P(E)\rightarrow P(E)$ define una topología por cerrados $\mathcal{T}$ en E en la que éstos son los subconjuntos $V\in P(E)$ tales que $Der(V))\subseteq V$.

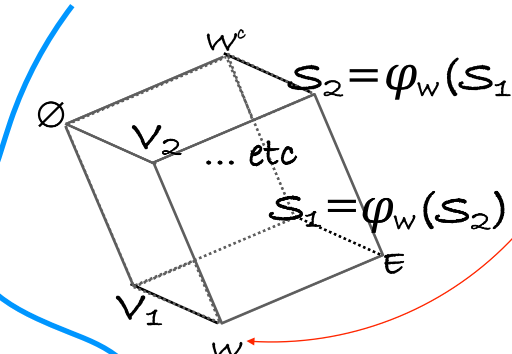
Esa topología es tal que, para todo S, $Der(S)$ es el conjunto de sus puntos límite o de acumulación.

Espacio "w-topológico"

$(E,\ \varphi_w(\mathcal{T}))$,

en el que el conjunto de w-cerrados $\varphi_w(\mathcal{T})$ es:

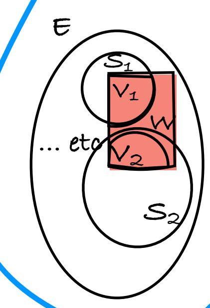
$\varphi_w(\mathcal{T})\ =\{\varphi_w(V)\ /\ Der(V)\subseteq V\}$.

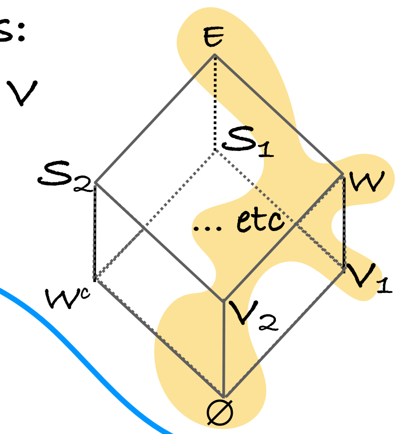


w-Topología en términos de conjuntos derivados. w-Puntos aislados

Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:
$\mathcal{T}\subseteq P(E)$, $\{\varnothing,E\}\subseteq\mathcal{T}$,
($\mathcal{T}$ conjunto de cerrados).

Cerrados:
$Der(V)\subseteq V$





Sea conjunto E y un operador $Der:P(E)\to P(E)$ asociando tal que:

1. $\varnothing=Der(\varnothing)$,
2. $Der(Der(S))\subseteq Der(S)$ $\forall S\in P(E)$,
3. $Der(S)=Der(S-\{x\})$ $\forall S\in P(E)$, $\forall x\in E$,
4. $Der(S\cup T)=Der(S)\cup Der(T)$ $\forall (S,T)\in P(E)\times P(E)$.

("Der" es un operador "derivado").

Tal operador $Der:P(E)\to P(E)$ define una topología por cerrados $\mathcal{T}$ en E en la que éstos son los subconjuntos $V\in P(E)$ tales que $Der(V))\subseteq V$.

Esa topología es tal que, para todo S, $Der(S)$ es el conjunto de sus puntos límite o de acumulación.

Espacio "w-topológico"

$$(E, \varphi_w(\mathcal{T})),$$

en el que el conjunto de w-cerrados $\varphi_w(\mathcal{T})$ es:

$$\varphi_w(\mathcal{T}) = \{\varphi_w(V) \;/\; Der(V)\subseteq V\}.$$

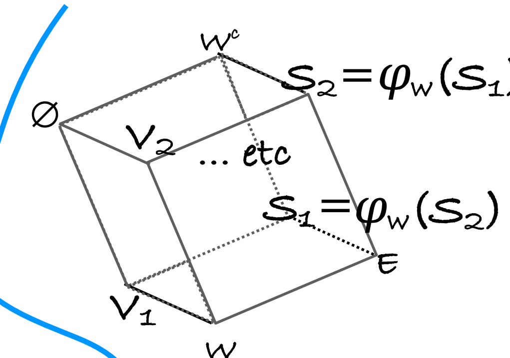
En ese espacio "w-topológico", el operador "w-derivado" w-Dev es tal que:

$$(w\text{-}Dev)(A) = \varphi_w(Dev(\varphi_w(A))) = \widehat{Dev}_w(A) \quad \forall A\in P(E),$$

es decir:

$$(w\text{-}Dev) = \varphi_w\circ Dev\circ\varphi_w \quad \text{y} \quad \varphi_w(\mathcal{T}) = \{K \;/\; (w\text{-}Dev)(K)\sqsubseteq^{\omega} K\}.$$

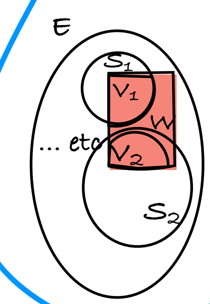
T es w-cerrado⇔
$Der(T)\sqsubseteq^{W} T$.

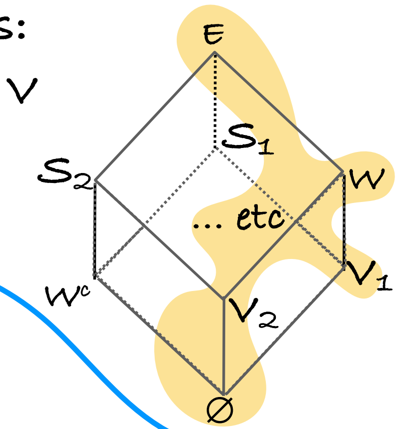


w-Topología en términos de conjuntos derivados. w-Puntos aislados

Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:
$\mathcal{T} \subseteq \mathcal{P}(E)$, $\{\emptyset, E\} \subseteq \mathcal{T}$,
($\mathcal{T}$ conjunto de cerrados).

Cerrados:
$Der(V) \subseteq V$





Sea conjunto E y un operador $Der: \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ asociando tal que:

1. $\emptyset = Der(\emptyset)$,
2. $Der(Der(S)) \subseteq Der(S) \quad \forall S \in \mathcal{P}(E)$,
3. $Der(S) = Der(S - \{x\}) \quad \forall S \in \mathcal{P}(E), \forall x \in E$,
4. $Der(S \cup T) = Der(S) \cup Der(T) \quad \forall (S,T) \in \mathcal{P}(E) \times \mathcal{P}(E)$.

("Der" es un operador "derivado").

Tal operador $Der: \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(E)$ define una topología por cerrados $\mathcal{T}$ en E en la que éstos son los subconjuntos $V \in \mathcal{P}(E)$ tales que $Der(V)) \subseteq V$.

Esa topología es tal que, para todo S, $Der(S)$ es el conjunto de sus puntos límite o de acumulación.

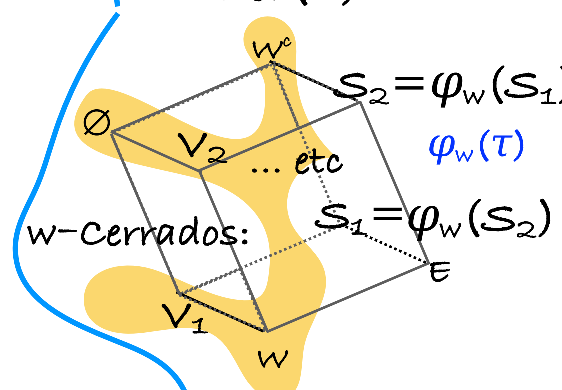
Espacio "w-topológico"

$(E, \varphi_w(\mathcal{T}))$,

en el que el conjunto de w-cerrados $\varphi_w(\mathcal{T})$ es:

$$\varphi_w(\mathcal{T}) = \{\varphi_w(V) \;/\; Der(V) \subseteq V\}.$$

T es w-cerrado $\Leftrightarrow$
$Der(T) \sqsubseteq^w T$.



En ese espacio "w-topológico", el operador "w-derivado" w-Dev es tal que:

$$(w\text{-}Dev)(A) = \varphi_w(Dev(\varphi_w(A))) = \widehat{Dev}_w(A) \quad \forall A \in \mathcal{P}(E),$$

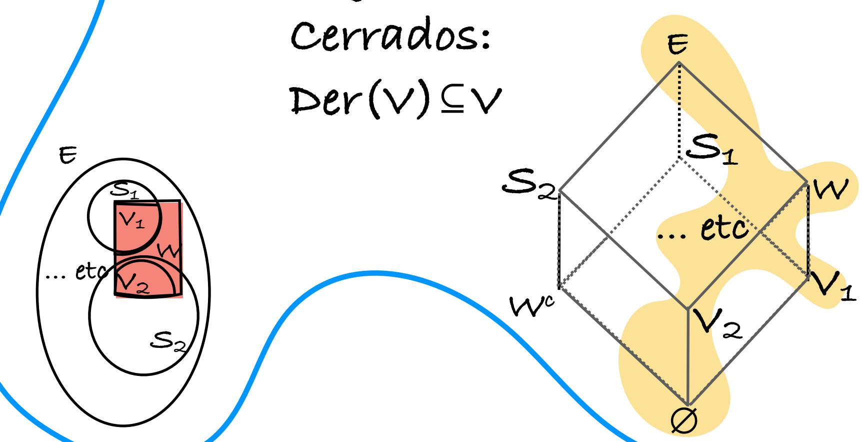
es decir:

$$(w\text{-}Dev) = \varphi_w \circ Dev \circ \varphi_w \qquad y \quad \varphi_w(\mathcal{T}) = \{K \;/\; (w\text{-}Dev)(K) \sqsubseteq^{\omega} K\}.$$

w-Topología en términos de conjuntos derivados. w-Puntos aislados

Espacio topológico $(E, \mathcal{T})$:
$\mathcal{T} \subseteq P(E)$, $\{\varnothing, E\} \subseteq \mathcal{T}$,
($\mathcal{T}$ conjunto de cerrados).

Cerrados:
$Der(V) \subseteq V$



Sea conjunto E y un operador $Der: P(E) \to P(E)$ asociando tal que:

1. $\varnothing = Der(\varnothing)$,
2. $Der(Der(S)) \subseteq Der(S) \quad \forall S \in P(E)$,
3. $Der(S) = Der(S - \{x\}) \quad \forall S \in P(E),\ \forall x \in E$,
4. $Der(S \cup T) = Der(S) \cup Der(T) \quad \forall (S,T) \in P(E) \times P(E)$.

("Der" es un operador "derivado").

Tal operador $Der: P(E) \to P(E)$ define una topología por cerrados $\mathcal{T}$ en E en la que éstos son los subconjuntos $V \in P(E)$ tales que $Der(V)) \subseteq V$.

Esa topología es tal que, para todo S, $Der(S)$ es el conjunto de sus puntos límite o de acumulación.

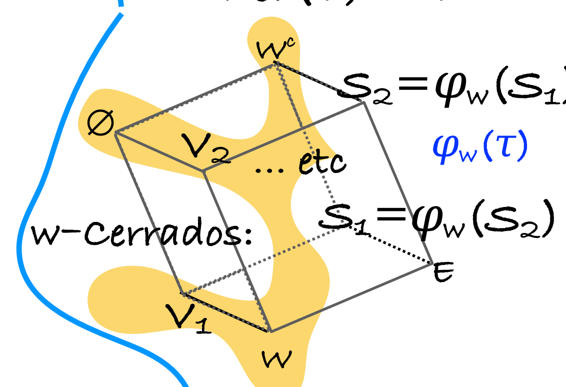
Espacio "w-topológico"

$(E, \varphi_w(\mathcal{T}))$,

en el que el conjunto de w-cerrados $\varphi_w(\mathcal{T})$ es:

$$\varphi_w(\mathcal{T}) = \{\varphi_w(V) \;/\; Der(V) \subseteq V\}.$$

T es w-cerrado $\Leftrightarrow$
$Der(T) \sqsubseteq^W T$.



En ese espacio "w-topológico", el operador "w-derivado" w-Dev es tal que:

$$(w\text{-}Dev)(A) = \varphi_w(Dev(\varphi_w(A))) = \widehat{Dev}_w(A) \quad \forall A \in P(E),$$

es decir:

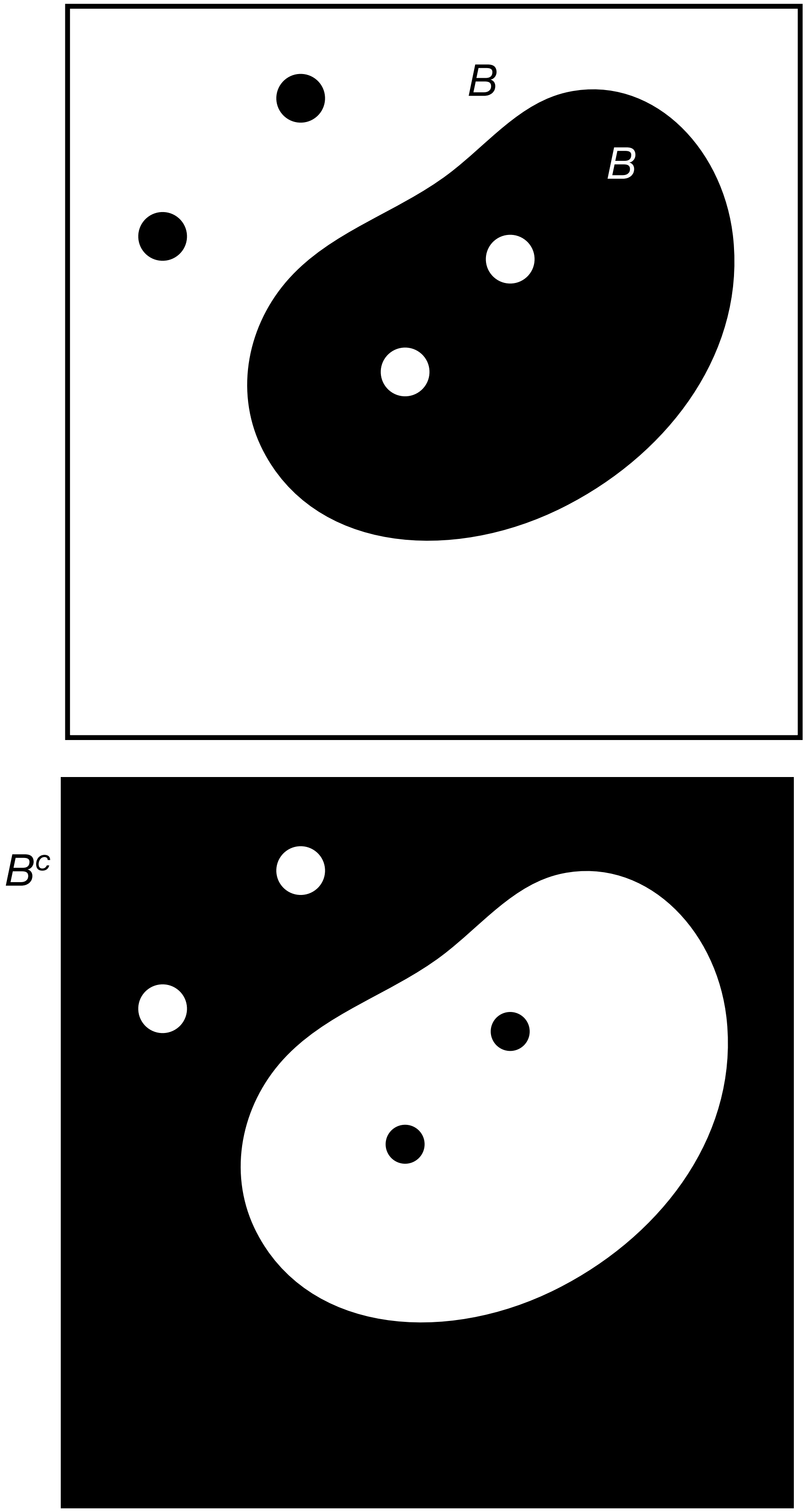
$$(w\text{-}Dev) = \varphi_w \circ Dev \circ \varphi_w \qquad y \quad \varphi_w(\mathcal{T}) = \{K \;/\; (w\text{-}Dev)(K) \sqsubseteq^{\omega} K\}.$$

En $(E, \varphi_w(\mathcal{T}))$ se define: $(w\text{-}Aisl)(A) = (w\text{-}Cla)(A) \sqcap^W [(w\text{-}Dev)(A)]^c \quad \forall A \in P(E)$ w-Aislado de A)

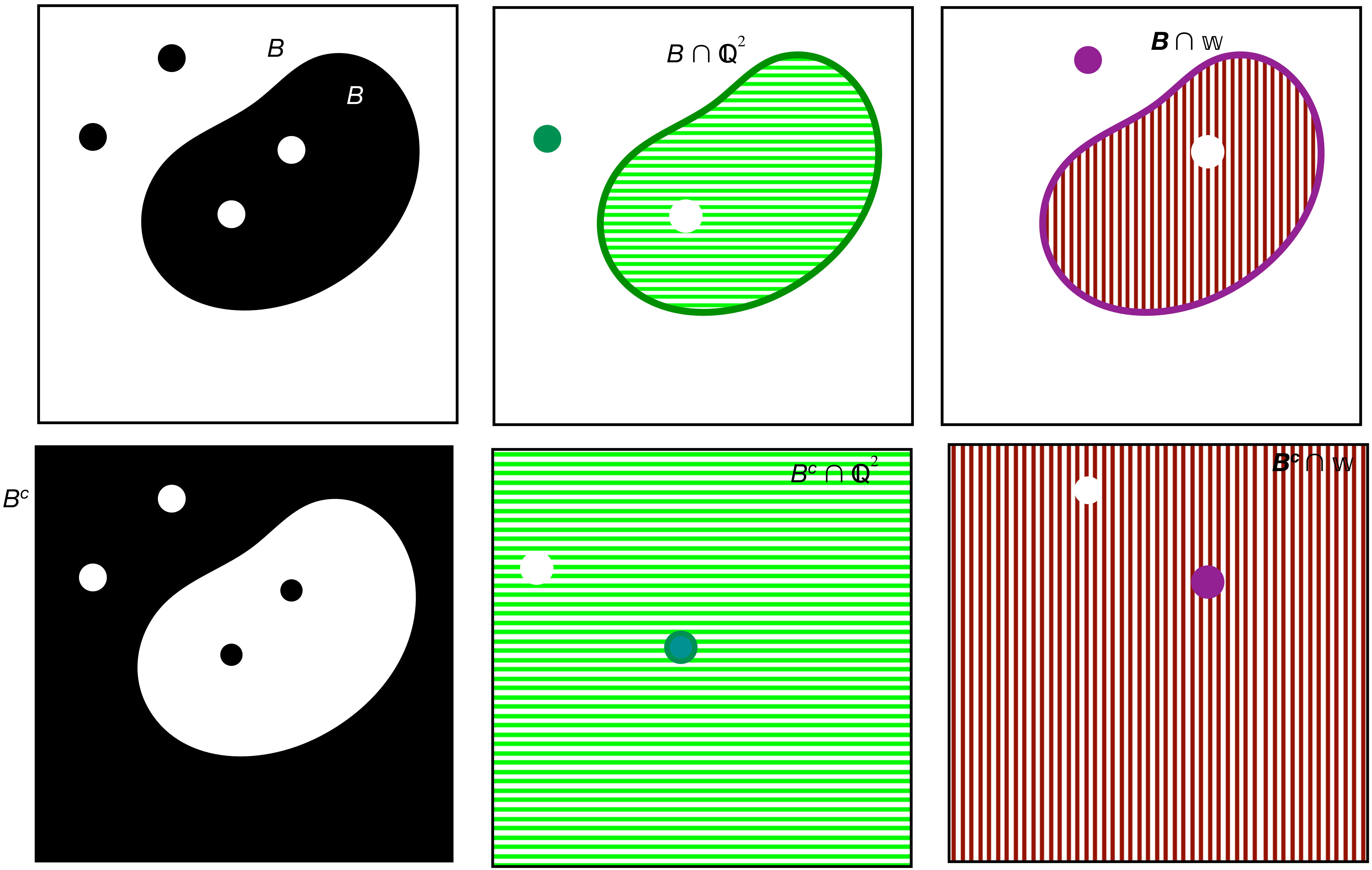
Si $Aisl(A)$ representa el conjunto de aislados de A en $(E, \mathcal{T})$, se verifica que:

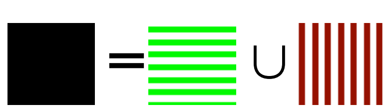
$$(w\text{-}Aisl) = \widehat{Aisl}_w = \varphi_w \circ Aisl \circ \varphi_w$$

Ejemplo



$$\mathbb{W} = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^c) \cup (\mathbb{Q}^c \times \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q}^c \times \mathbb{Q}^c) = (\mathbb{Q}^2)^c \subseteq \mathbb{R}^2$$

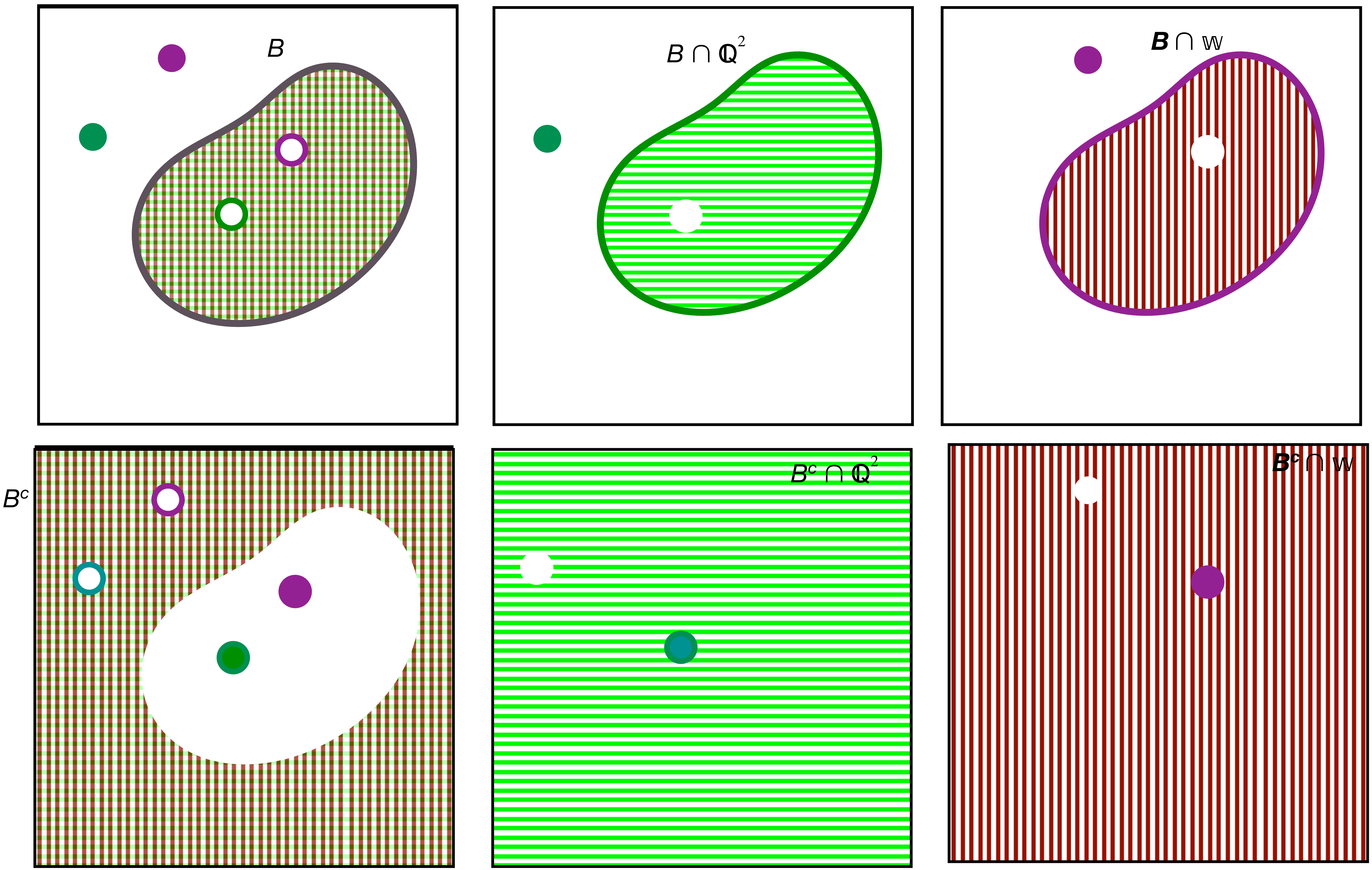


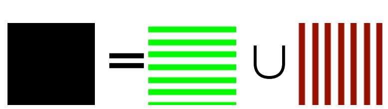


$= \mathbb{Q}^2 \cup \mathbb{W},$

$$\mathbb{W} = (\mathbb{Q} X \mathbb{Q}^c) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q}^c X \mathbb{Q}^c) = (\mathbb{Q}^2)^c \subseteq \mathbb{R}^2$$

$$\mathbb{Q}^2 \cap \mathbb{W} = \varnothing$$

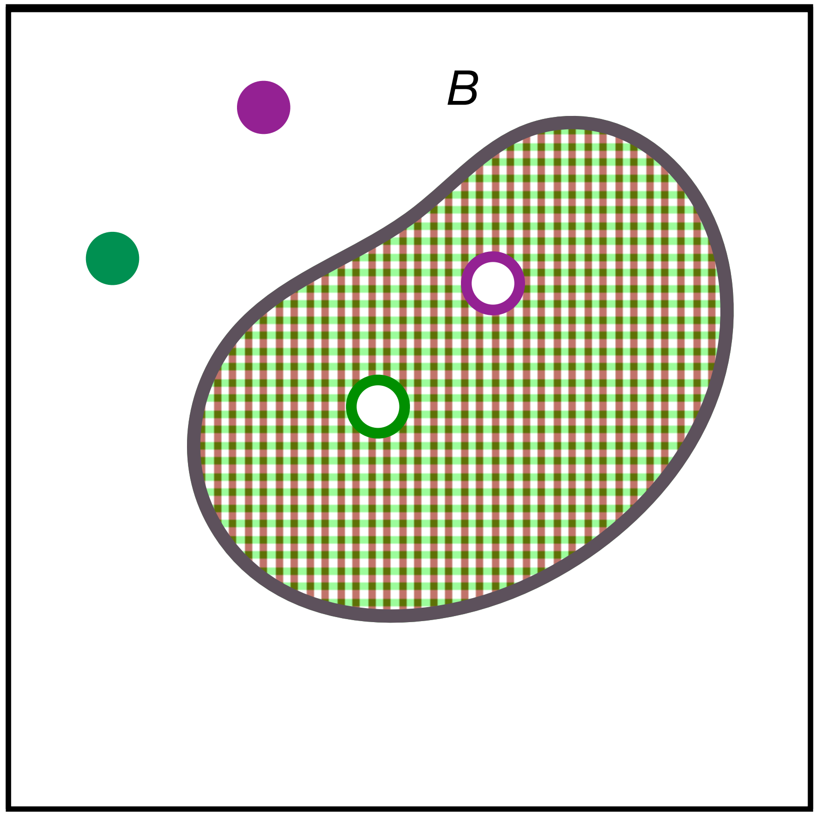


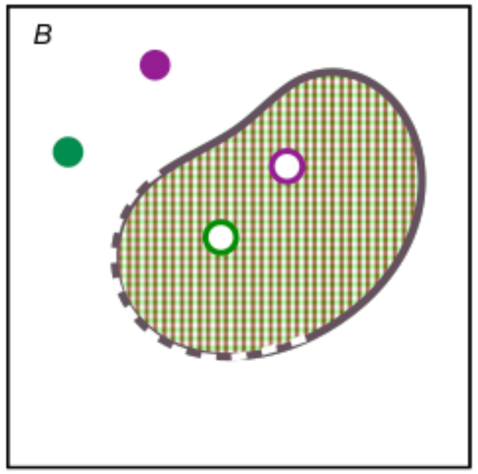


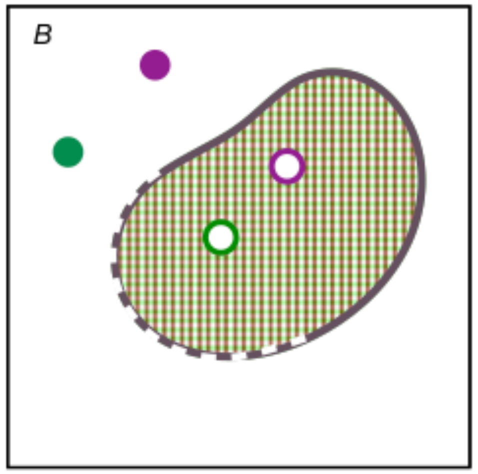
$= \mathbb{Q}^2 \cup \mathbb{W},$

$$\mathbb{W} = (\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}^c) \cup (\mathbb{Q}^c \times \mathbb{Q}) \cup (\mathbb{Q}^c \times \mathbb{Q}^c) = (\mathbb{Q}^2)^c \subseteq \mathbb{R}^2$$

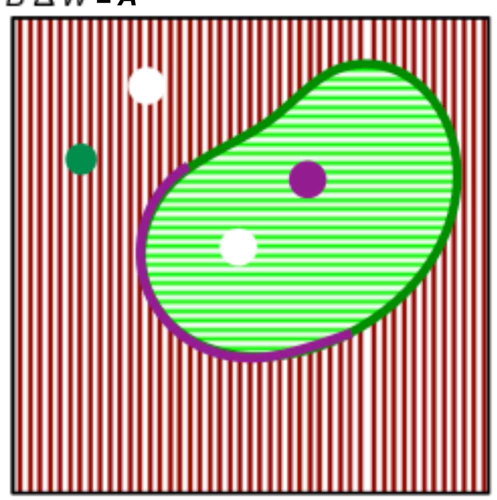
$$\mathbb{Q}^2 \cap \mathbb{W} = \varnothing$$

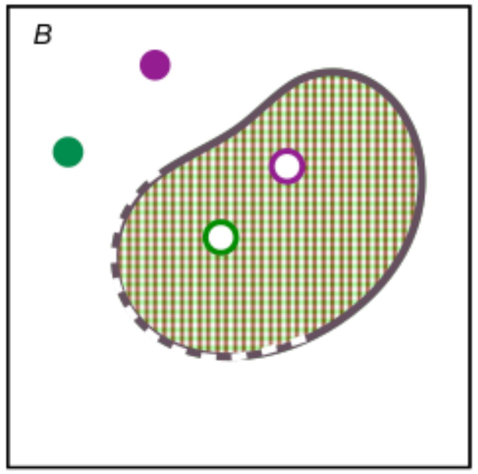

B


B



B Δ W = **A**

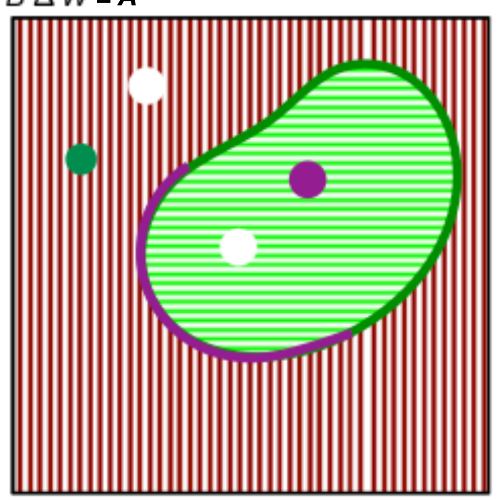


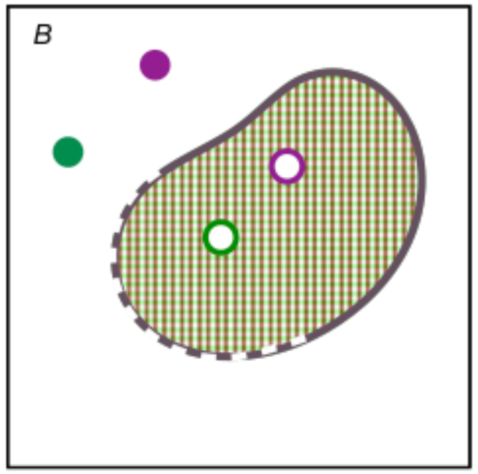


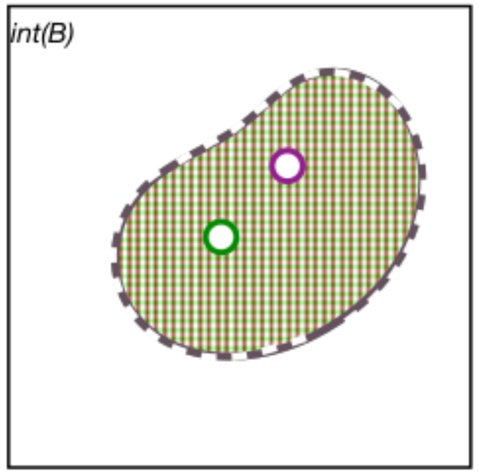
$$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1}$$

$$(w_1 = w_2 = w)$$

$B \,\Delta\, W = A$



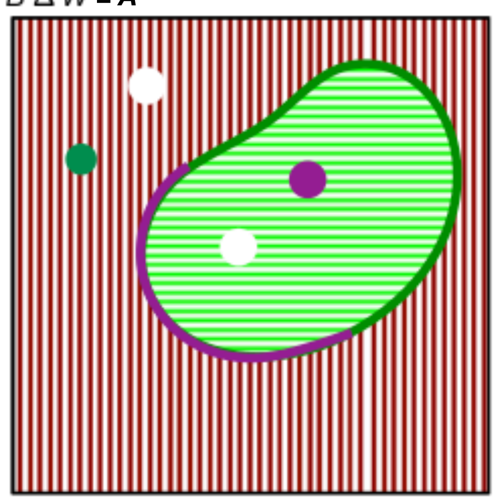




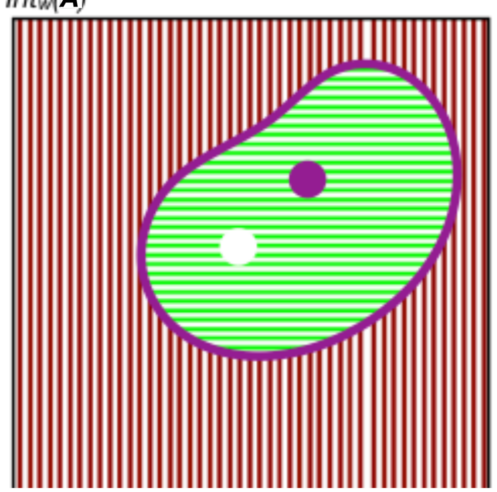
$$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1}$$

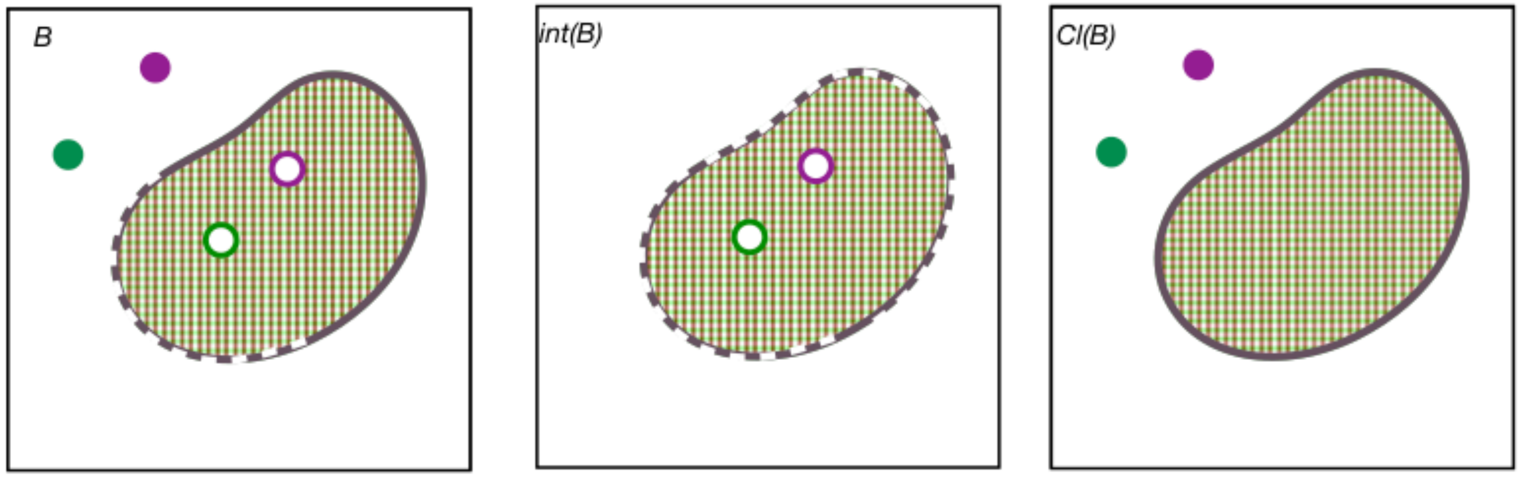
$$(w_1 = w_2 = w)$$

$B \, \Delta \, W = \boldsymbol{A}$



$\widehat{int}_w(\boldsymbol{A})$

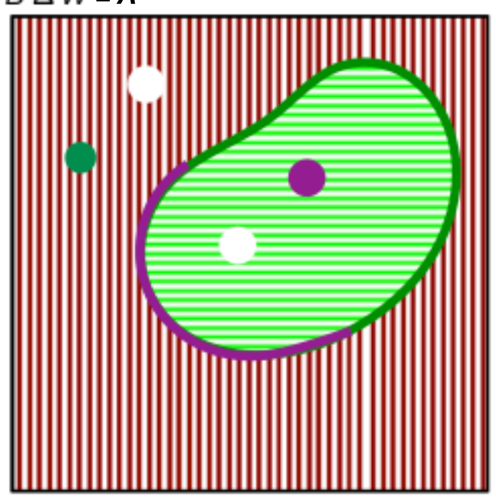




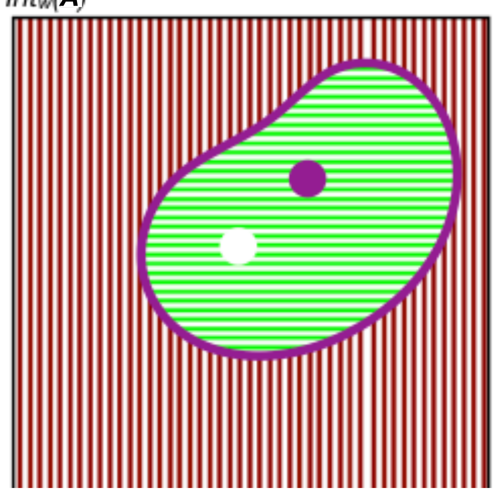
$$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1}$$

$$(w_1 = w_2 = w)$$

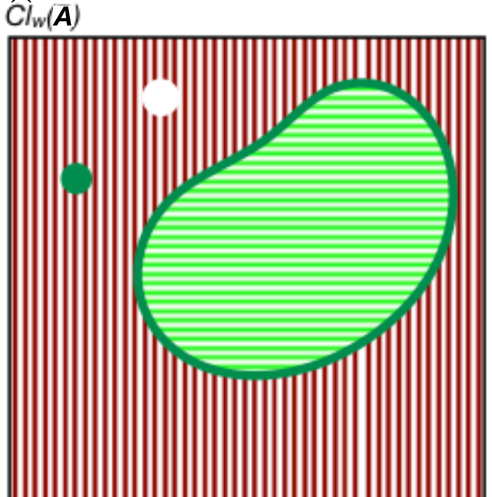
$B \,\Delta\, W = \boldsymbol{A}$

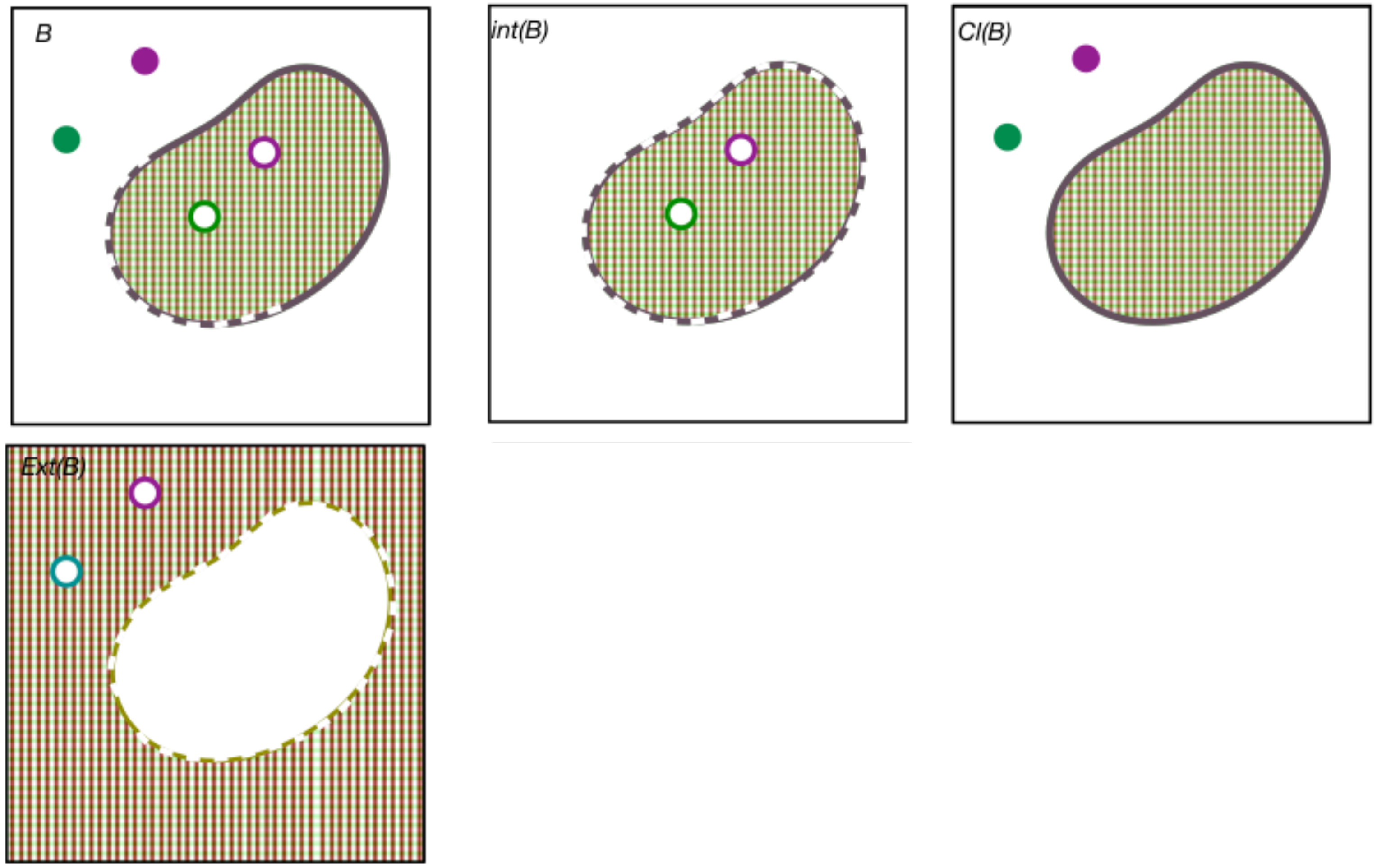


$\widehat{Int}_w(\boldsymbol{A})$



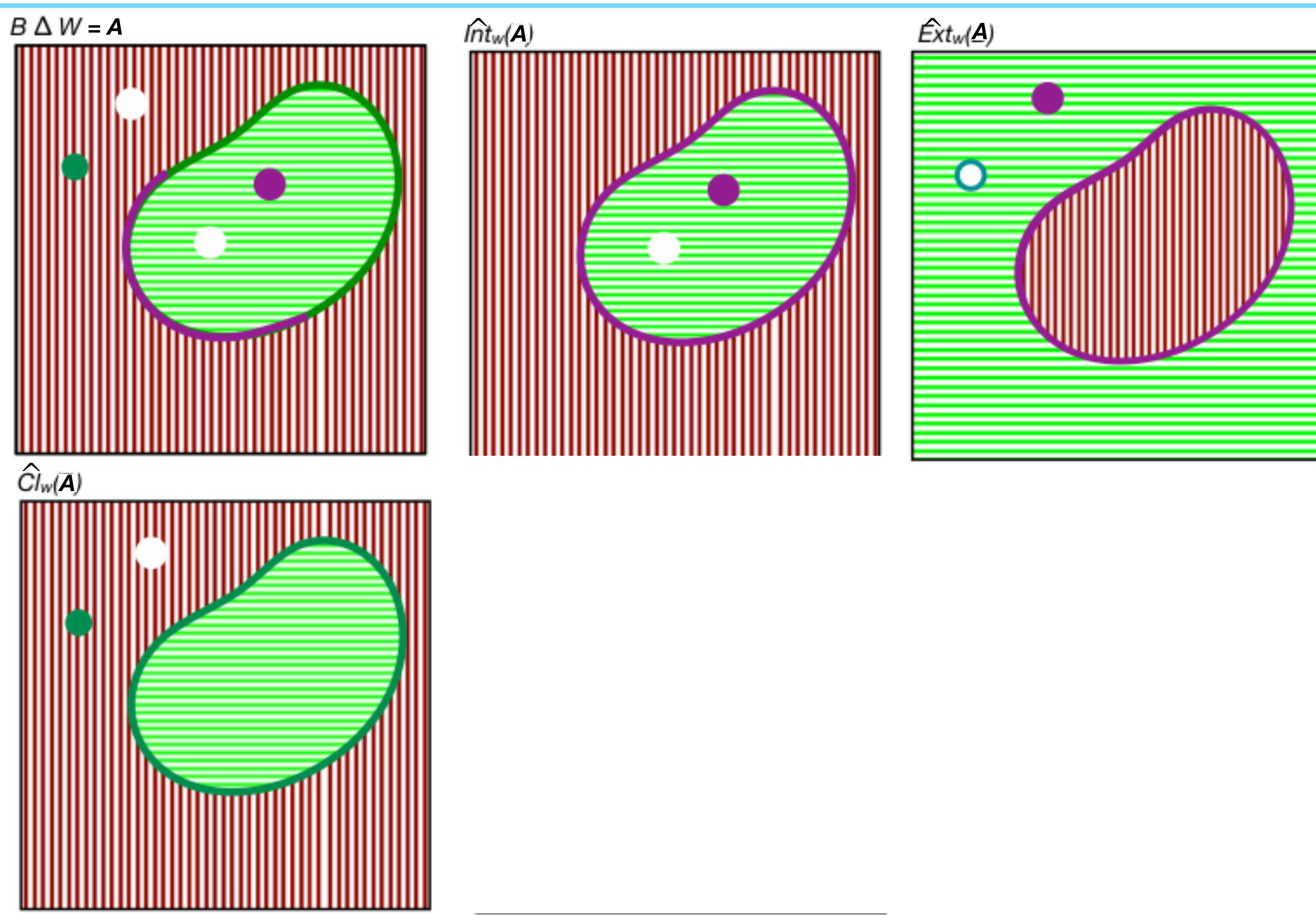
$\widehat{Cl}_w(\boldsymbol{A})$

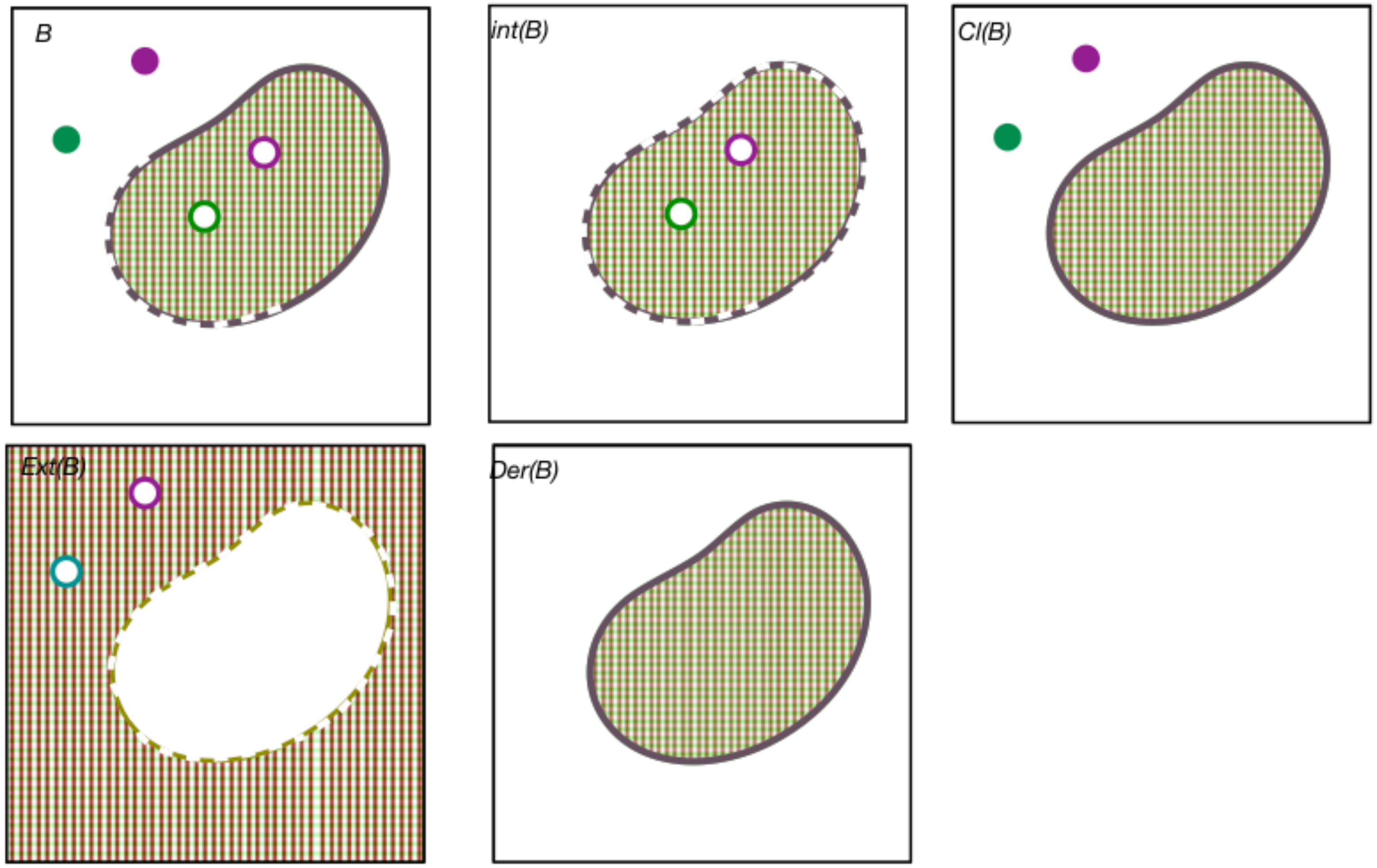




$$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1}$$

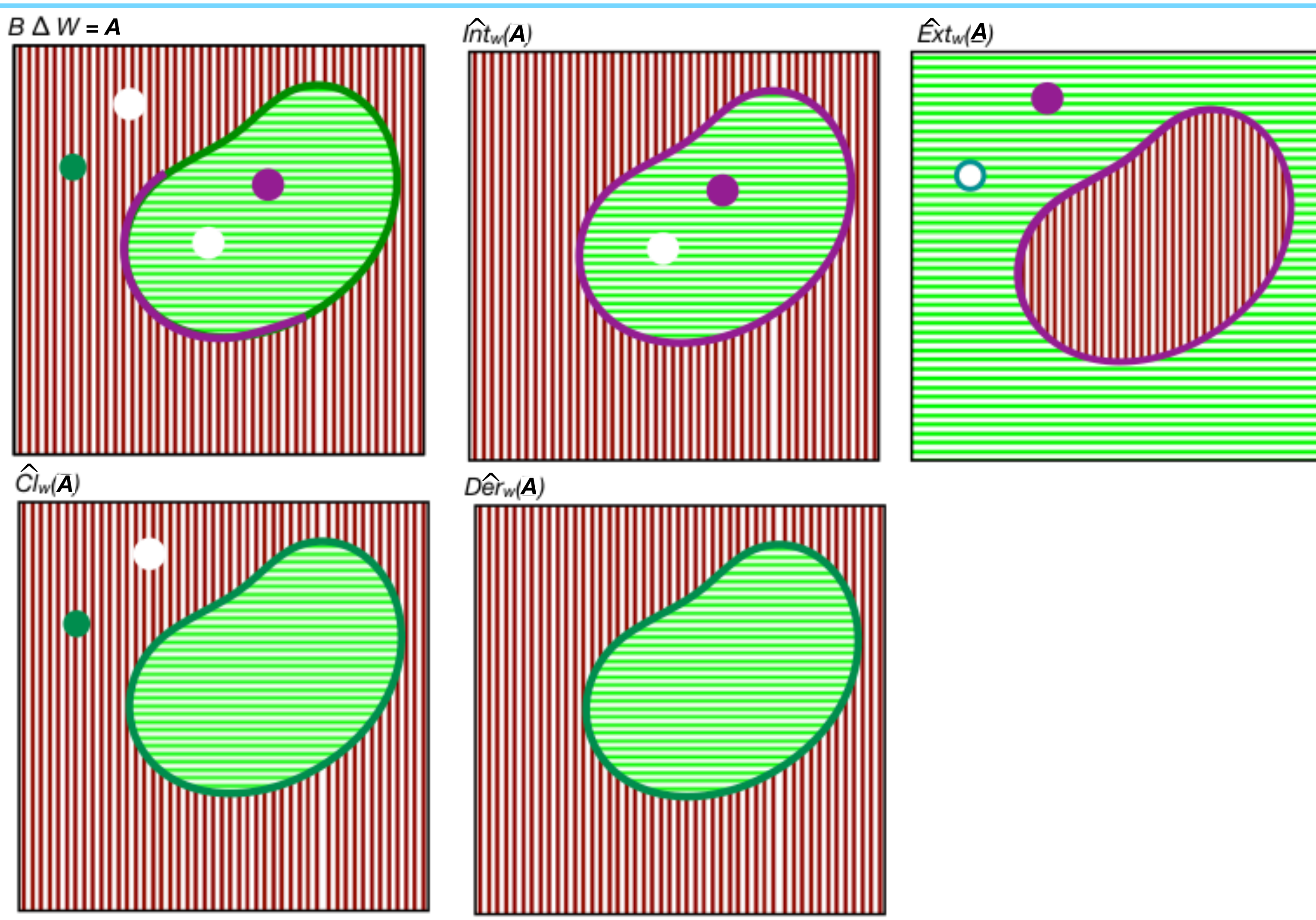
$$(w_1 = w_2 = w)$$

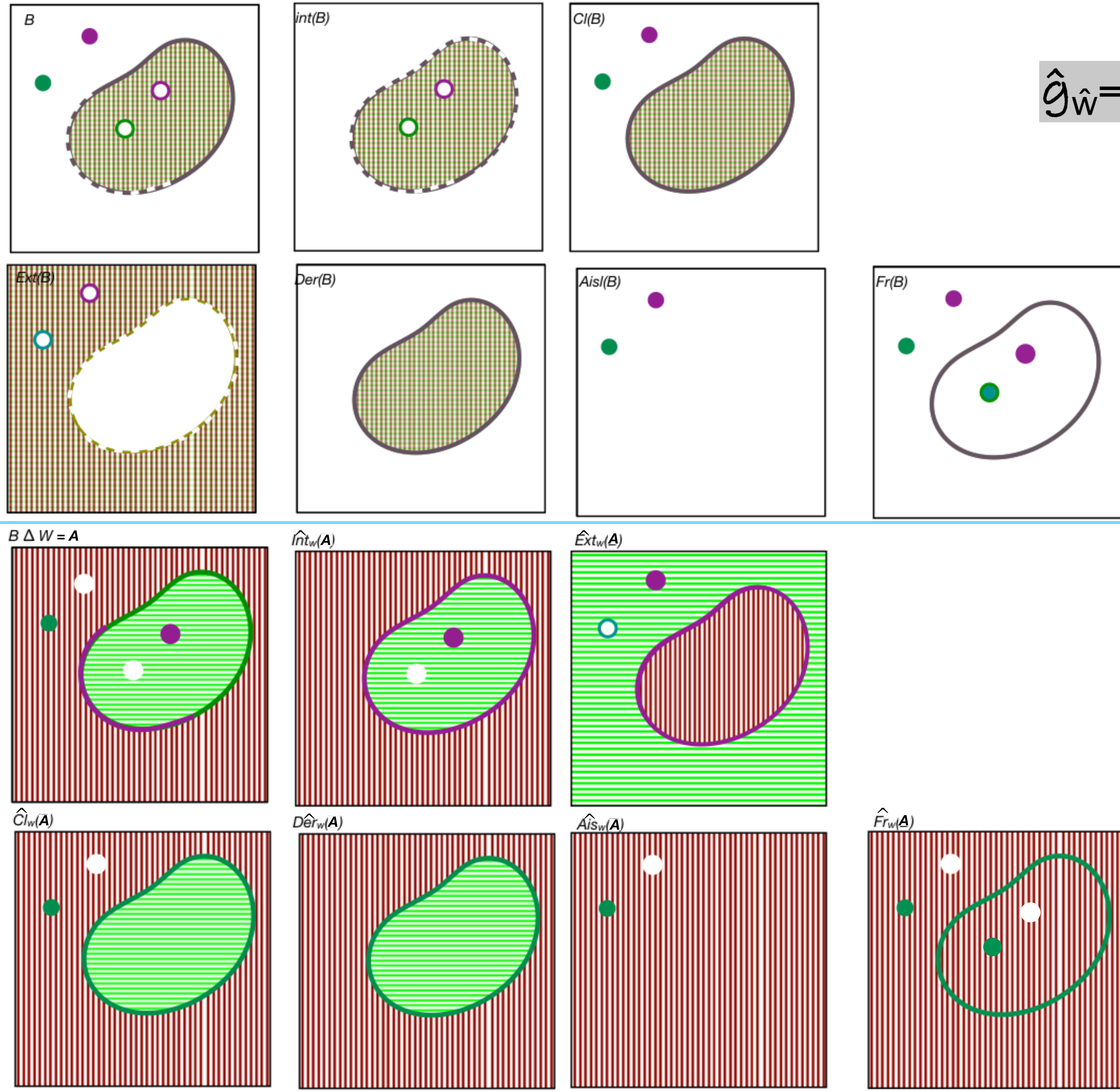




$$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1}$$

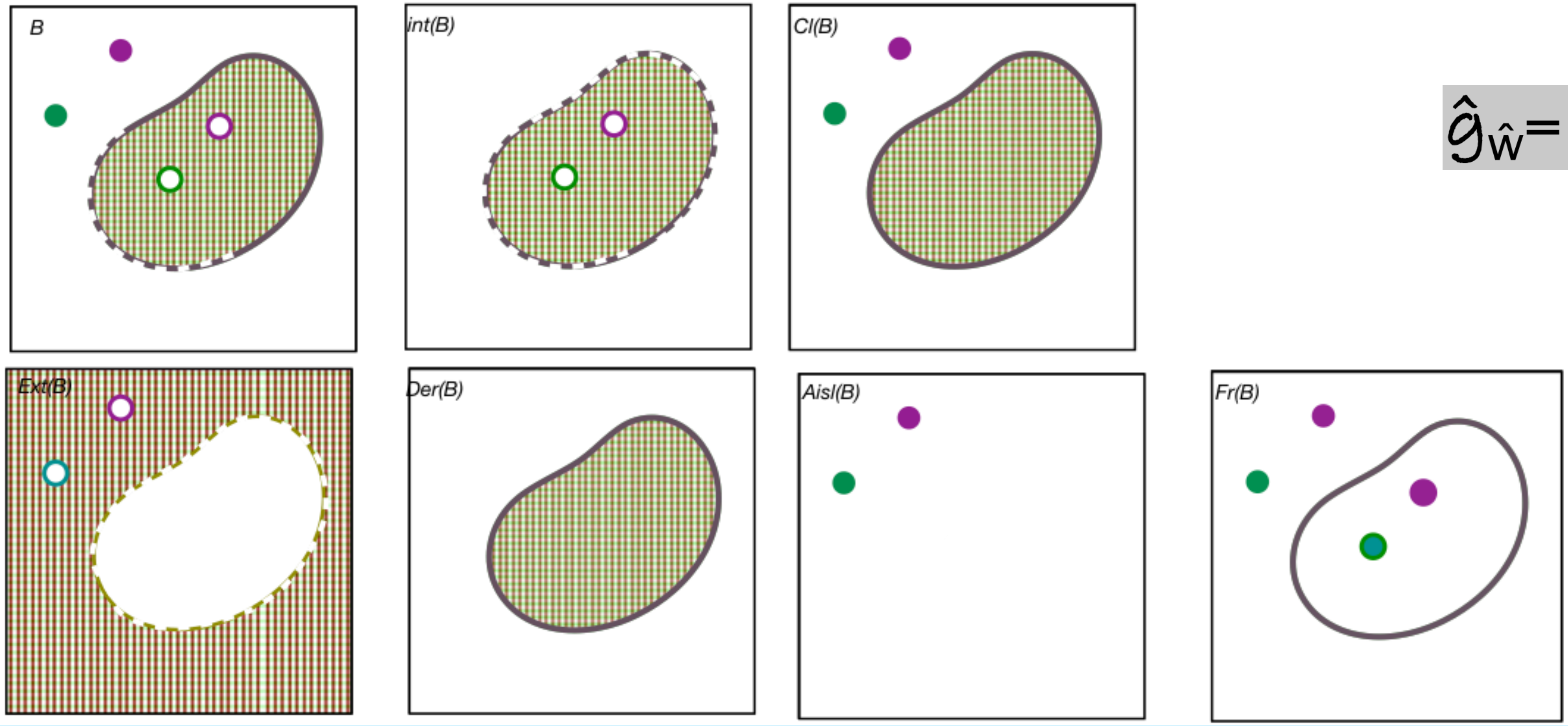
$$(w_1 = w_2 = w)$$





$$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1}$$

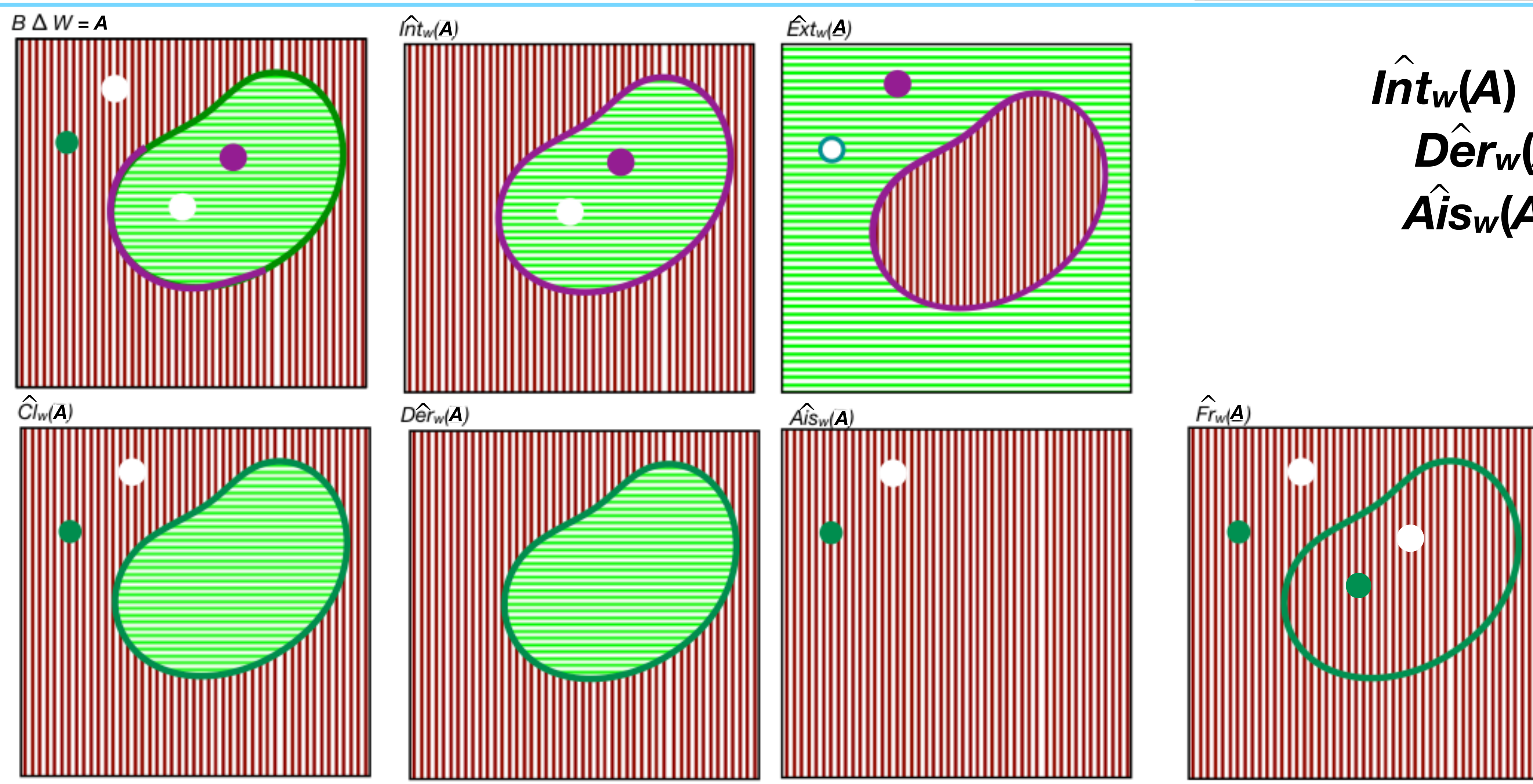
$$(w_1 = w_2 = w)$$



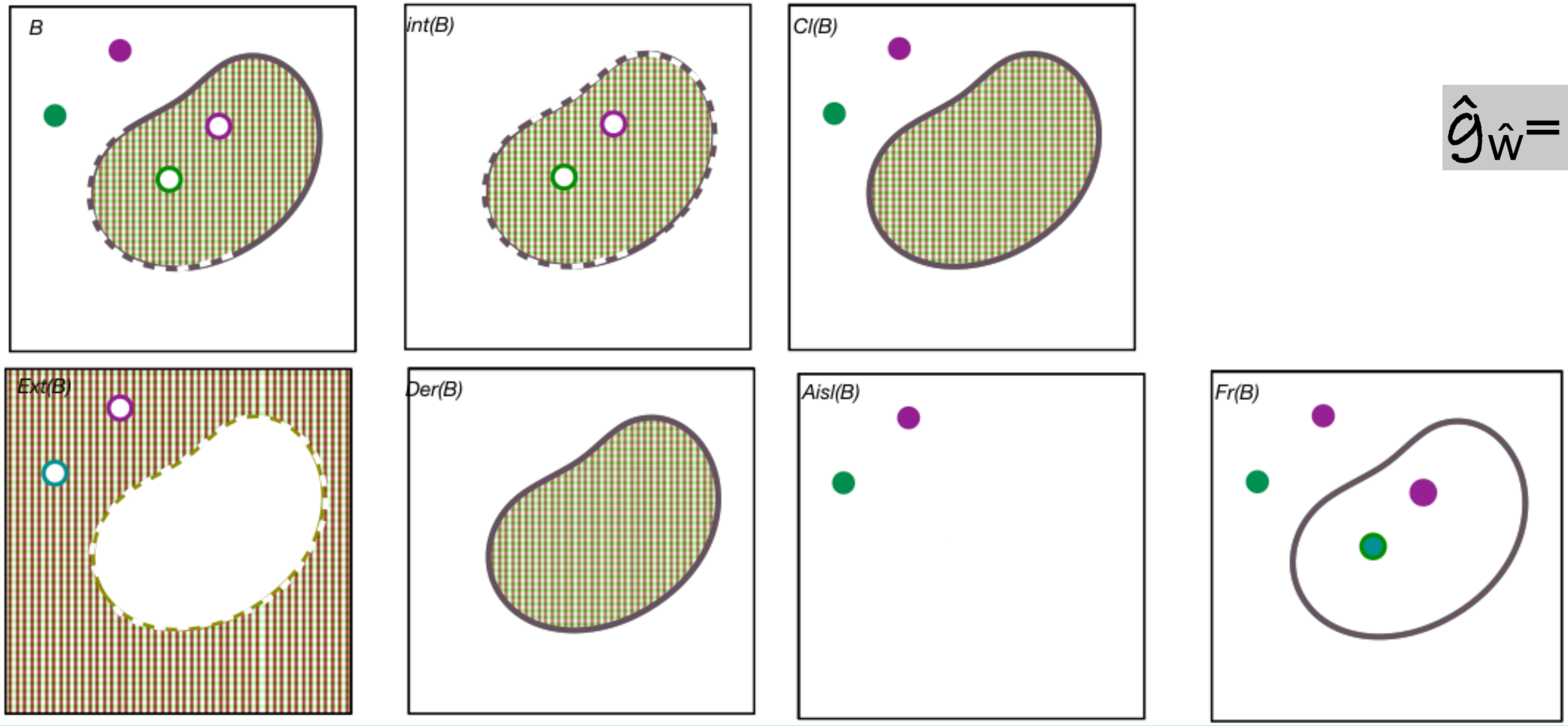
$$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1}$$

$$(w_1 = w_2 = w)$$

$$\boldsymbol{Int(A) \subseteq A \subseteq Cl(A),}$$
$$\boldsymbol{Der(A) \subseteq Cl(A),}$$
$$\boldsymbol{Ais(A) \subseteq Fr(A), \ldots}$$



$$\boldsymbol{\widehat{Int}_w(A) \sqsubseteq^W A \sqsubseteq^W \widehat{Cl}_w(A),}$$
$$\boldsymbol{\widehat{Der}_w(A) \sqsubseteq^W \widehat{Cl}_w(A),}$$
$$\boldsymbol{\widehat{Ais}_w(A) \sqsubseteq^W \widehat{Fr}_w(A), \ldots}$$

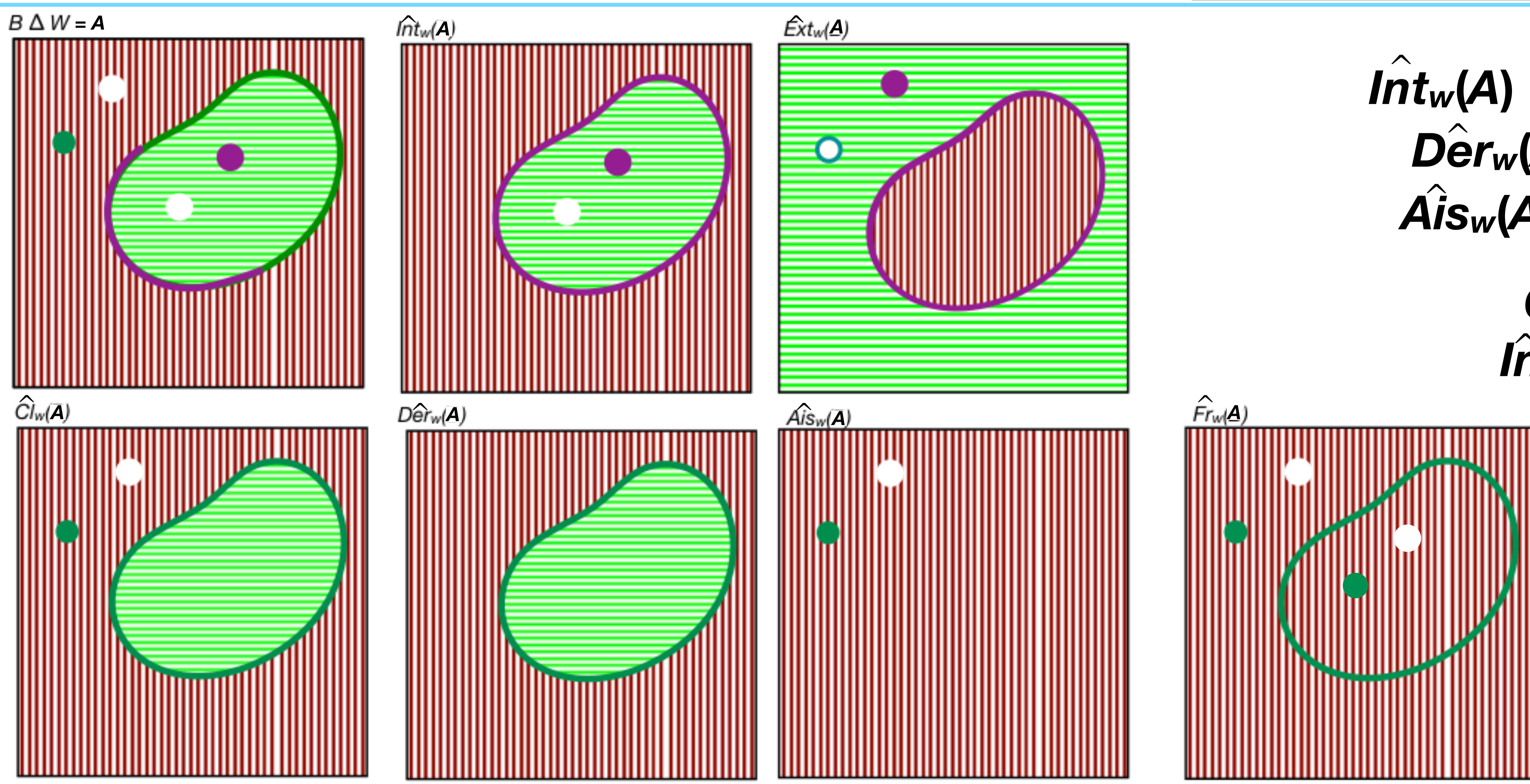


$$\hat{g}_{\hat{w}} = \varphi_{w_2} \circ g \circ \varphi_{w_1}$$

$$(w_1 = w_2 = w)$$

***Int*(*A*) ⊆ *A* ⊆ *Cl*(*A*),**
***Der*(*A*) ⊆ *Cl*(*A*),**
***Ais*(*A*) ⊆ *Fr*(*A*), …**

***Cl*(*A*) cerrado,**
***Int*(*A*) abierto,…**

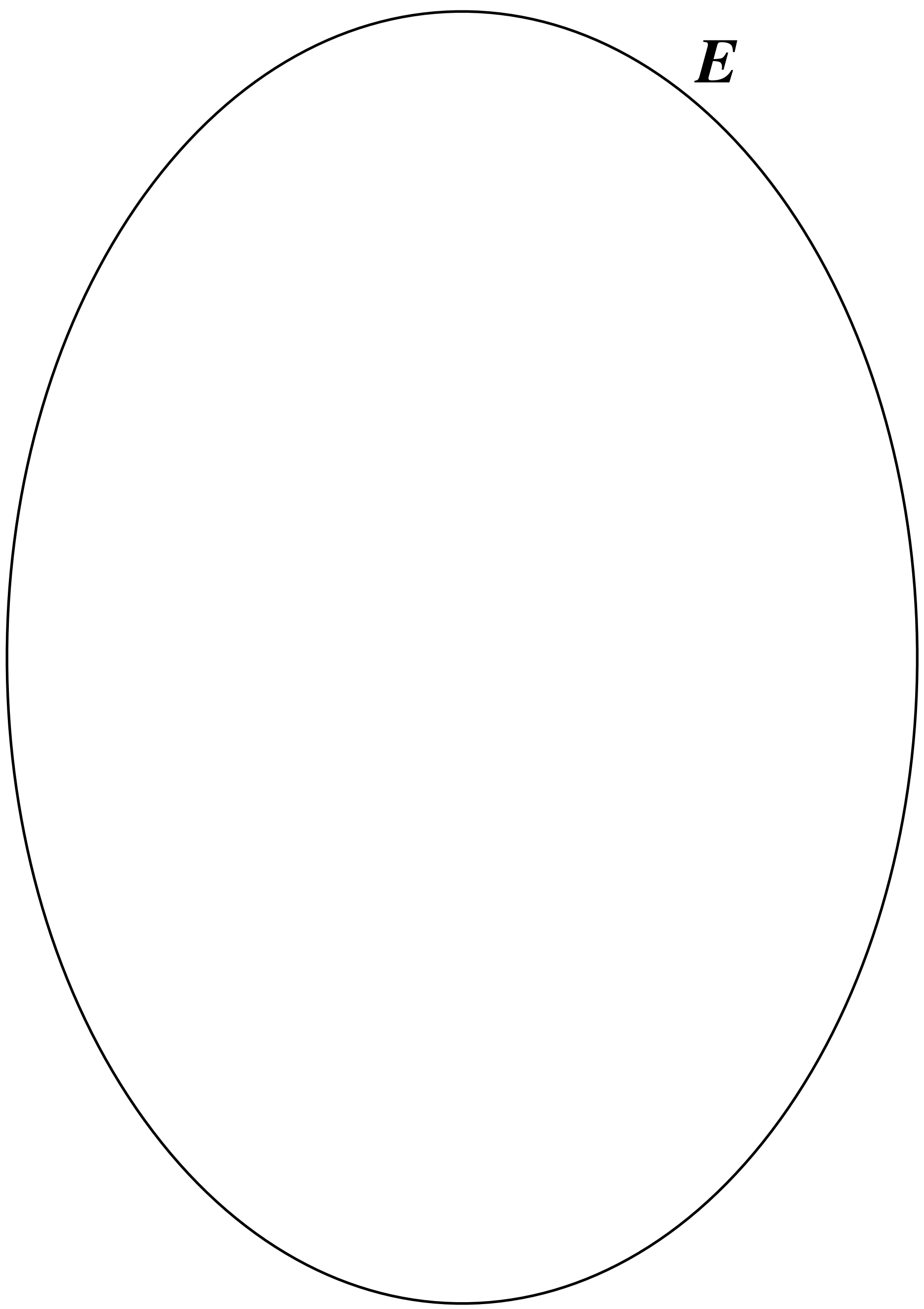


$$\widehat{Int}_w(A) \sqsubseteq^W A \sqsubseteq^W \widehat{Cl}_w(A),$$
$$\widehat{Der}_w(A) \sqsubseteq^W \widehat{Cl}_w(A),$$
$$\widehat{Ais}_w(A) \sqsubseteq^W \widehat{Fr}_w(A), \ldots$$

$\widehat{Cl}_w(A)$ ***w*-cerrado,**
$\widehat{Int}_w(A)$ ***w*-abierto,…**

Orden de actividad y funciones de medida: "w-medidas".

Medida en $(P(E), \sqsubseteq^{W})$ obtenida a partir de otra en $(P(E), \subseteq)$

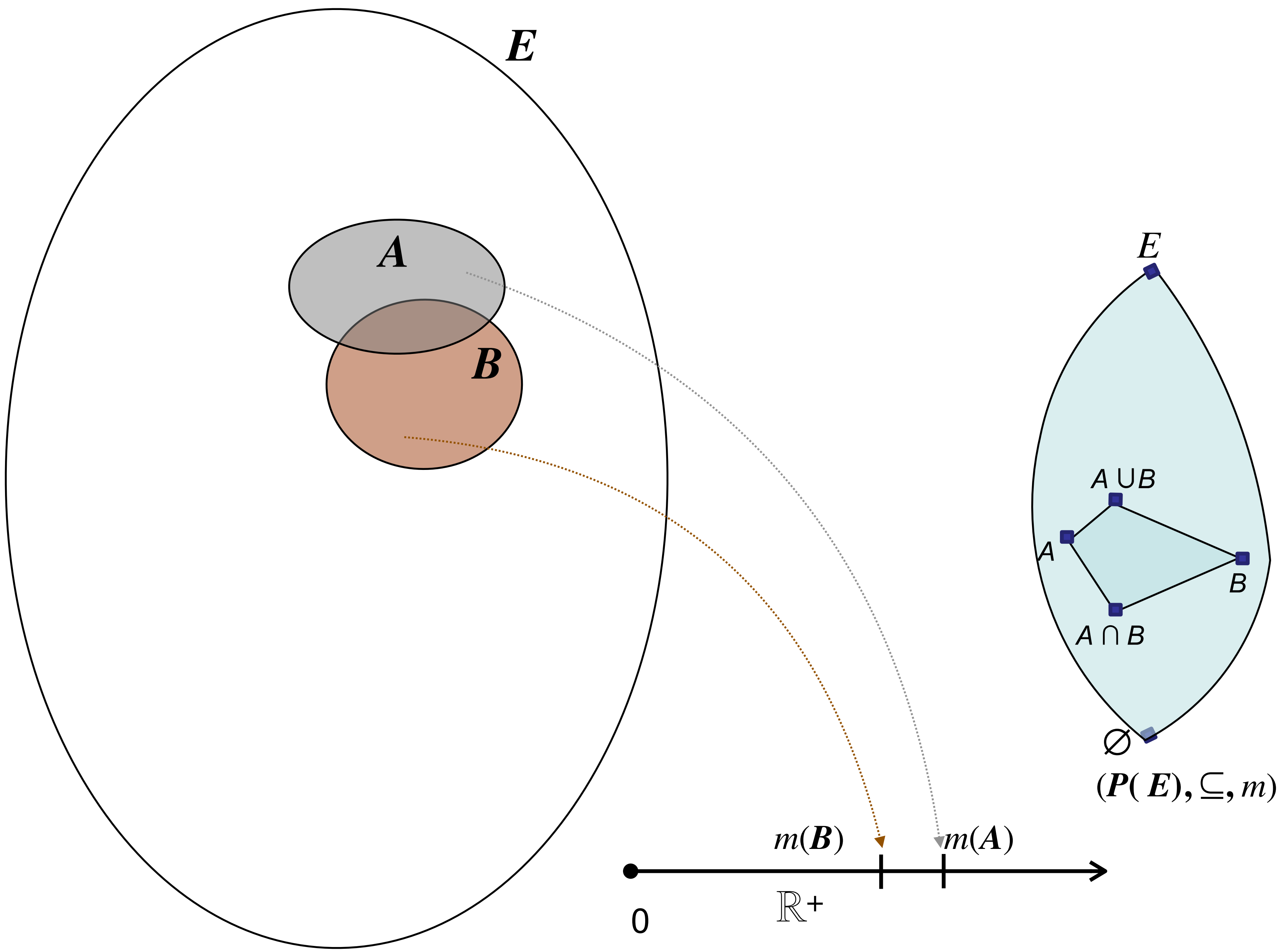


Medida en $(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}), \sqsubseteq^{W})$ obtenida a partir de otra en $(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}), \subseteq)$

$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \Rightarrow m(\boldsymbol{A}) \leq m(\boldsymbol{B})$

Sea m: $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}) \rightarrow \mathbb{R}^{+}$ una medida en $(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}), \subseteq)$.

Se verifica: $m(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) + m(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) = m(\boldsymbol{A}) + m(\boldsymbol{B})$

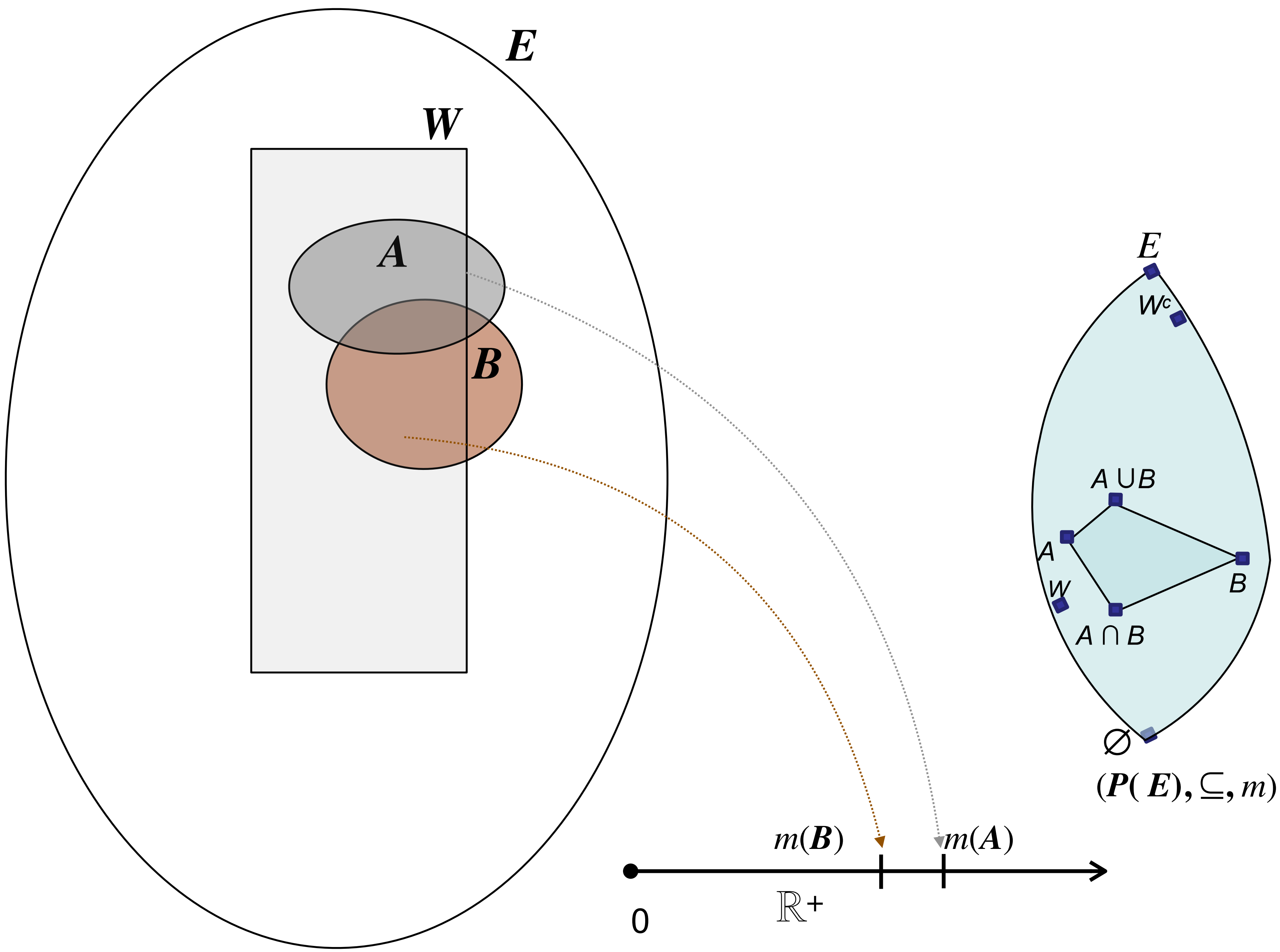


Medida en $(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}), \sqsubseteq^{W})$ obtenida a partir de otra en $(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}), \subseteq)$

$\boldsymbol{A} \subseteq \boldsymbol{B} \Rightarrow m(\boldsymbol{A}) \leq m(\boldsymbol{B})$

Sea m: $\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}) \rightarrow \mathbb{R}^{+}$ una medida en $(\boldsymbol{P}(\boldsymbol{E}), \subseteq)$.

Se verifica: $m(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{B}) + m(\boldsymbol{A} \cup \boldsymbol{B}) = m(\boldsymbol{A}) + m(\boldsymbol{B})$



ÓRDENES DE ACTIVIDAD EN ESPACIOS DE MEDIDA .

$A \subseteq B \Rightarrow m(A) \leq m(B)$

Medida en $(P(E), \sqsubseteq^W)$ obtenida a partir de otra en $(P(E), \subseteq)$

Sea m: $P(E) \to \mathbb{R}^+$ una medida en $(P(E), \subseteq)$.

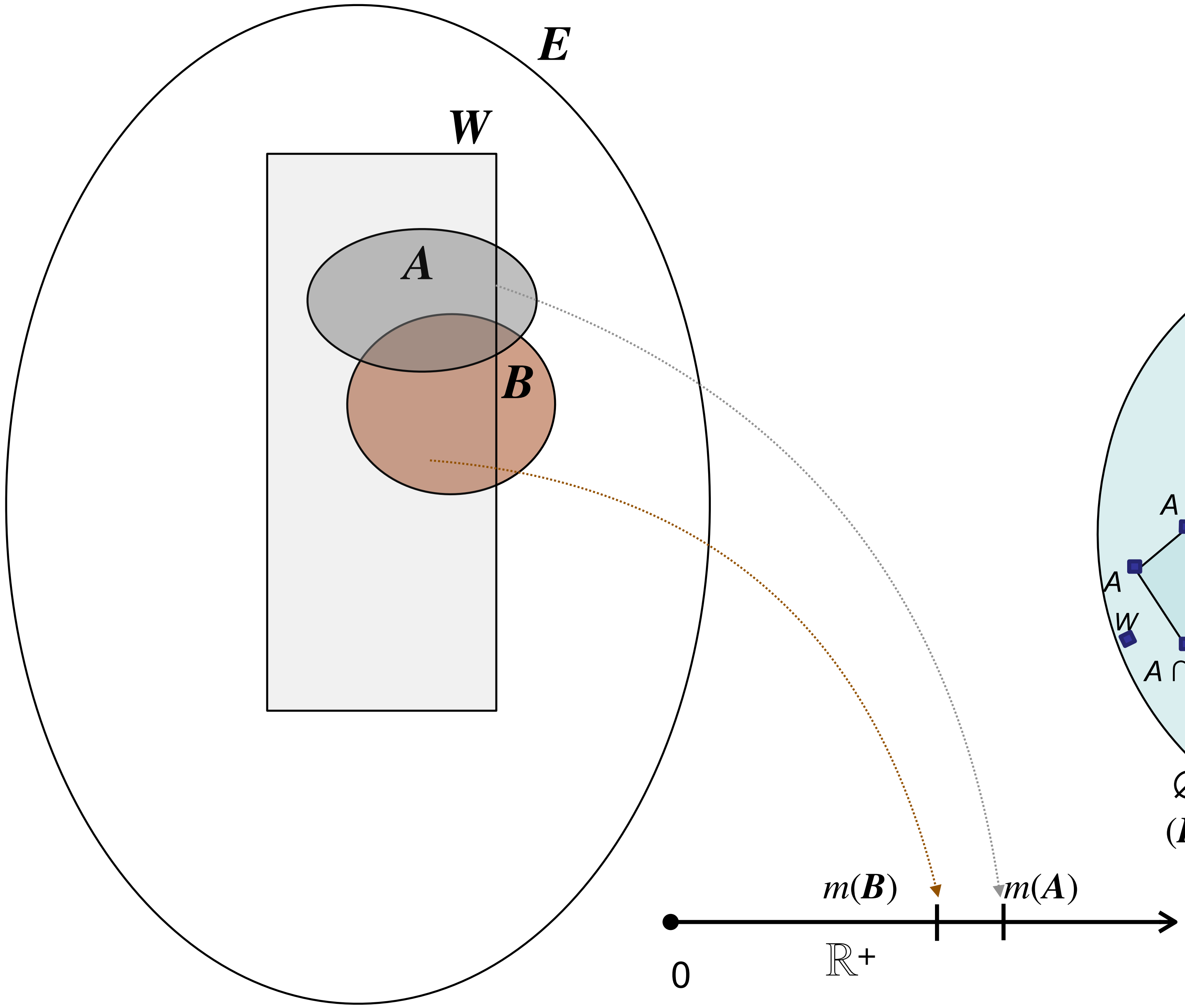
Se verifica: $m(A \cap B) + m(A \cup B) = m(A) + m(B)$

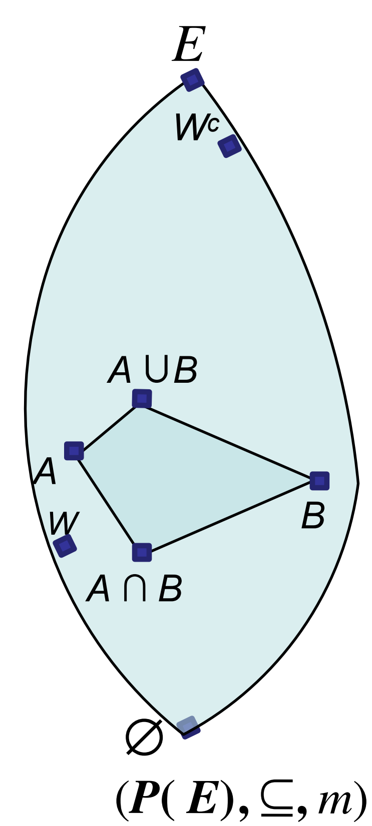
Para $W \in P(E)$ sea $\widehat{m}_W : P(E) \to \mathbb{R}^+$ definida mediante $\widehat{m}_W = \varphi_0 \circ m \circ \varphi_w = i \circ m \circ \varphi_w = m \circ \varphi_w$, es decir, tal que $\widehat{m}_W(A) = m(A \triangle W) = m((A \cap W^c) \cup (A^c \cap W))$ $\forall A \in P(E)$. Se verifica: $A \sqsubseteq^W B \Rightarrow \widehat{m}_W(A) \leq \widehat{m}_W(B)$.

Y además: $\widehat{m}_W(A \sqcap^W B) + \widehat{m}_W(A \sqcup^W B) = \widehat{m}_W(A \cap B) + \widehat{m}_W(A \cup B) = \widehat{m}_W(A) + \widehat{m}_W(B)$,

Más general: $\widehat{m}_W(A \sqcap^S B) + \widehat{m}_W(A \sqcup^S B) = \widehat{m}_W(A) + \widehat{m}_W(B)$ $\forall (W, S, A, B) \in P(E)^4$.

(* proposición en la siguiente transparencia)





ÓRDENES DE ACTIVIDAD EN ESPACIOS DE MEDIDA .

Medida en $(P(E), \sqsubseteq^W)$ obtenida a partir de otra en $(P(E), \subseteq)$

$A \subseteq B \Rightarrow m(A) \leq m(B)$

Sea $m: P(E) \to \mathbb{R}^+$ una medida en $(P(E), \subseteq)$.

Se verifica: $m(A \cap B) + m(A \cup B) = m(A) + m(B)$

Para $W \in P(E)$ sea $\hat{m}_W : P(E) \to \mathbb{R}^+$ definida mediante $\hat{m}_W = \varphi_0 \circ m \circ \varphi_w = i \circ m \circ \varphi_w = m \circ \varphi_w$, es decir, tal que $\hat{m}_W(A) = m(A \triangle W) = m((A \cap W^c) \cup (A^c \cap W))$ $\forall A \in P(E)$. Se verifica: $A \sqsubseteq^W B \Rightarrow \hat{m}_W(A) \leq \hat{m}_W(B)$.

Y además: $\hat{m}_W(A \sqcap^W B) + \hat{m}_W(A \sqcup^W B) = \hat{m}_W(A \cap B) + \hat{m}_W(A \cup B) = \hat{m}_W(A) + \hat{m}_W(B)$,

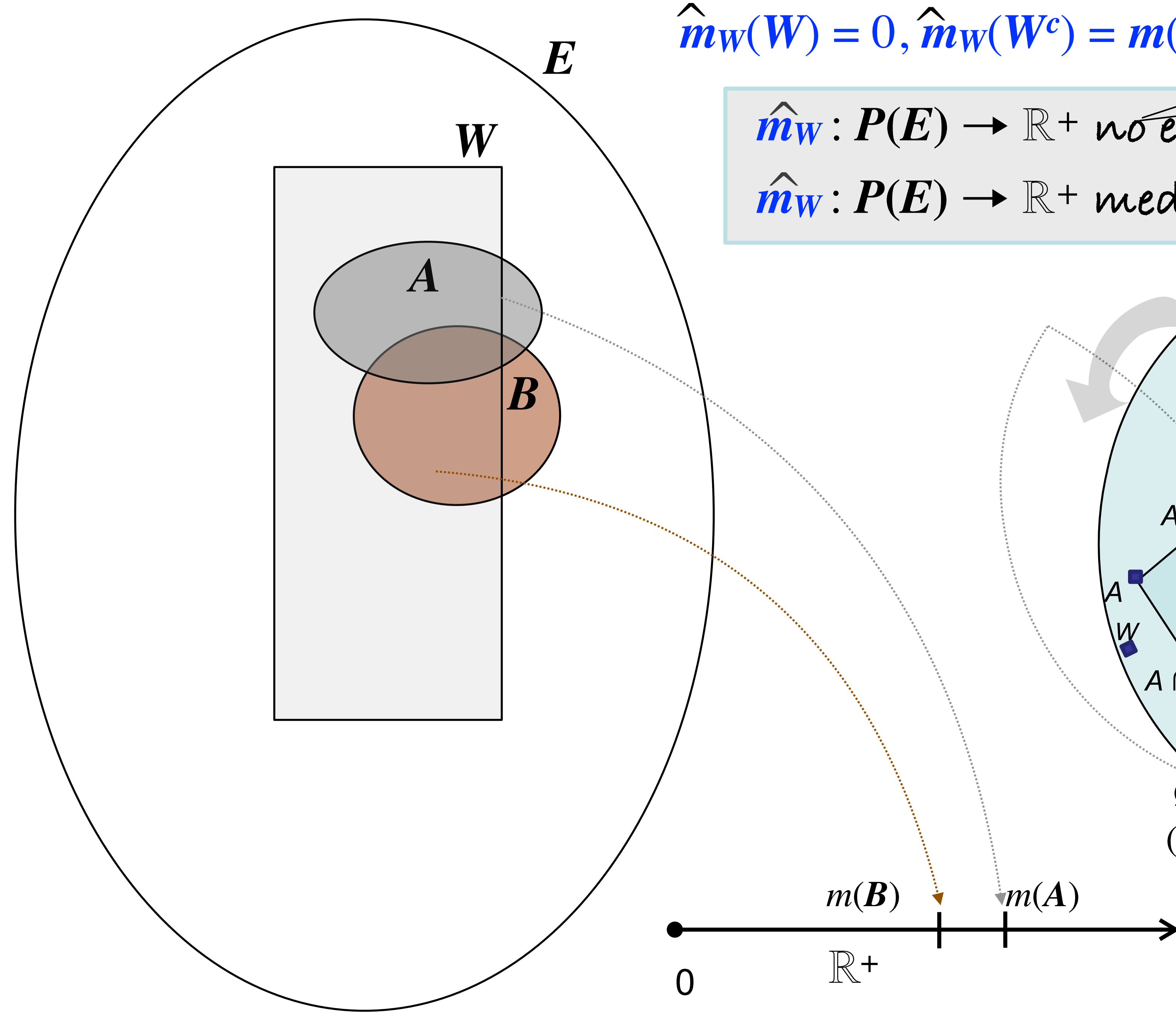
Más general: $\hat{m}_W(A \sqcap^S B) + \hat{m}_W(A \sqcup^S B) = \hat{m}_W(A) + \hat{m}_W(B)$ $\forall (W, S, A, B) \in P(E)^4$.

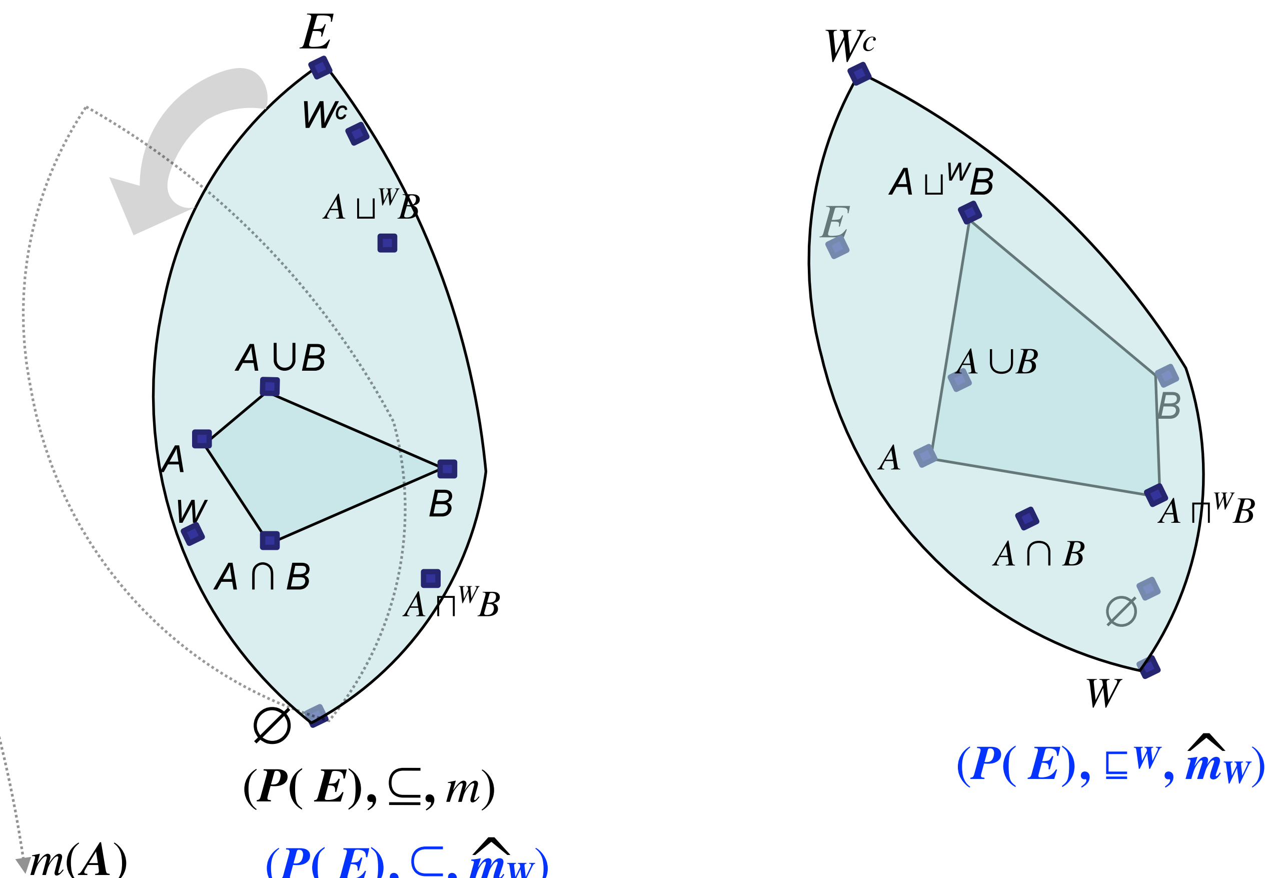
(* proposición en la siguiente transparencia)

$\hat{m}_W(W) = 0$, $\hat{m}_W(W^c) = m(E)$, $\hat{m}_W(\varnothing) = m(W)$, $\hat{m}_W(E) = m(W^c)$.

$\hat{m}_W : P(E) \to \mathbb{R}^+$ no es medida en $(P(E), \subseteq)$.

$\hat{m}_W : P(E) \to \mathbb{R}^+$ medida en el álgebra de Boole $(P(E), \sqsubseteq^W)$





ÓRDENES DE ACTIVIDAD EN ESPACIOS DE MEDIDA .

Medida en $(P(E), \sqsubseteq^W)$ obtenida a partir de otra en $(P(E), \subseteq)$ $\qquad A \subseteq B \Rightarrow m(A) \leq m(B)$

Sea $m: P(E) \to \mathbb{R}^+$ una medida en $(P(E), \subseteq)$. Se verifica: $m(A \cap B) + m(A \cup B) = m(A) + m(B)$

Para $W \in P(E)$ sea $\hat{m}_W : P(E) \to \mathbb{R}^+$ definida mediante $\hat{m}_W = \varphi_0 \circ m \circ \varphi_w = i \circ m \circ \varphi_w = m \circ \varphi_w$, es decir, tal que $\hat{m}_W(A) = m(A \triangle W) = m((A \cap W^c) \cup (A^c \cap W))$ $\forall A \in P(E)$. Se verifica: $A \sqsubseteq^W B \Rightarrow \hat{m}_W(A) \leq \hat{m}_W(B)$.

Y además: $\hat{m}_W(A \sqcap^W B) + \hat{m}_W(A \sqcup^W B) = \hat{m}_W(A \cap B) + \hat{m}_W(A \cup B) = \hat{m}_W(A) + \hat{m}_W(B)$,

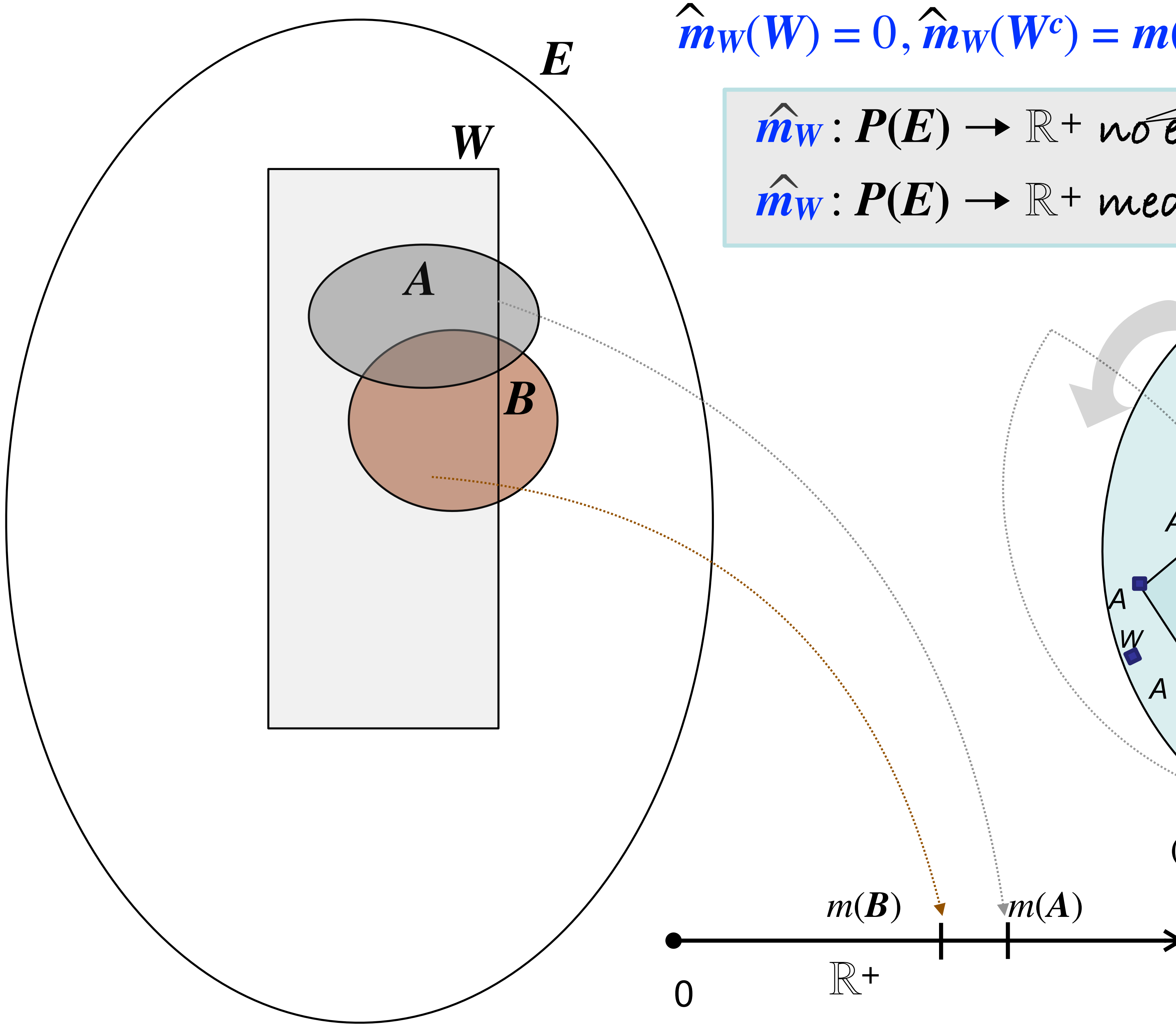
Más general: $\hat{m}_W(A \sqcap^S B) + \hat{m}_W(A \sqcup^S B) = \hat{m}_W(A) + \hat{m}_W(B)$ $\forall (W, S, A, B) \in P(E)^4$.

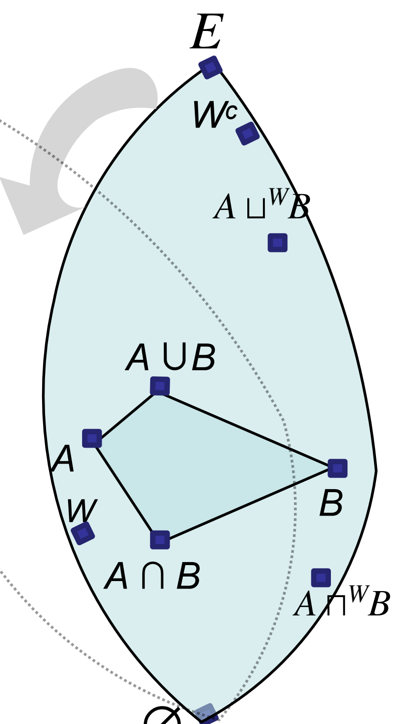
(* proposición en la siguiente transparencia)

$\hat{m}_W(W) = 0$, $\hat{m}_W(W^c) = m(E)$, $\hat{m}_W(\emptyset) = m(W)$, $\hat{m}_W(E) = m(W^c)$.

$\hat{m}_W : P(E) \to \mathbb{R}^+$ no es medida en $(P(E), \subseteq)$. ¿w-medida?

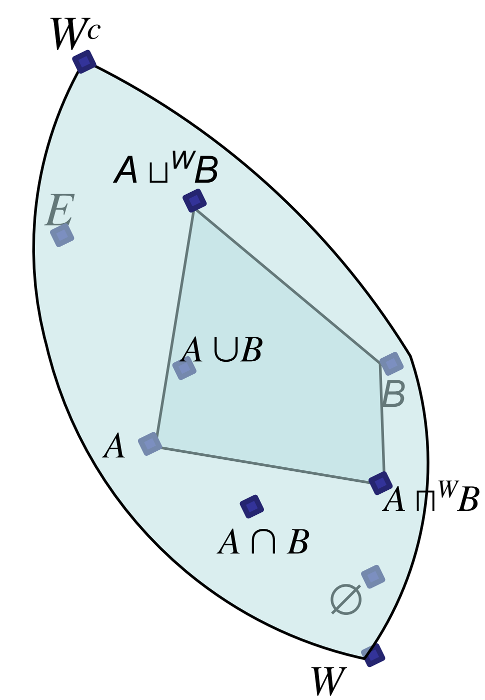
$\hat{m}_W : P(E) \to \mathbb{R}^+$ medida en el álgebra de Boole $(P(E), \sqsubseteq^W)$





$(P(E), \subseteq, m)$

$(P(E), \subseteq, \hat{m}_W)$



$(P(E), \sqsubseteq^W, \hat{m}_W)$

Proposición. Se verifica:

$$\widehat{m}_W(A \sqcap^S B) + \widehat{m}_W(A \sqcup^S B) = \widehat{m}_W(A) + \widehat{m}_W(B) \quad \forall (W, S, A, B) \in P(E)^4.$$

Proposición. Se verifica:

$$\widehat{m}_W(A \sqcap^S B) + \widehat{m}_W(A \sqcup^S B) = \widehat{m}_W(A) + \widehat{m}_W(B) \quad \forall (W, S, A, B) \in P(E)^4.$$

Demostración.

Proposición. Se verifica:

$$\widehat{m}_W(A\sqcap^S B) + \widehat{m}_W(A\sqcup^S B) = \widehat{m}_W(A) + \widehat{m}_W(B) \quad \forall (W,S,A,B) \in P(E)^4.$$

Demostración. $\widehat{m}_W(A\sqcup^S B) = \widehat{m}_W[(A\cap B) \cup (S^c\cap(A\cup B))] = m[((A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B)))\triangle W] =$

$m[(((A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B)))\cap W^c) \cup (((A^c\cup B^c)\cap(S\cup(A^c\cap B^c)))\cap W)] =$

$m[(((A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B))) \cap W^c)] + m[(((A^c\cup B^c)\cap(S\cup(A^c\cap B^c))) \cap W)] =$

$m[(A\cap B\cap W^c) \cup ((A\cup B)\cap S^c\cap W^c)] + m[((A^c\cup B^c)\cap S\cap W) \cup (A^c\cap B^c\cap W)] =$

$m[(A\cap B)\cap W^c] + m[(A\cup B)\cap S^c\cap W^c] - m(A\cap B\cap S^c\cap W^c) +$

$m[(A^c\cup B^c)\cap S\cap W] + m(A^c\cap B^c\cap W) - m(A^c\cap B^c\cap S\cap W)$.

Proposición. Se verifica:

$$\widehat{m}_W(A \sqcap^S B) + \widehat{m}_W(A \sqcup^S B) = \widehat{m}_W(A) + \widehat{m}_W(B) \quad \forall (W, S, A, B) \in P(E)^4.$$

Demostración.

$$\widehat{m}_W(A \sqcup^S B) = \widehat{m}_W[(A\cap B) \cup (S^c \cap (A\cup B))] = m[((A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B)))\triangle W] =$$
$$m[(((A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B)))\cap W^c) \cup (((A^c\cup B^c)\cap(S\cup(A^c\cap B^c)))\cap W)] =$$
$$m[(((A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B))) \cap W^c)] + m[(((A^c\cup B^c)\cap(S\cup(A^c\cap B^c))) \cap W)] =$$
$$m[(A\cap B\cap W^c) \cup ((A\cup B)\cap S^c\cap W^c)] + m[((A^c\cup B^c)\cap S\cap W) \cup (A^c\cap B^c\cap W)] =$$
$$m[(A\cap B)\cap W^c] + m[(A\cup B)\cap S^c\cap W^c] - m(A\cap B\cap S^c\cap W^c) +$$
$$m[(A^c\cup B^c)\cap S\cap W] + m(A^c\cap B^c\cap W) - m(A^c\cap B^c\cap S\cap W) .$$

$$\widehat{m}_W(A \sqcap^S B) = \widehat{m}_W[(A\cap B) \cup (S\cap(A\cup B))] = m[((A\cap B)\cup(S\cap(A\cup B)))\triangle W] =$$
$$m[(((A\cap B)\cup(S\cap(A\cup B))) \cap W^c) \cup (((A^c\cup B^c)\cap(S^c\cup(A^c\cap B^c))) \cap W)] =$$
$$m[(((A\cap B)\cup(S\cap(A\cup B))) \cap W^c)] + m[(((A^c\cup B^c)\cap(S^c\cup(A^c\cap B^c))) \cap W)] =$$
$$m[(A\cap B\cap W^c) \cup ((A\cup B)\cap S\cap W^c)] + m[((A^c\cup B^c)\cap S^c\cap W) \cup (A^c\cap B^c\cap W)] =$$
$$m(A\cap B\cap W^c) + m[(A\cup B)\cap S\cap W^c] - m(A\cap B\cap S\cap W^c) +$$
$$m[(A^c\cup B^c)\cap S^c\cap W] + m(A^c\cap B^c\cap W) - m(A^c\cap B^c\cap S^c\cap W) .$$

<u>Proposición</u>. Se verifica:

$$\widehat{m}_W(A\sqcap^S B) + \widehat{m}_W(A\sqcup^S B) = \widehat{m}_W(A) + \widehat{m}_W(B) \quad \forall (W, S, A, B) \in P(E)^4.$$

<u>Demostración</u>. $\widehat{m}_W(A\sqcup^S B) = \widehat{m}_W[(A\cap B) \cup (S^c\cap(A\cup B))] = m[((A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B)))\triangle W] =$

$m[(((A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B)))\cap W^c) \cup (((A^c\cup B^c)\cap(S\cup(A^c\cap B^c)))\cap W)] =$

$m[(((A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B))) \cap W^c)] + m[(((A^c\cup B^c)\cap(S\cup(A^c\cap B^c))) \cap W)] =$

$m[(A\cap B\cap W^c) \cup ((A\cup B)\cap S^c\cap W^c)] + m[((A^c\cup B^c)\cap S\cap W) \cup (A^c\cap B^c\cap W)] =$

$m[(A\cap B)\cap W^c] + m[(A\cup B)\cap S^c\cap W^c] - m(A\cap B\cap S^c\cap W^c) +$

$m[(A^c\cup B^c)\cap S\cap W] + m(A^c\cap B^c\cap W) - m(A^c\cap B^c\cap S\cap W)$.

$\widehat{m}_W(A\sqcap^S B) = \widehat{m}_W[(A\cap B) \cup (S\cap(A\cup B))] = m[((A\cap B)\cup(S\cap(A\cup B)))\triangle W] =$

$m[(((A\cap B)\cup(S\cap(A\cup B))) \cap W^c) \cup (((A^c\cup B^c)\cap(S^c\cup(A^c\cap B^c))) \cap W)] =$

$m[(((A\cap B)\cup(S\cap(A\cup B))) \cap W^c)] + m[(((A^c\cup B^c)\cap(S^c\cup(A^c\cap B^c))) \cap W)] =$

$m[(A\cap B\cap W^c) \cup ((A\cup B)\cap S\cap W^c)] + m[((A^c\cup B^c)\cap S^c\cap W) \cup (A^c\cap B^c\cap W)] =$

$m(A\cap B\cap W^c) + m[(A\cup B)\cap S\cap W^c] - m(A\cap B\cap S\cap W^c) +$

$m[(A^c\cup B^c)\cap S^c\cap W] + m(A^c\cap B^c\cap W) - m(A^c\cap B^c\cap S^c\cap W)$.

Luego,

$\widehat{m}_W(A \sqcap^S B) + \widehat{m}_W(A\sqcup^S B) = 2\cdot m(A\cap B\cap W^c) + m[(A\cup B)\cap W^c] - m(A\cap B)\cap W^c) +$

$2\cdot m(A^c\cap B^c\cap W) + m[(A^c\cup B^c)\cap W] - m(A^c\cap B^c\cap W)$

Proposición. Se verifica:

$$\hat{m}_W(A \sqcap^S B) + \hat{m}_W(A \sqcup^S B) = \hat{m}_W(A) + \hat{m}_W(B) \quad \forall (W, S, A, B) \in P(E)^4.$$

Demostración.

$$\hat{m}_W(A \sqcup^S B) = \hat{m}_W[(A \cap B) \cup (S^c \cap (A \cup B))] = m[((A \cap B) \cup (S^c \cap (A \cup B))) \triangle W] =$$
$$m[(((A \cap B) \cup (S^c \cap (A \cup B))) \cap W^c) \cup (((A^c \cup B^c) \cap (S \cup (A^c \cap B^c))) \cap W)] =$$
$$m[(((A \cap B) \cup (S^c \cap (A \cup B))) \cap W^c)] + m[(((A^c \cup B^c) \cap (S \cup (A^c \cap B^c))) \cap W)] =$$
$$m[(A \cap B \cap W^c) \cup ((A \cup B) \cap S^c \cap W^c)] + m[((A^c \cup B^c) \cap S \cap W) \cup (A^c \cap B^c \cap W)] =$$
$$m[(A \cap B) \cap W^c] + m[(A \cup B) \cap S^c \cap W^c] - m(A \cap B \cap S^c \cap W^c) +$$
$$m[(A^c \cup B^c) \cap S \cap W] + m(A^c \cap B^c \cap W) - m(A^c \cap B^c \cap S \cap W) .$$

$$\hat{m}_W(A \sqcap^S B) = \hat{m}_W[(A \cap B) \cup (S \cap (A \cup B))] = m[((A \cap B) \cup (S \cap (A \cup B))) \triangle W] =$$
$$m[(((A \cap B) \cup (S \cap (A \cup B))) \cap W^c) \cup (((A^c \cup B^c) \cap (S^c \cup (A^c \cap B^c))) \cap W)] =$$
$$m[(((A \cap B) \cup (S \cap (A \cup B))) \cap W^c)] + m[(((A^c \cup B^c) \cap (S^c \cup (A^c \cap B^c))) \cap W)] =$$
$$m[(A \cap B \cap W^c) \cup ((A \cup B) \cap S \cap W^c)] + m[((A^c \cup B^c) \cap S^c \cap W) \cup (A^c \cap B^c \cap W)] =$$
$$m(A \cap B \cap W^c) + m[(A \cup B) \cap S \cap W^c] - m(A \cap B \cap S \cap W^c) +$$
$$m[(A^c \cup B^c) \cap S^c \cap W] + m(A^c \cap B^c \cap W) - m(A^c \cap B^c \cap S^c \cap W) .$$

Luego,

$$\hat{m}_W(A \sqcap^S B) + \hat{m}_W(A \sqcup^S B) = 2 \cdot m(A \cap B \cap W^c) + m[(A \cup B) \cap W^c] - m(A \cap B) \cap W^c) +$$
$$2 \cdot m(A^c \cap B^c \cap W) + m[(A^c \cup B^c) \cap W] - m(A^c \cap B^c \cap W)$$

Proposición. Se verifica:

$$\hat{m}_W(A\sqcap^S B) + \hat{m}_W(A\sqcup^S B) = \hat{m}_W(A) + \hat{m}_W(B) \quad \forall (W, S, A, B) \in P(E)^4.$$

Demostración.

$$\hat{m}_W(A\sqcup^S B) = \hat{m}_W[(A\cap B) \cup (S^c\cap(A\cup B))] = m[((A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B)))\triangle W] =$$
$$m[(((A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B)))\cap W^c) \cup (((A^c\cup B^c)\cap(S\cup(A^c\cap B^c)))\cap W)] =$$
$$m[(((A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B))) \cap W^c)] + m[(((A^c\cup B^c)\cap(S\cup(A^c\cap B^c))) \cap W)] =$$
$$m[(A\cap B\cap W^c) \cup ((A\cup B)\cap S^c\cap W^c)] + m[((A^c\cup B^c)\cap S\cap W) \cup (A^c\cap B^c\cap W)] =$$
$$\underline{m[(A\cap B)\cap W^c]} + \underline{m[(A\cup B)\cap S^c\cap W^c]} - \underline{m(A\cap B\cap S^c\cap W^c)} +$$
$$\underline{m[(A^c\cup B^c)\cap S\cap W]} + \underline{m(A^c\cap B^c\cap W)} - \underline{m(A^c\cap B^c\cap S\cap W)}\ .$$

$$\hat{m}_W(A\sqcap^S B) = \hat{m}_W[(A\cap B) \cup (S\cap(A\cup B))] = m[((A\cap B)\cup(S\cap(A\cup B)))\triangle W] =$$
$$m[(((A\cap B)\cup(S\cap(A\cup B))) \cap W^c) \cup (((A^c\cup B^c)\cap(S^c\cup(A^c\cap B^c))) \cap W)] =$$
$$m[(((A\cap B)\cup(S\cap(A\cup B))) \cap W^c)] + m[(((A^c\cup B^c)\cap(S^c\cup(A^c\cap B^c))) \cap W)] =$$
$$m[(A\cap B\cap W^c) \cup ((A\cup B)\cap S\cap W^c)] + m[((A^c\cup B^c)\cap S^c\cap W) \cup (A^c\cap B^c\cap W)] =$$
$$\underline{m(A\cap B\cap W^c)} + \underline{m[(A\cup B)\cap S\cap W^c]} - \underline{m(A\cap B\cap S\cap W^c)} +$$
$$\underline{m[(A^c\cup B^c)\cap S^c\cap W]} + \underline{m(A^c\cap B^c\cap W)} - \underline{m(A^c\cap B^c\cap S^c\cap W)}\ .$$

Luego,

$$\hat{m}_W(A \sqcap^S B) + \hat{m}_W(A\sqcup^S B) = \cancel{2}\cdot\ \underline{m(A\cap B\cap W^c)} + \underline{m[(A\cup B)\cap W^c]} - \underline{\cancel{m(A\cap B)\cap W^c)}} +$$
$$\cancel{2}\cdot\ \underline{m(A^c\cap B^c\cap W)} + \underline{m[(A^c\cup B^c)\cap W]} - \underline{\cancel{m(A^c\cap B^c\cap W)}}$$

<u>Proposición</u>. Se verifica:

$$\widehat{m}_W(A \sqcap^S B) + \widehat{m}_W(A \sqcup^S B) = \widehat{m}_W(A) + \widehat{m}_W(B) \quad \forall (W, S, A, B) \in P(E)^4.$$

<u>Demostración</u>.

$$\widehat{m}_W(A \sqcup^S B) = \widehat{m}_W[(A\cap B) \cup (S^c\cap(A\cup B))] = m[((A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B)))\triangle W] =$$

$$m[(((A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B)))\cap W^c) \cup (((A^c\cup B^c)\cap(S\cup(A^c\cap B^c)))\cap W)] =$$

$$m[(((A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B))) \cap W^c)] + m[(((A^c\cup B^c)\cap(S\cup(A^c\cap B^c))) \cap W)] =$$

$$m[(A\cap B\cap W^c) \cup ((A\cup B)\cap S^c\cap W^c)] + m[((A^c\cup B^c)\cap S\cap W) \cup (A^c\cap B^c\cap W)] =$$

$$m[(A\cap B)\cap W^c] + m[(A\cup B)\cap S^c\cap W^c] - m(A\cap B\cap S^c\cap W^c) +$$

$$m[(A^c\cup B^c)\cap S\cap W] + m(A^c\cap B^c\cap W) - m(A^c\cap B^c\cap S\cap W) .$$

$$\widehat{m}_W(A \sqcap^S B) = \widehat{m}_W[(A\cap B) \cup (S\cap(A\cup B))] = m[((A\cap B)\cup(S\cap(A\cup B)))\triangle W] =$$

$$m[(((A\cap B)\cup(S\cap(A\cup B))) \cap W^c) \cup (((A^c\cup B^c)\cap(S^c\cup(A^c\cap B^c))) \cap W)] =$$

$$m[(((A\cap B)\cup(S\cap(A\cup B))) \cap W^c)] + m[(((A^c\cup B^c)\cap(S^c\cup(A^c\cap B^c))) \cap W)] =$$

$$m[(A\cap B\cap W^c) \cup ((A\cup B)\cap S\cap W^c)] + m[((A^c\cup B^c)\cap S^c\cap W) \cup (A^c\cap B^c\cap W)] =$$

$$m(A\cap B\cap W^c) + m[(A\cup B)\cap S\cap W^c] - m(A\cap B\cap S\cap W^c) +$$

$$m[(A^c\cup B^c)\cap S^c\cap W] + m(A^c\cap B^c\cap W) - m(A^c\cap B^c\cap S^c\cap W) .$$

Luego,

$$\widehat{m}_W(A \sqcap^S B) + \widehat{m}_W(A \sqcup^S B) = \cancel{2}\cdot m(A\cap B\cap W^c) + m[(A\cup B)\cap W^c] - m(A\cap \cancel{B})\cap W^c) +$$

$$\cancel{2}\cdot m(A^c\cap B^c\cap W) + m[(A^c\cup B^c)\cap W] - m(A^c\cancel{\cap} B^c\cap W) \quad = \quad m(A\cap B\cap W^c) +$$

$$m(A\cap W^c) + m(B\cap W^c) - m(A\cap B\cap W^c) + m(A^c\cap B^c\cap W) + m(A^c\cap W) + m(B^c\cap W) - m(A^c\cap B^c\cap W)$$

<u>Proposición</u>. Se verifica:

$$\widehat{m}_W(A\sqcap^S B) + \widehat{m}_W(A\sqcup^S B) = \widehat{m}_W(A) + \widehat{m}_W(B) \quad \forall (W,S,A,B) \in P(E)^4.$$

<u>Demostración</u>.

$$\widehat{m}_W(A\sqcup^S B) = \widehat{m}_W[(A\cap B) \cup (S^c\cap(A\cup B))] = m[((A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B)))\triangle W] =$$
$$m[(((A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B)))\cap W^c) \cup (((A^c\cup B^c)\cap(S\cup(A^c\cap B^c)))\cap W)] =$$
$$m[(((A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B))) \cap W^c)] + m[(((A^c\cup B^c)\cap(S\cup(A^c\cap B^c))) \cap W)] =$$
$$m[(A\cap B\cap W^c) \cup ((A\cup B)\cap S^c\cap W^c)] + m[((A^c\cup B^c)\cap S\cap W) \cup (A^c\cap B^c\cap W)] =$$
$$m[(A\cap B)\cap W^c] + m[(A\cup B)\cap S^c\cap W^c] - m(A\cap B\cap S^c\cap W^c) +$$
$$m[(A^c\cup B^c)\cap S\cap W] + m(A^c\cap B^c\cap W) - m(A^c\cap B^c\cap S\cap W) .$$

$$\widehat{m}_W(A\sqcap^S B) = \widehat{m}_W[(A\cap B) \cup (S\cap(A\cup B))] = m[((A\cap B)\cup(S\cap(A\cup B)))\triangle W] =$$
$$m[(((A\cap B)\cup(S\cap(A\cup B))) \cap W^c) \cup (((A^c\cup B^c)\cap(S^c\cup(A^c\cap B^c))) \cap W)] =$$
$$m[(((A\cap B)\cup(S\cap(A\cup B))) \cap W^c)] + m[(((A^c\cup B^c)\cap(S^c\cup(A^c\cap B^c))) \cap W)] =$$
$$m[(A\cap B\cap W^c) \cup ((A\cup B)\cap S\cap W^c)] + m[((A^c\cup B^c)\cap S^c\cap W) \cup (A^c\cap B^c\cap W)] =$$
$$m(A\cap B\cap W^c) + m[(A\cup B)\cap S\cap W^c] - m(A\cap B\cap S\cap W^c) +$$
$$m[(A^c\cup B^c)\cap S^c\cap W] + m(A^c\cap B^c\cap W) - m(A^c\cap B^c\cap S^c\cap W) .$$

Luego,

$$\widehat{m}_W(A \sqcap^S B) + \widehat{m}_W(A\sqcup^S B) = \cancel{2}\cdot m(A\cap B\cap W^c) + m[(A\cup B)\cap W^c] \cancel{-m(A\cap B)\cap W^c)} +$$
$$\cancel{2}\cdot m(A^c\cap B^c\cap W) + m[(A^c\cup B^c)\cap W] \cancel{-m(A^c\cap B^c\cap W)} \quad = \cancel{m(A\cap B\cap W^c)} +$$
$$m(A\cap W^c) + m(B\cap W^c) \cancel{-m(A\cap B\cap W^c)} + \cancel{m(A^c\cap B^c\cap W)} + m(A^c\cap W) + m(B^c\cap W) \cancel{-m(A^c\cap B^c\cap W)}$$

<u>Proposición</u>. Se verifica:

$$\hat{m}_W(A \sqcap^S B) + \hat{m}_W(A \sqcup^S B) = \hat{m}_W(A) + \hat{m}_W(B) \quad \forall (W, S, A, B) \in P(E)^4.$$

<u>Demostración</u>. $\hat{m}_W(A \sqcup^S B) = \hat{m}_W[(A\cap B) \cup (S^c \cap (A \cup B))] = m[((A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B)))\triangle W] =$

$m[(((A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B)))\cap W^c) \cup (((A^c\cup B^c)\cap(S\cup(A^c\cap B^c)))\cap W)] =$

$m[(((A\cap B)\cup(S^c\cap(A\cup B))) \cap W^c)] + m[(((A^c\cup B^c)\cap(S\cup(A^c\cap B^c))) \cap W)] =$

$m[(A\cap B\cap W^c) \cup ((A\cup B)\cap S^c\cap W^c)] + m[((A^c\cup B^c)\cap S\cap W) \cup (A^c\cap B^c\cap W)] =$

$m[(A\cap B)\cap W^c] + m[(A\cup B)\cap S^c\cap W^c] - m(A\cap B\cap S^c\cap W^c) +$

$m[(A^c\cup B^c)\cap S\cap W] + m(A^c\cap B^c\cap W) - m(A^c\cap B^c\cap S\cap W)$.

$\hat{m}_W(A \sqcap^S B) = \hat{m}_W[(A\cap B) \cup (S \cap (A \cup B))] = m[((A\cap B)\cup(S\cap(A\cup B)))\triangle W] =$

$m[(((A\cap B)\cup(S\cap(A\cup B))) \cap W^c) \cup (((A^c\cup B^c)\cap(S^c\cup(A^c\cap B^c))) \cap W)] =$

$m[(((A\cap B)\cup(S\cap(A\cup B))) \cap W^c)] + m[(((A^c\cup B^c)\cap(S^c\cup(A^c\cap B^c))) \cap W)] =$

$m[(A\cap B\cap W^c) \cup ((A\cup B)\cap S\cap W^c)] + m[((A^c\cup B^c)\cap S^c\cap W) \cup (A^c\cap B^c\cap W)] =$

$m(A\cap B\cap W^c) + m[(A\cup B)\cap S\cap W^c] - m(A\cap B\cap S\cap W^c) +$

$m[(A^c\cup B^c)\cap S^c\cap W] + m(A^c\cap B^c\cap W) - m(A^c\cap B^c\cap S^c\cap W)$.

Luego,

$\hat{m}_W(A \sqcap^S B) + \hat{m}_W(A \sqcup^S B) = \cancel{2}\cdot\, m(A\cap B\cap W^c) + m[(A\cup B)\cap W^c] \cancel{-m(A\cap B)\cap W^c)} +$

$\cancel{2}\cdot\, m(A^c\cap B^c\cap W) + m[(A^c\cup B^c)\cap W] \cancel{-m(A^c\cap B^c\cap W)} \;=\; \cancel{m(A\cap B\cap W^c)} +$

$m(A\cap W^c) + m(B\cap W^c) \cancel{-m(A\cap B\cap W^c)} + \cancel{m(A^c\cap B^c\cap W)} + m(A^c\cap W) + m(B^c\cap W) \cancel{-m(A^c\cap B^c\cap W)} =$

$m[(A\cap W^c)\cup(A^c\cap W)] + m[(B\cap W^c)\cup(B^c\cap W)] = m(A\triangle W) + m(B\triangle W) = \hat{m}_W(A) + \hat{m}_W(B).$ ∎

Ejemplos: Órdenes de actividad y probabilidad

Subconjuntos w-disjuntos

Si A y B son w-disjuntos:

$A\sqcap^{w}B=(A\cap B)\cup[W\cap(A\cup B)]=W,$

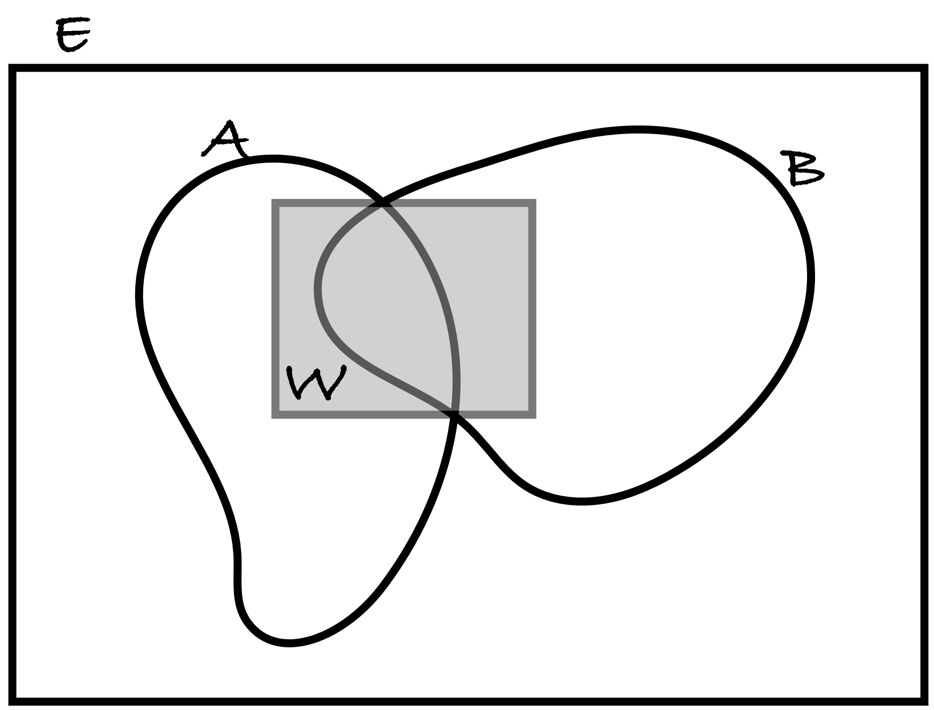
$(A\cap B)\subseteq W\subseteq(A\cup B),$

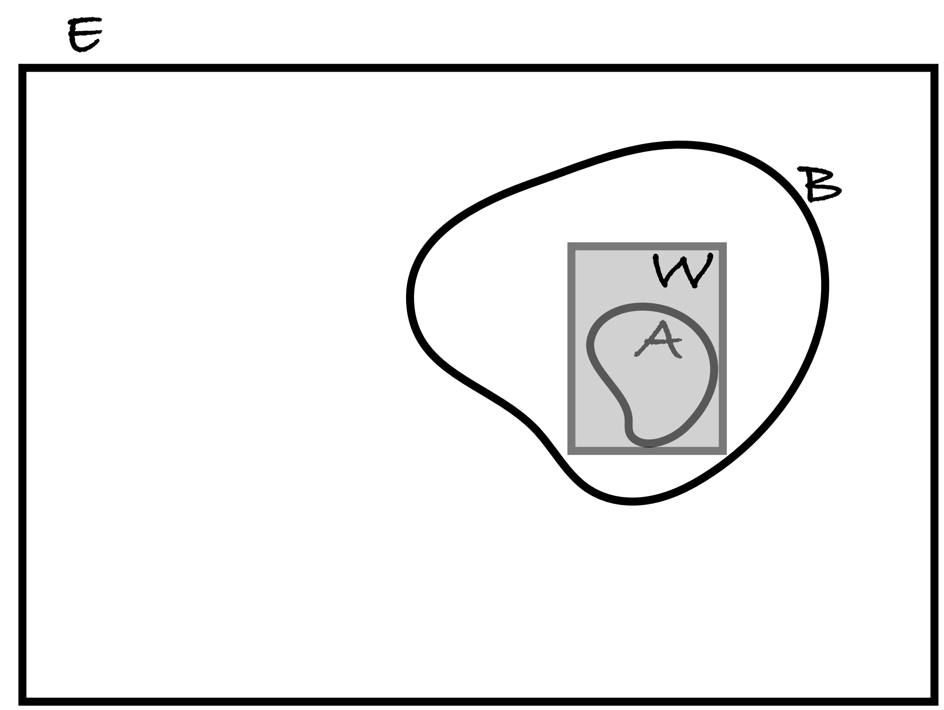
$W\sqsubseteq^{B}A \ , \ W\sqsubseteq^{A}B$

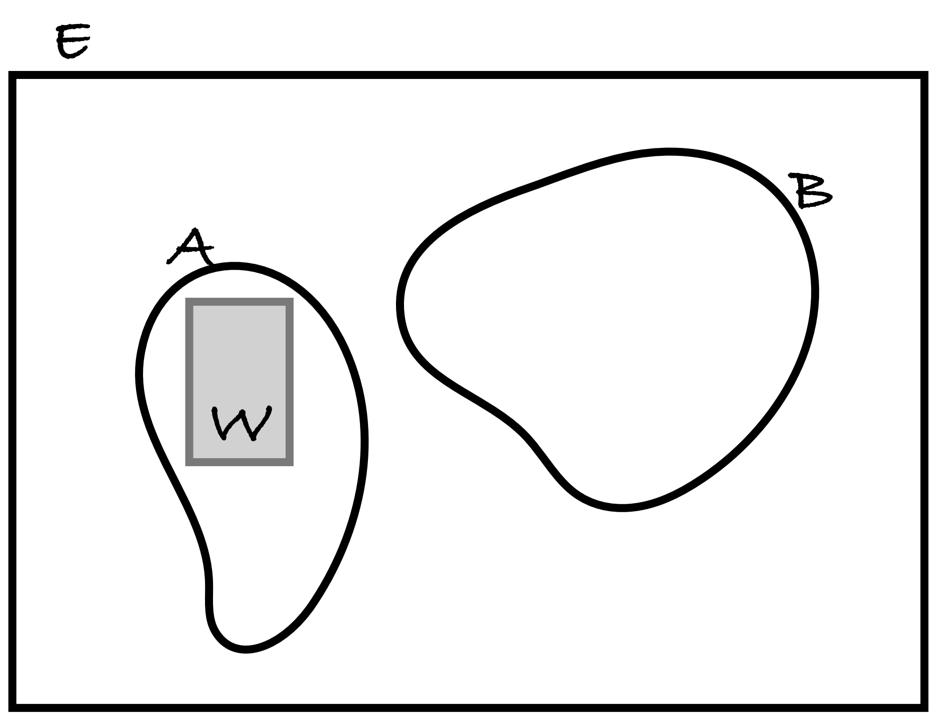
<u>Definición</u>. A y B w-disjuntos si y solo si:

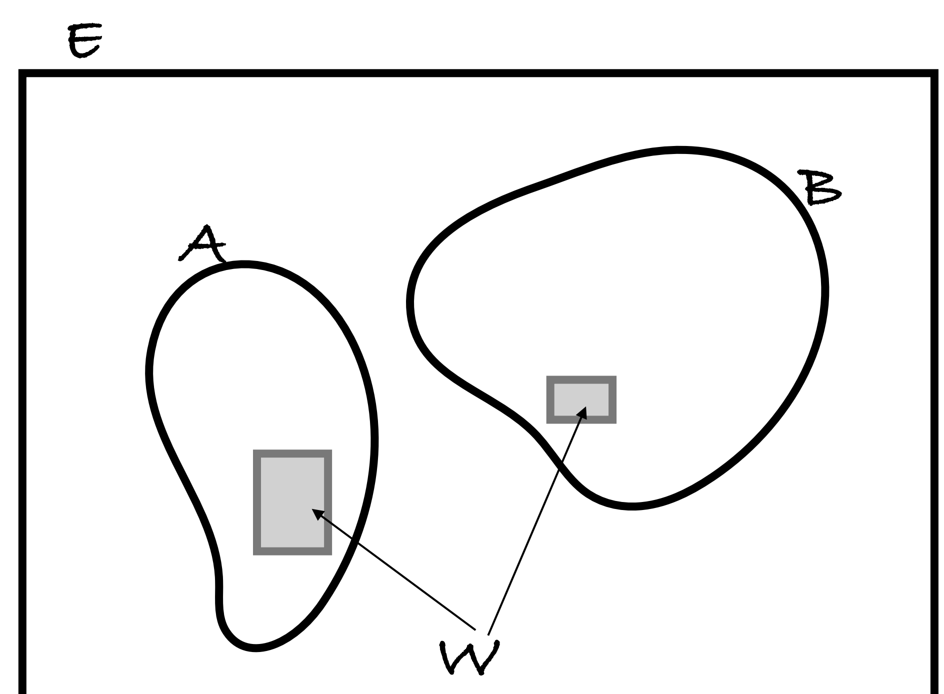
$$A\sqcap^{w}B=W$$

Ejemplos:









Definición. A y B w-disjuntos si y solo si:

$$A \sqcap^{w} B = W$$

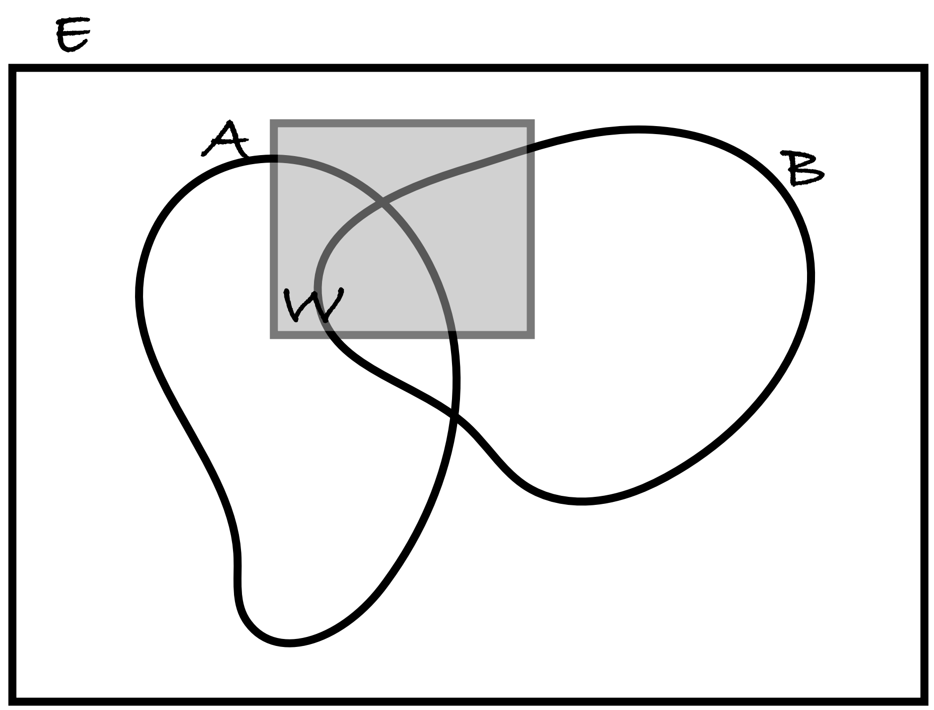
Si A y B son w-disjuntos:

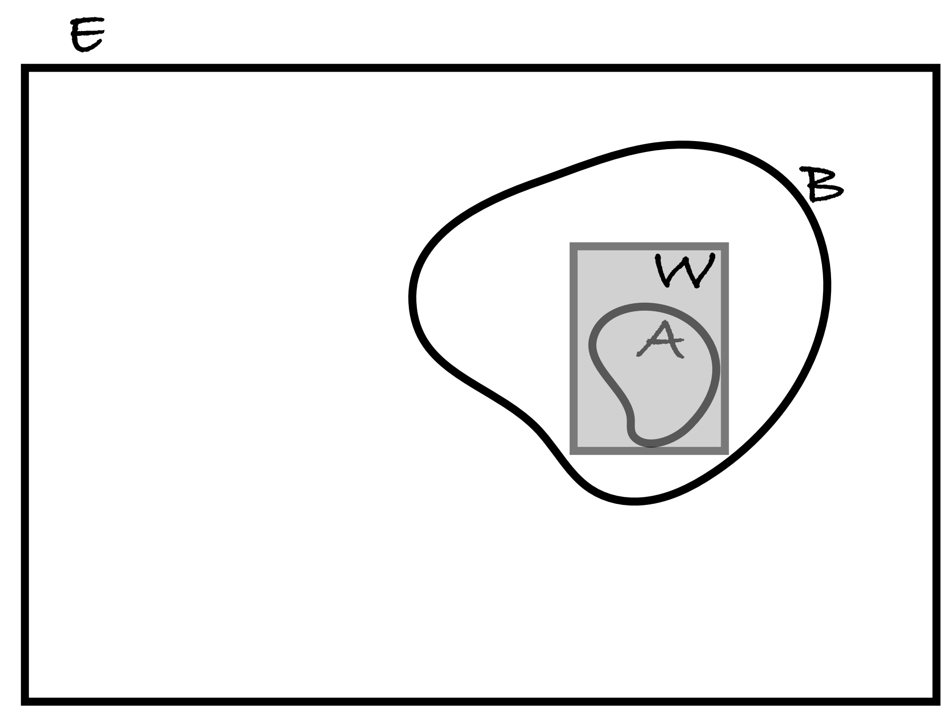
$A \sqcap^{w} B = (A \cap B) \cup [W \cap (A \cup B)] = W,$

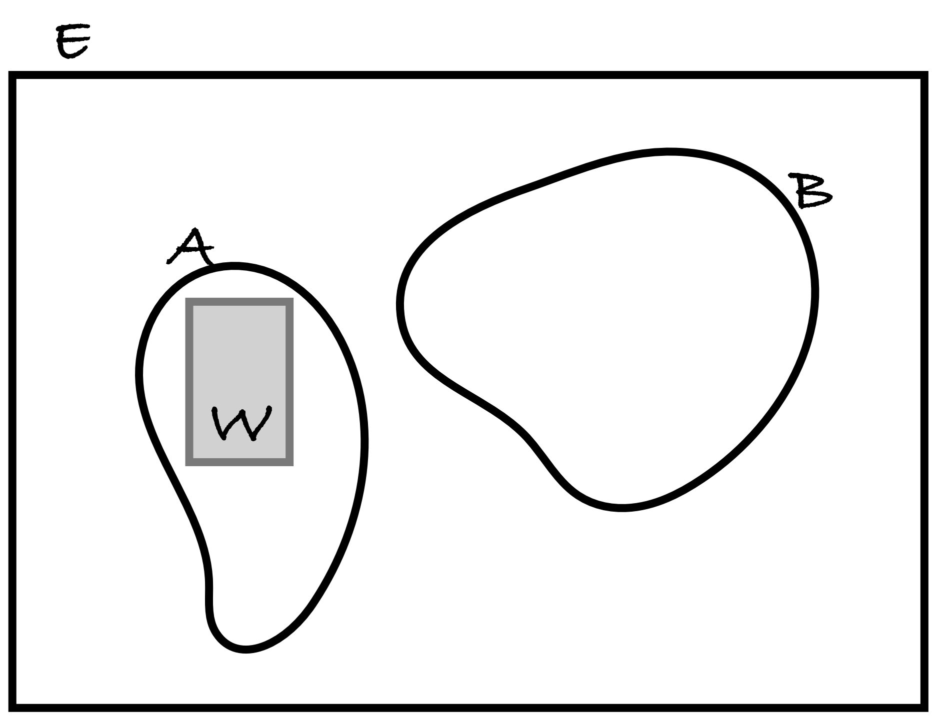
$(A \cap B) \subseteq W \subseteq (A \cup B),$

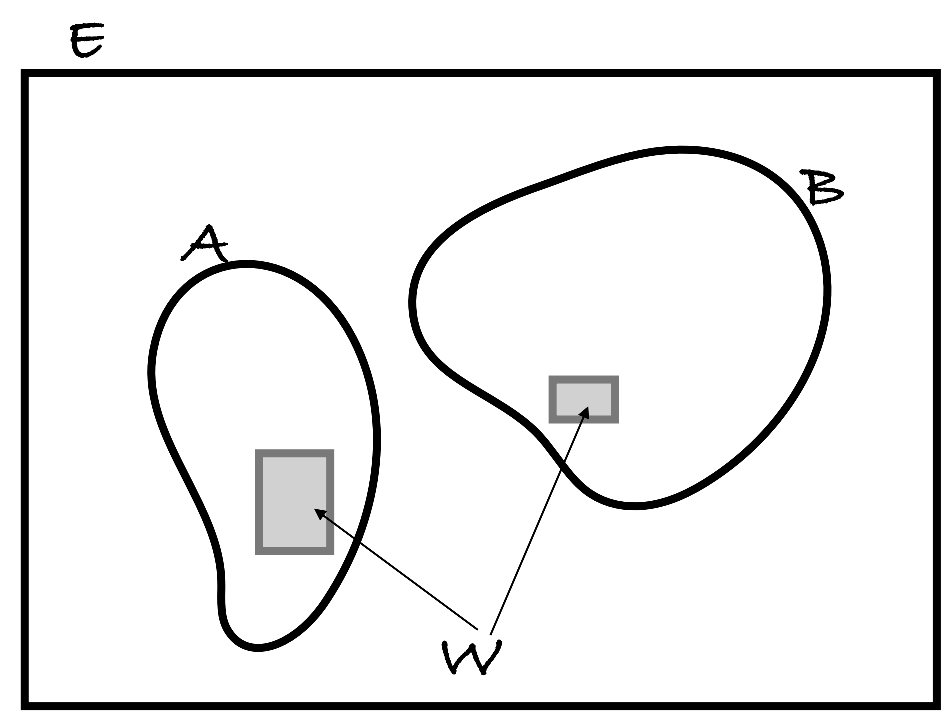
$W \sqsubseteq^{B} A$, $W \sqsubseteq^{A} B$

Contra-Ejemplos:









~~**Definición**. A y B w-disjuntos si y solo si:~~

~~$A \sqcap^{w} B = W$~~

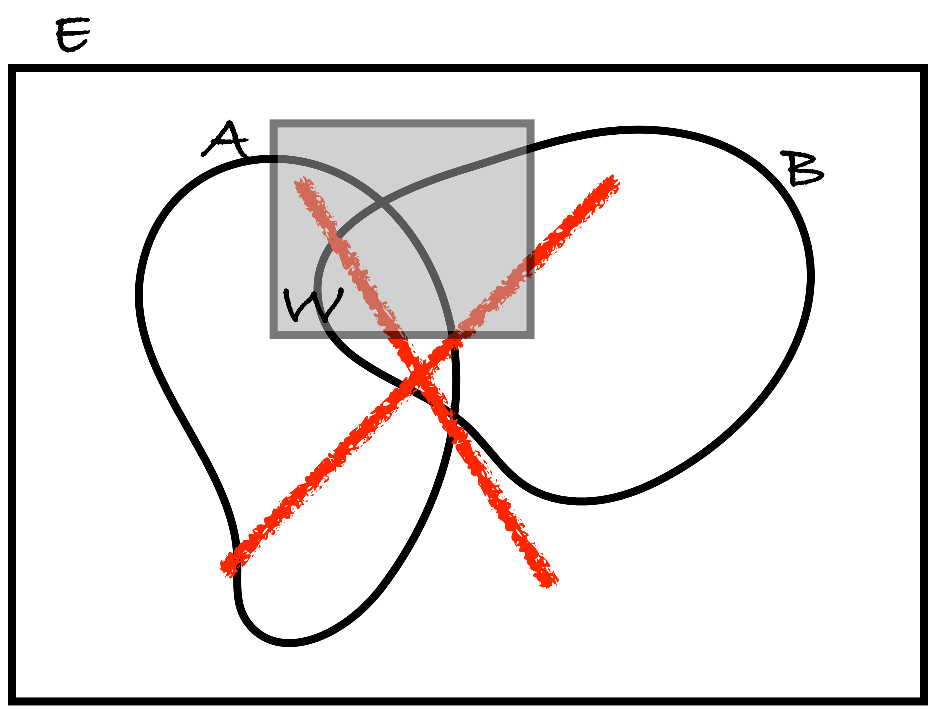
Si A y B son w-disjuntos:

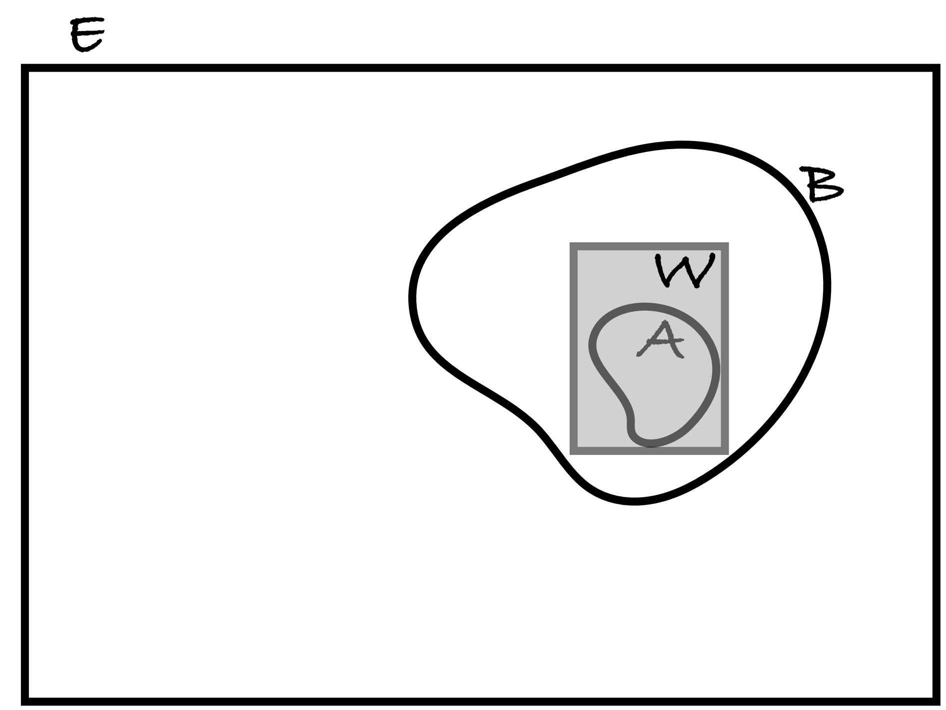
$A \sqcap^{w} B = (A \cap B) \cup [W \cap (A \cup B)] = W,$

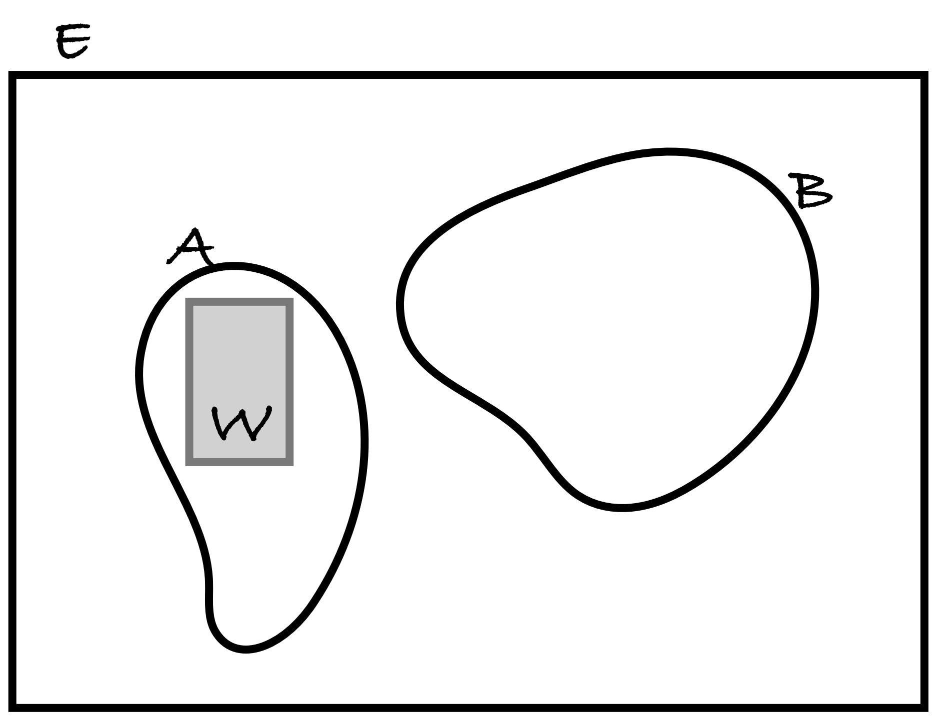
$(A \cap B) \subseteq W \subseteq (A \cup B),$

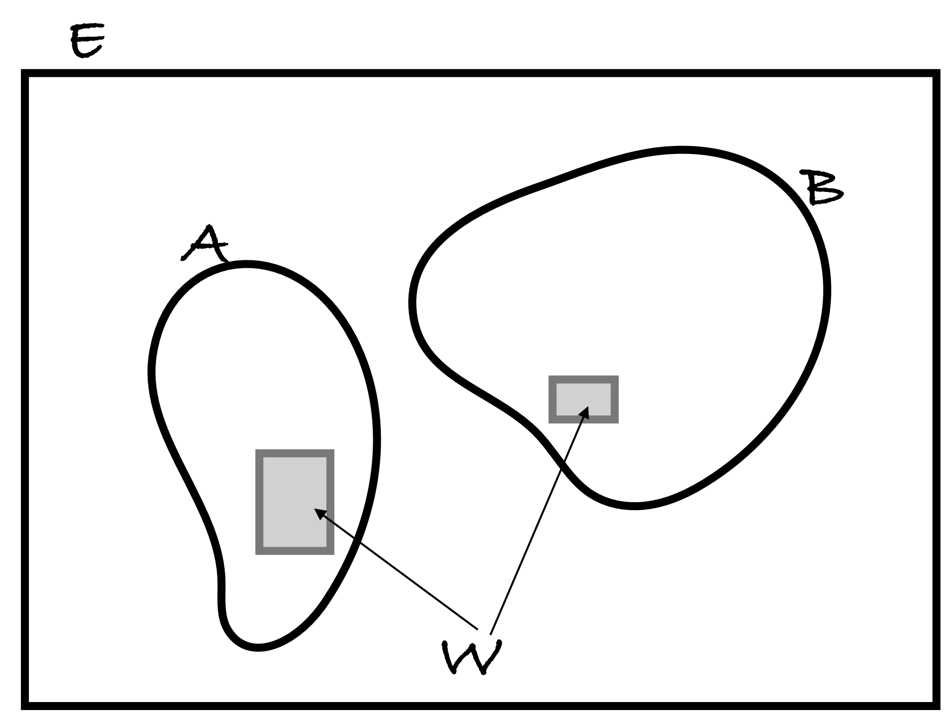
$W \sqsubseteq^{B} A \ , \ W \sqsubseteq^{A} B$

Contra-Ejemplos:









~~**Definición**. A y B w-disjuntos si y solo si:~~

$$\cancel{A \sqcap^{W} B = W}$$

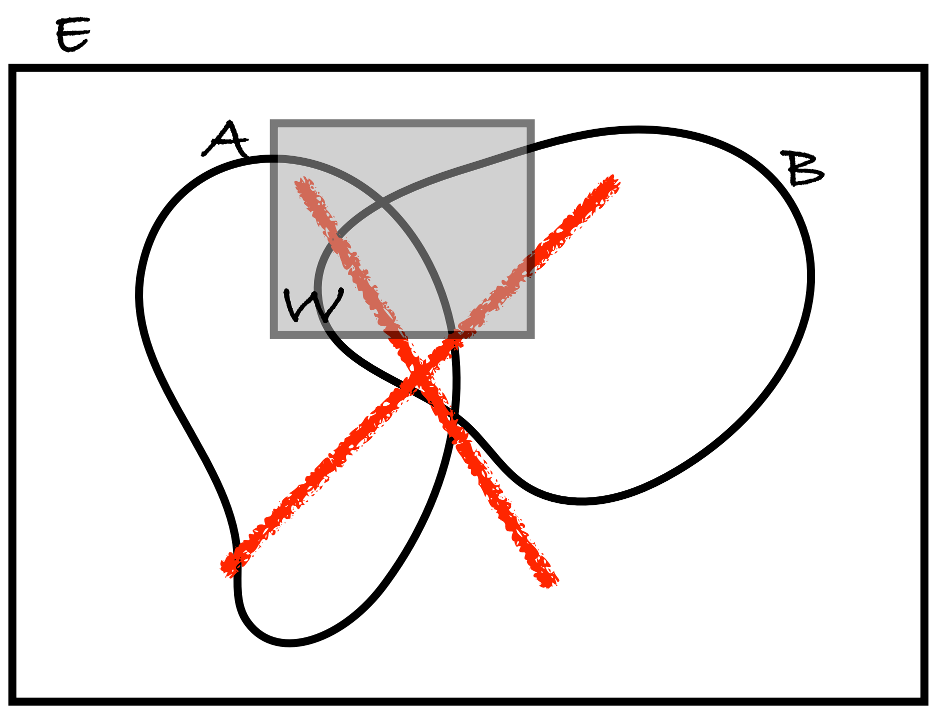
Si A y B son w-disjuntos:

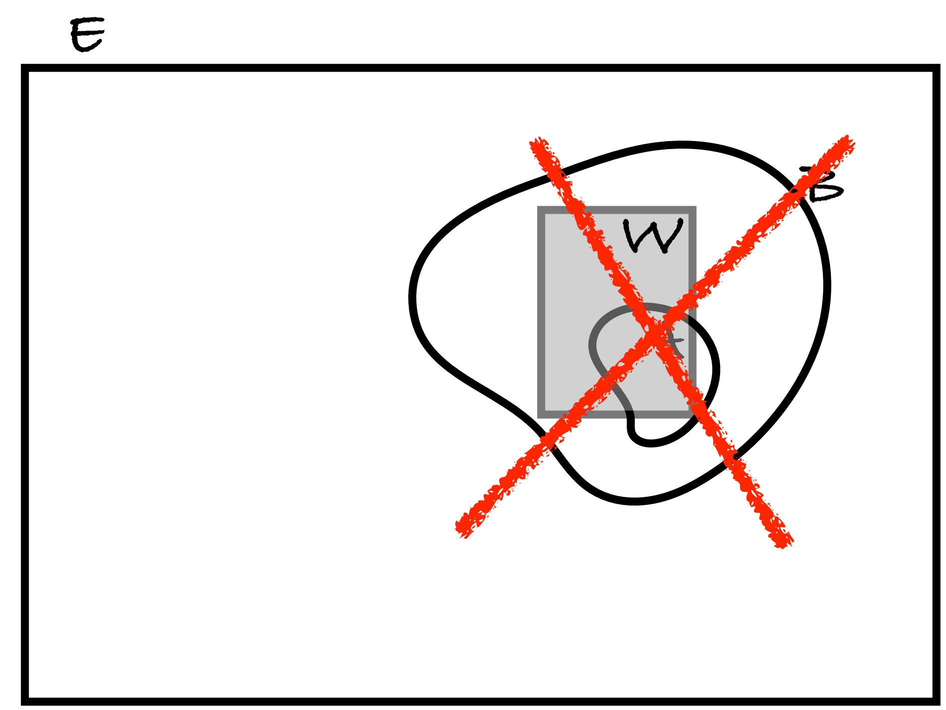
$$A \sqcap^{W} B = (A \cap B) \cup [W \cap (A \cup B)] = W,$$

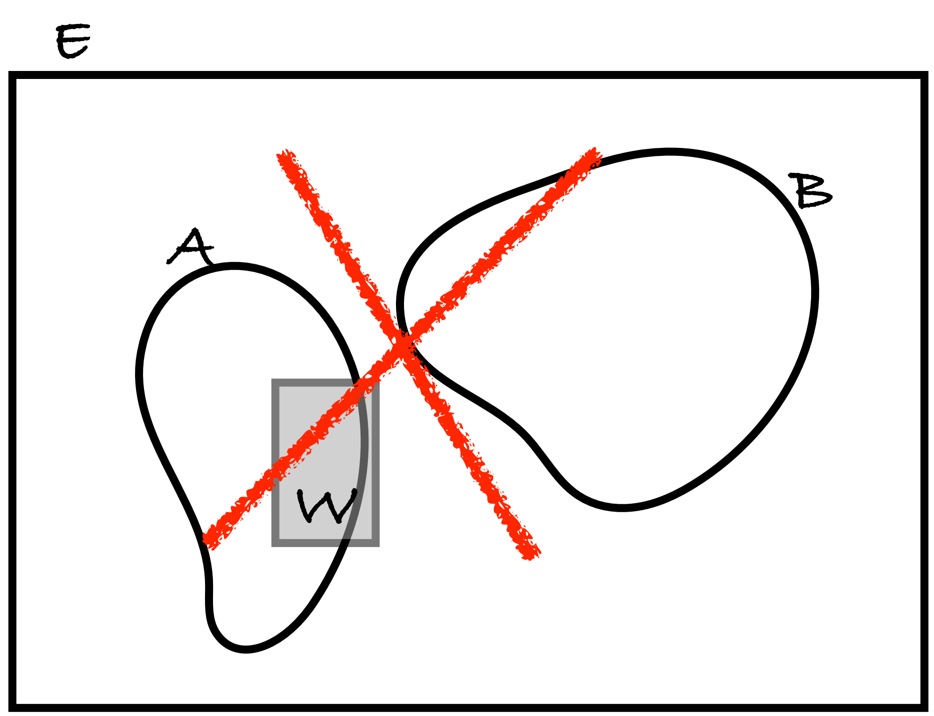
$$(A \cap B) \subseteq W \subseteq (A \cup B),$$

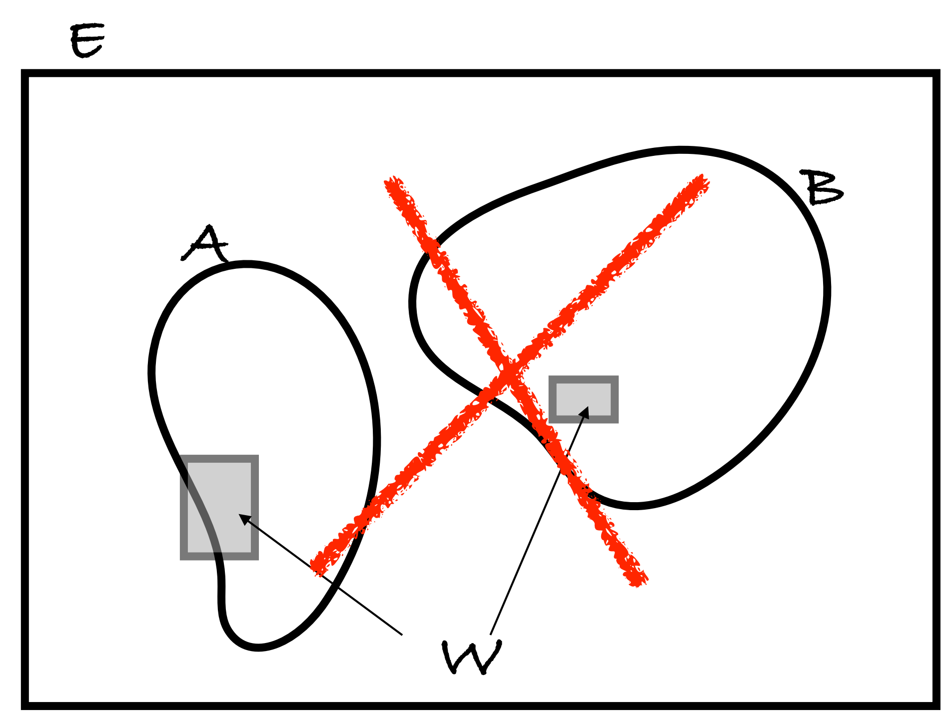
$$W \sqsubseteq^{B} A \;,\; W \sqsubseteq^{A} B$$

Contra-Ejemplos:





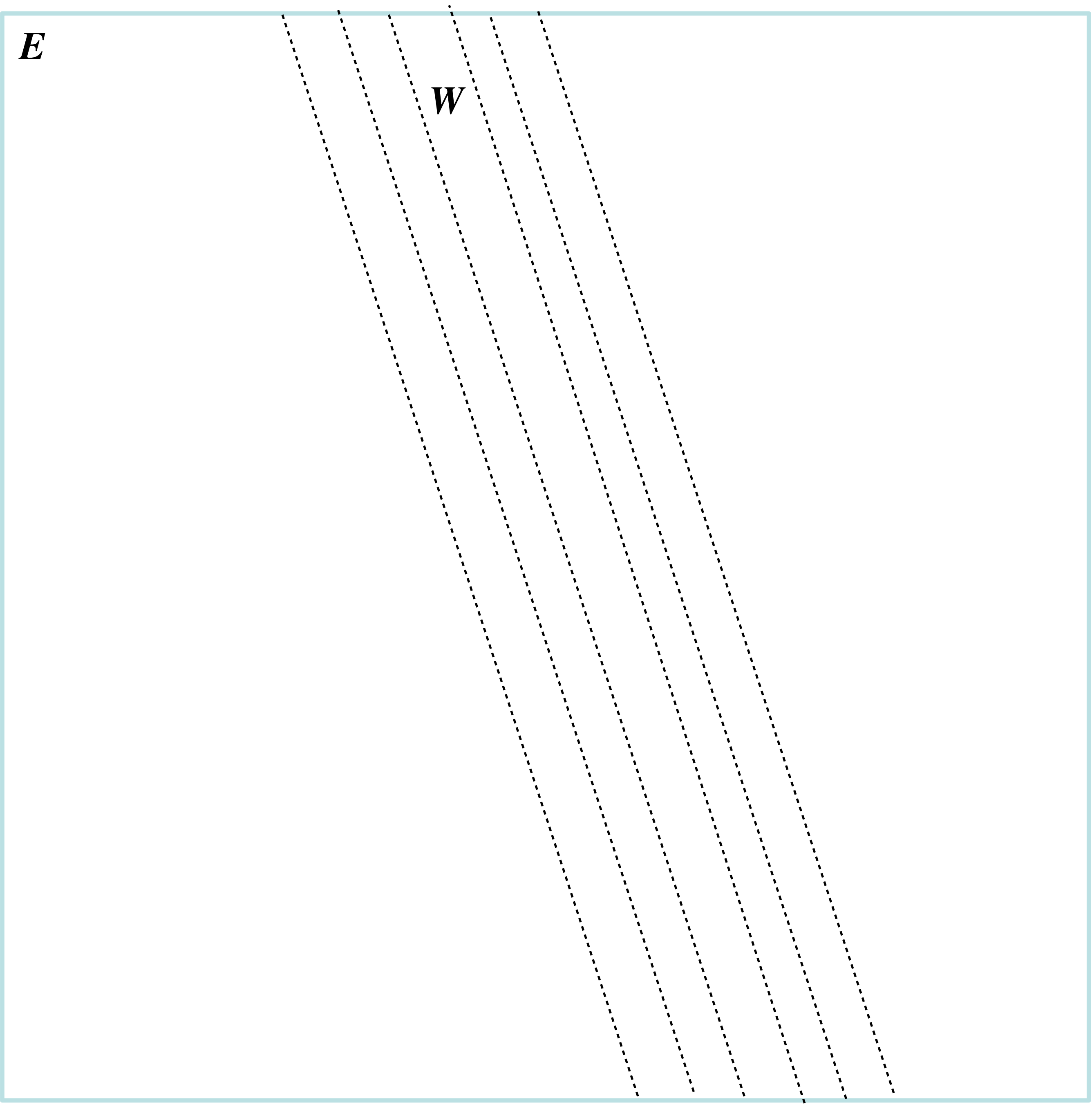




ÓRDENES DE ACTIVIDAD Y PROBABILIDAD

E cuadrado de área 1

Sea $\mathcal{B}$ la clase de subconjuntos $A, B, W, \ldots$ de E con área, entonces: $Pr(A) =$ área de A

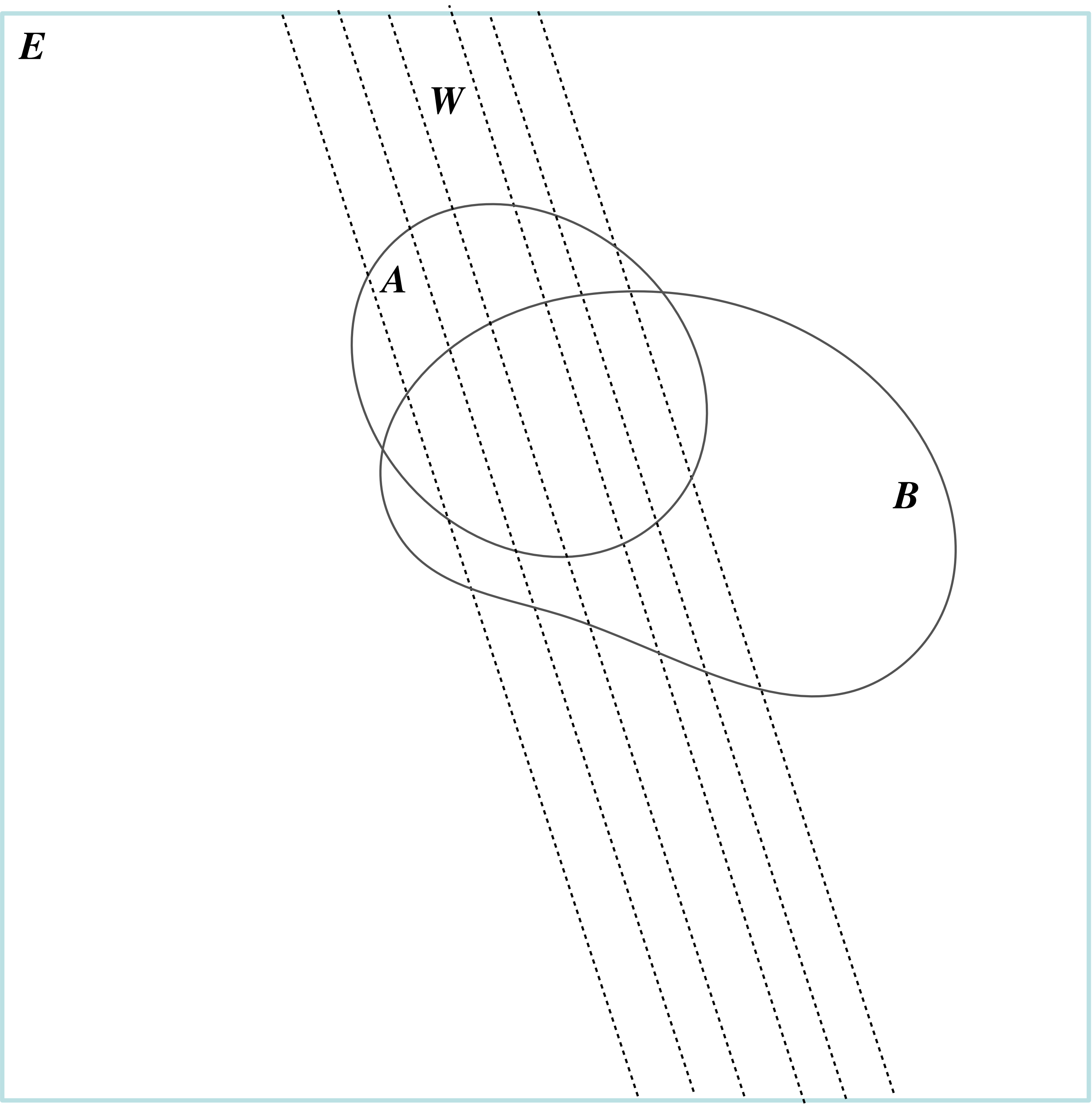


Sea W tal que $Pr(W) = 0$

ÓRDENES DE ACTIVIDAD Y PROBABILIDAD

E cuadrado de área 1

Sea $\mathcal{B}$ la clase de subconjuntos $A, B, W, \ldots$ de E con área, entonces: $Pr(A) =$ área de A



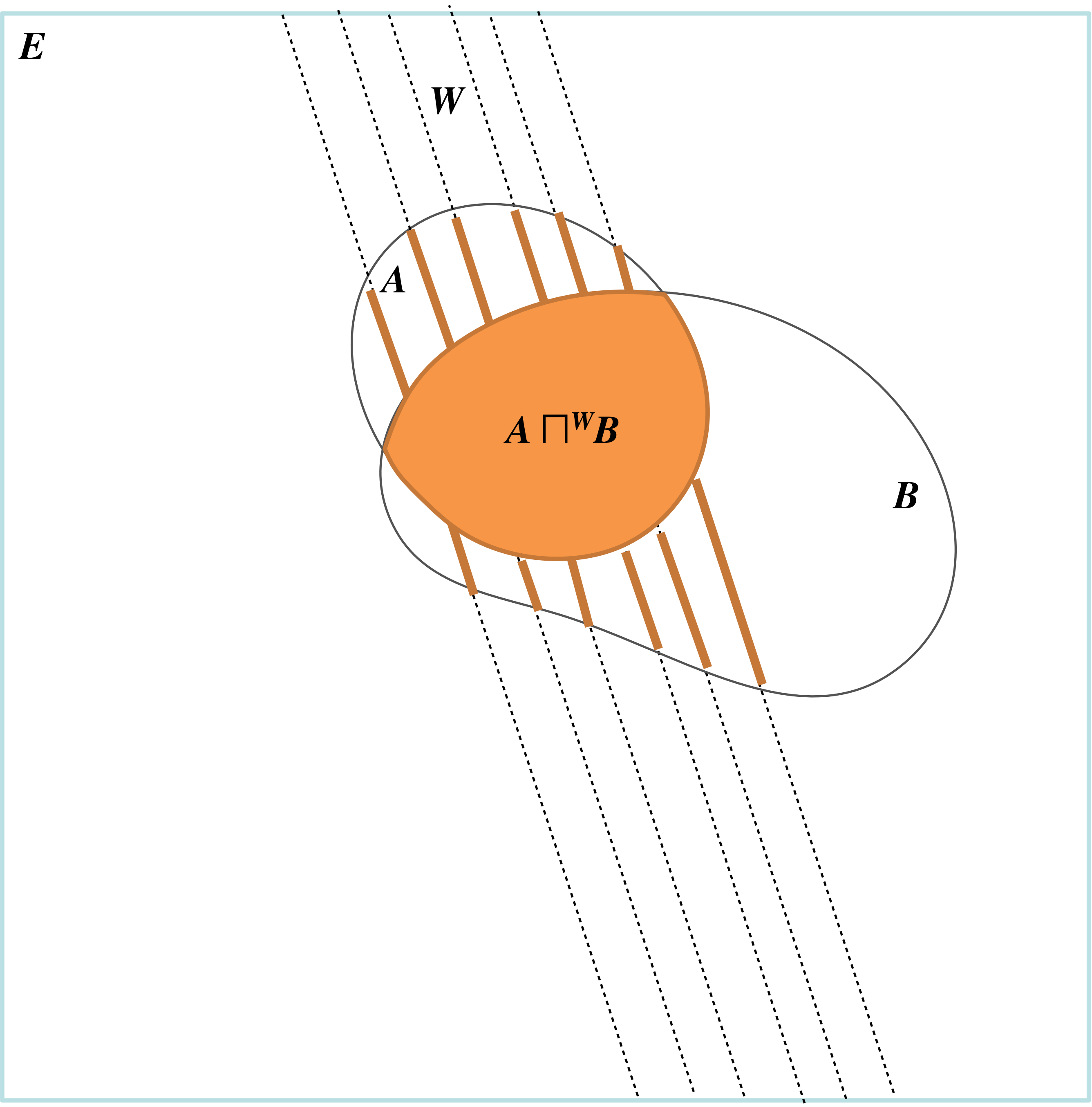
Sea W tal que $Pr(W) = 0$

$$Pr(A) = Pr(A \cap E) = Pr(A \cap (W \cup W^c)) = \boldsymbol{Pr}(A \cap W^c)$$

ÓRDENES DE ACTIVIDAD Y PROBABILIDAD

E cuadrado de área 1

Sea $\mathcal{B}$ la clase de subconjuntos $A, B, W, \ldots$ de E con área, entonces: $Pr(A) =$ área de A



Sea W tal que $Pr(W) = 0$

$Pr(A) = Pr(A \cap E) = Pr(A \cap (W \cup W^c)) = Pr(A \cap W^c)$

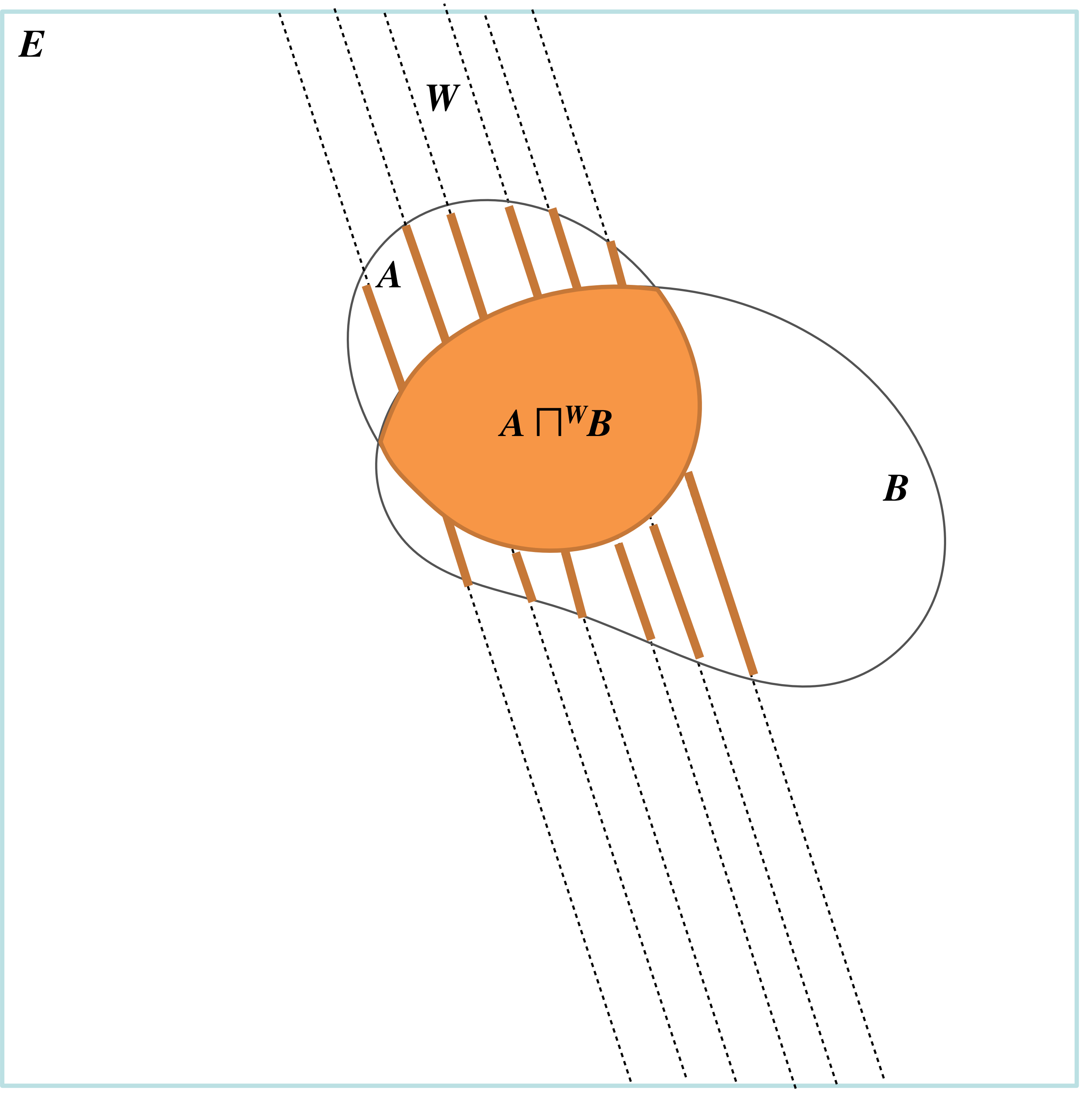
ÓRDENES DE ACTIVIDAD Y PROBABILIDAD

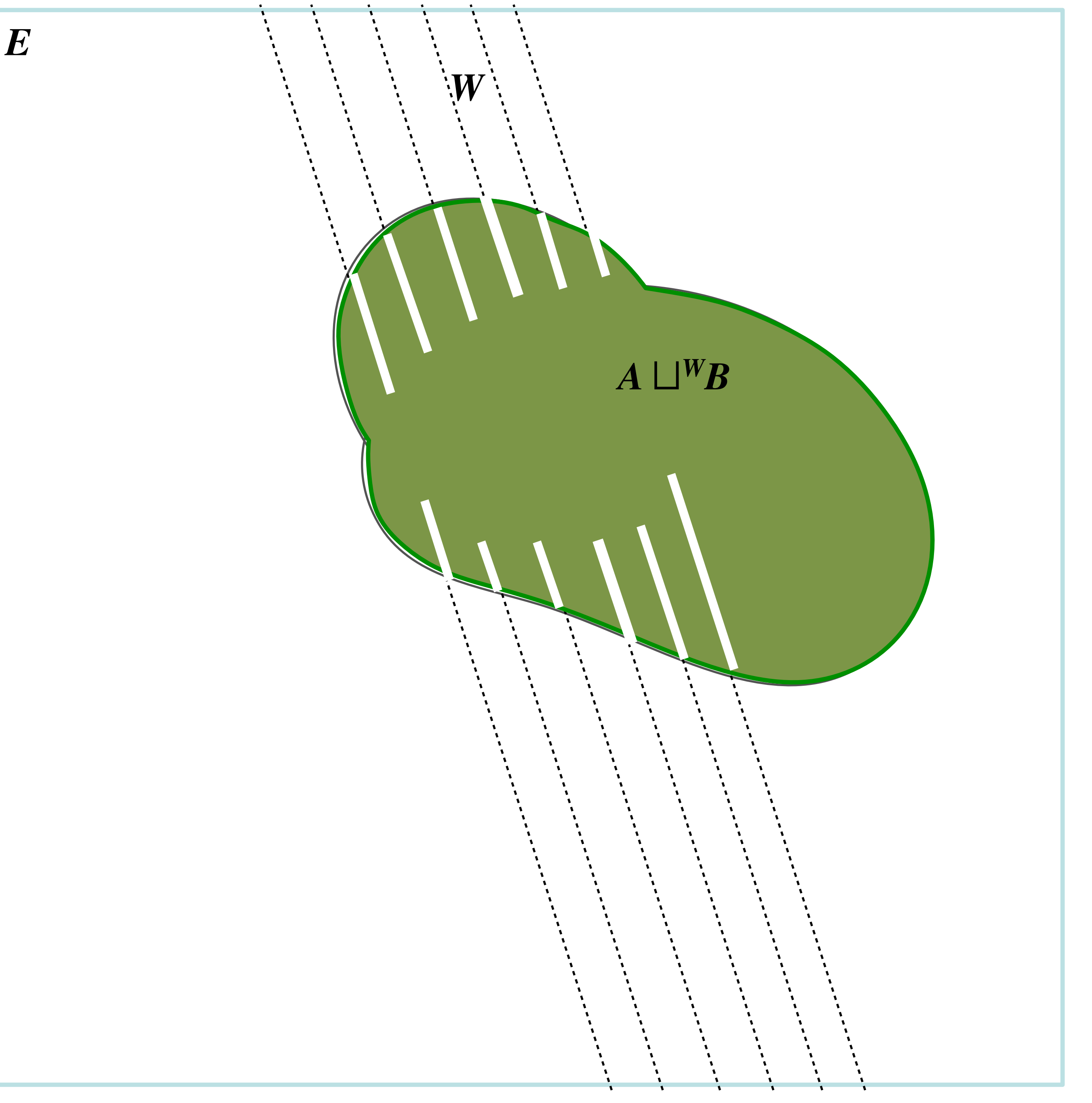
E cuadrado de área 1

Sea $\mathcal{B}$ la clase de subconjuntos $A, B, W, \ldots$ de E con área, entonces: $Pr(A) =$ área de A

Sea W tal que $Pr(W) = 0$

$Pr(A) = Pr(A \cap E) = Pr(A \cap (W \cup W^c)) = Pr(A \cap W^c)$



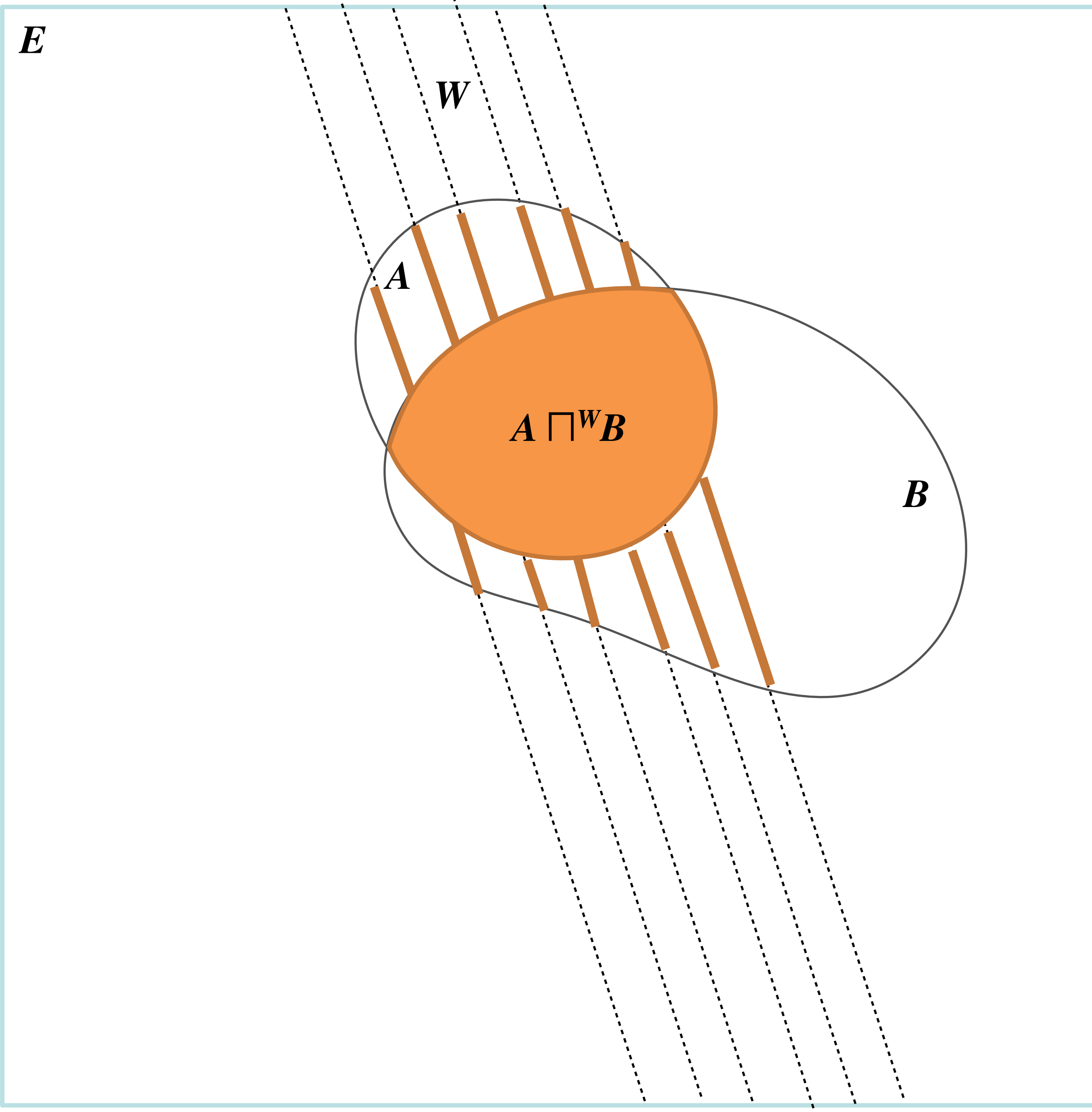


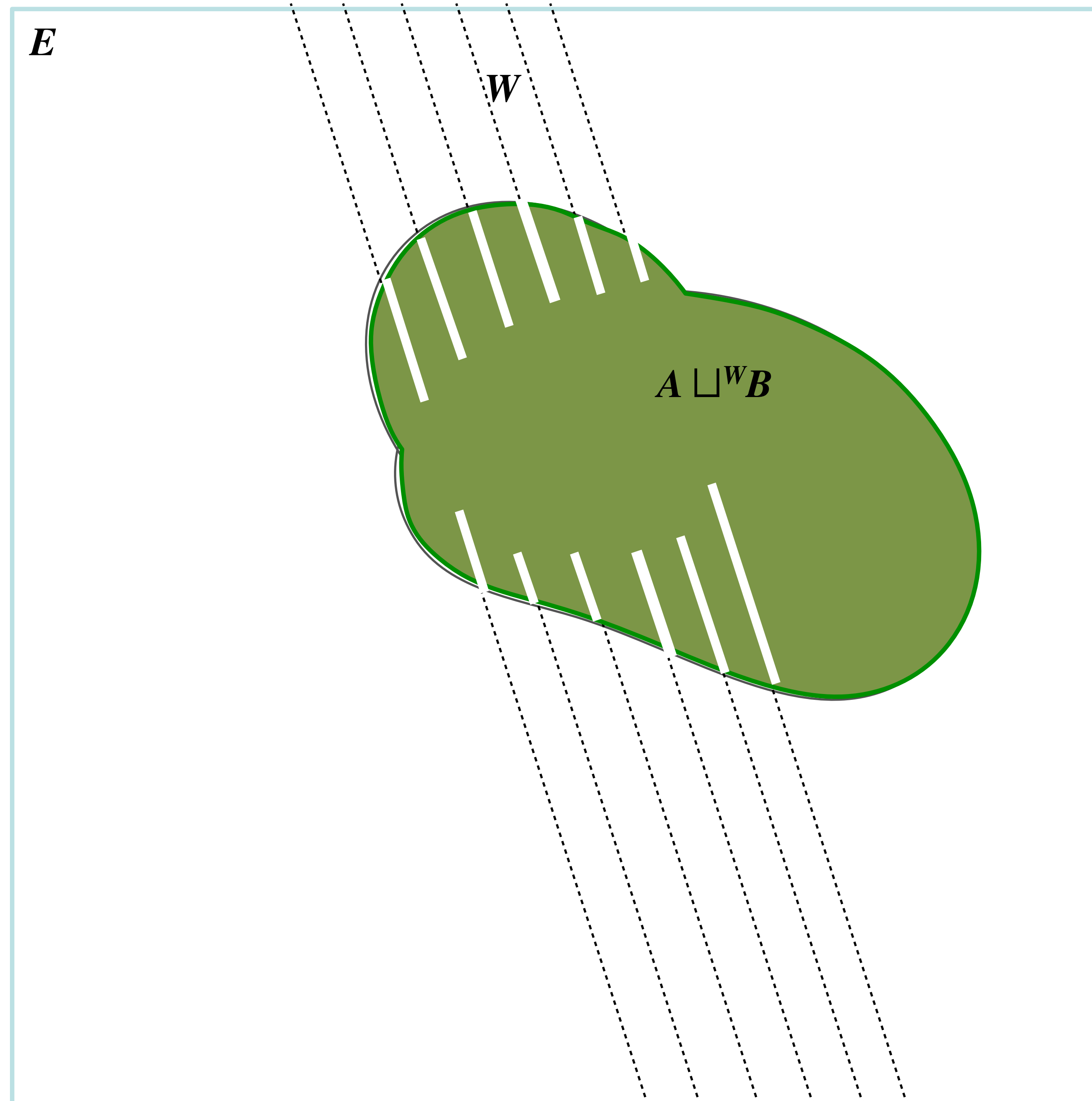
$\boldsymbol{E}$ cuadrado de área 1

Sea $\mathcal{B}$ la clase de subconjuntos $\boldsymbol{A}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{W}, \ldots$ de $\boldsymbol{E}$ con área, entonces: $Pr(\boldsymbol{A})$ = área de $\boldsymbol{A}$

Sea $\boldsymbol{W}$ tal que $Pr(\boldsymbol{W}) = 0$

$$Pr(\boldsymbol{A}) = Pr(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{E}) = Pr(\boldsymbol{A} \cap (\boldsymbol{W} \cup \boldsymbol{W}^c)) = \boldsymbol{Pr}(\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{W}^c)$$





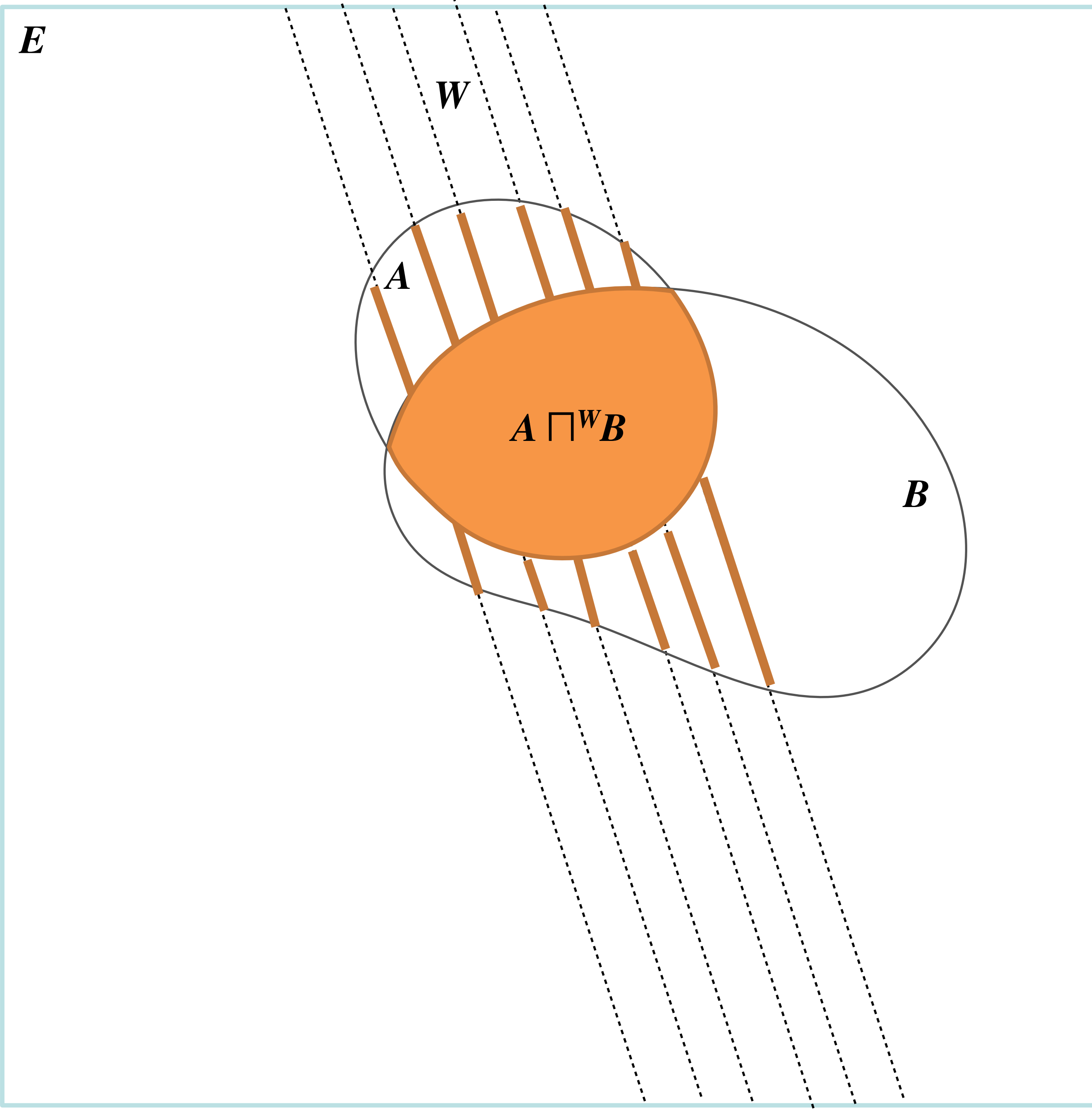
$$\widehat{Pr}_W(A) = Pr(A \triangle W) = Pr((A \cap W^c) \cup (A^c \cap W)) = Pr(A \cap W^c) + Pr(A^c \cap W) = Pr(A \cap W^c) = Pr(A)$$

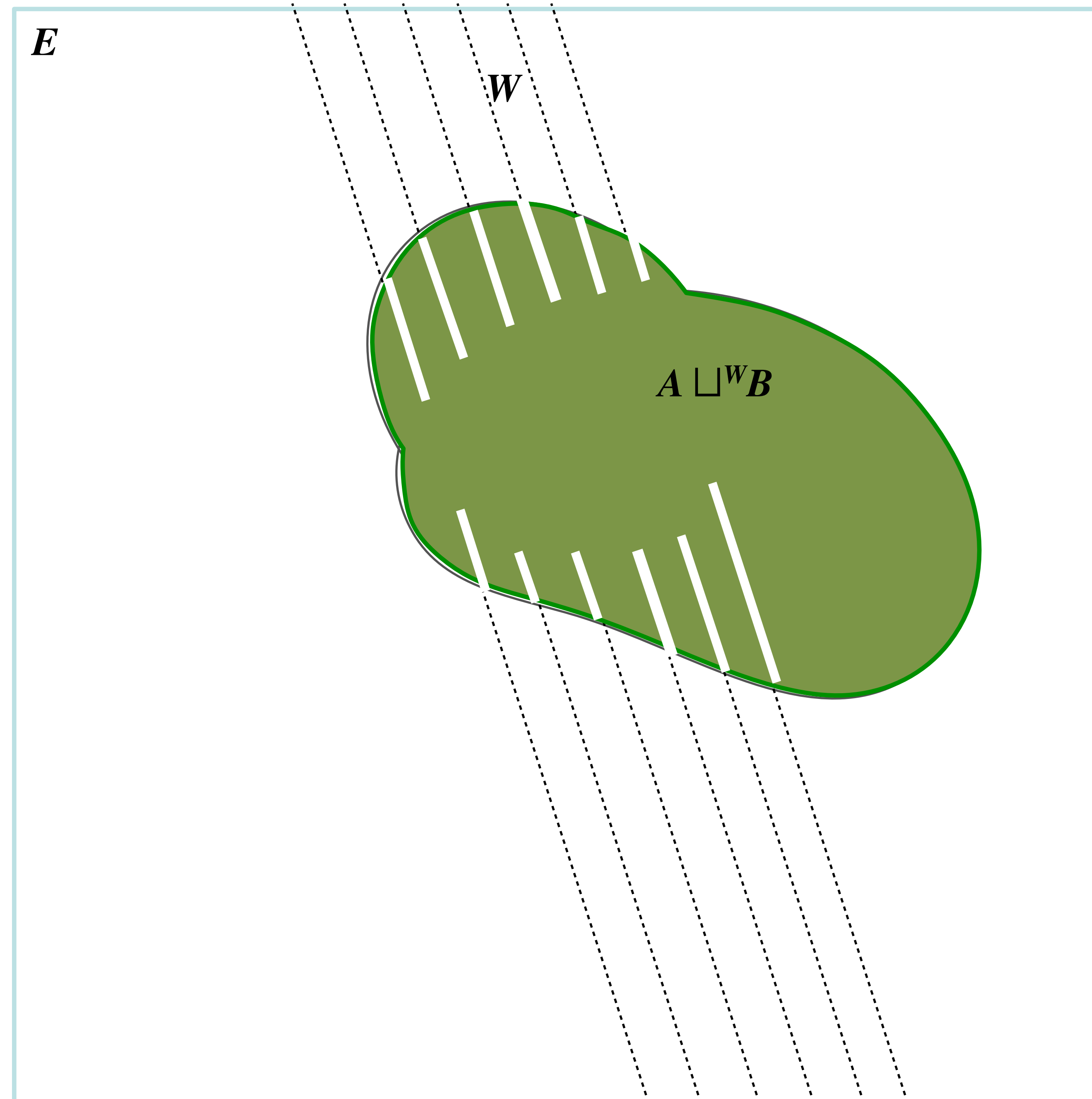
E cuadrado de área 1

Sea $\mathcal{B}$ la clase de subconjuntos $A, B, W, \ldots$ de E con área,
entonces: $Pr(A)$ = área de A

Sea W tal que $Pr(W) = 0$

$Pr(A) = Pr(A \cap E) = Pr(A \cap (W \cup W^c)) = \boldsymbol{Pr}(A \cap W^c)$





$\widehat{Pr}_W(A) = Pr(A \triangle W) = Pr((A \cap W^c) \cup (A^c \cap W)) = Pr(A \cap W^c) + Pr(A^c \cap W) = Pr(A \cap W^c) = Pr(A)$

$Pr : P(E) \rightarrow [0,1]$ es probabilidad en el álgebra de Boole $(P(E), \subseteq)$

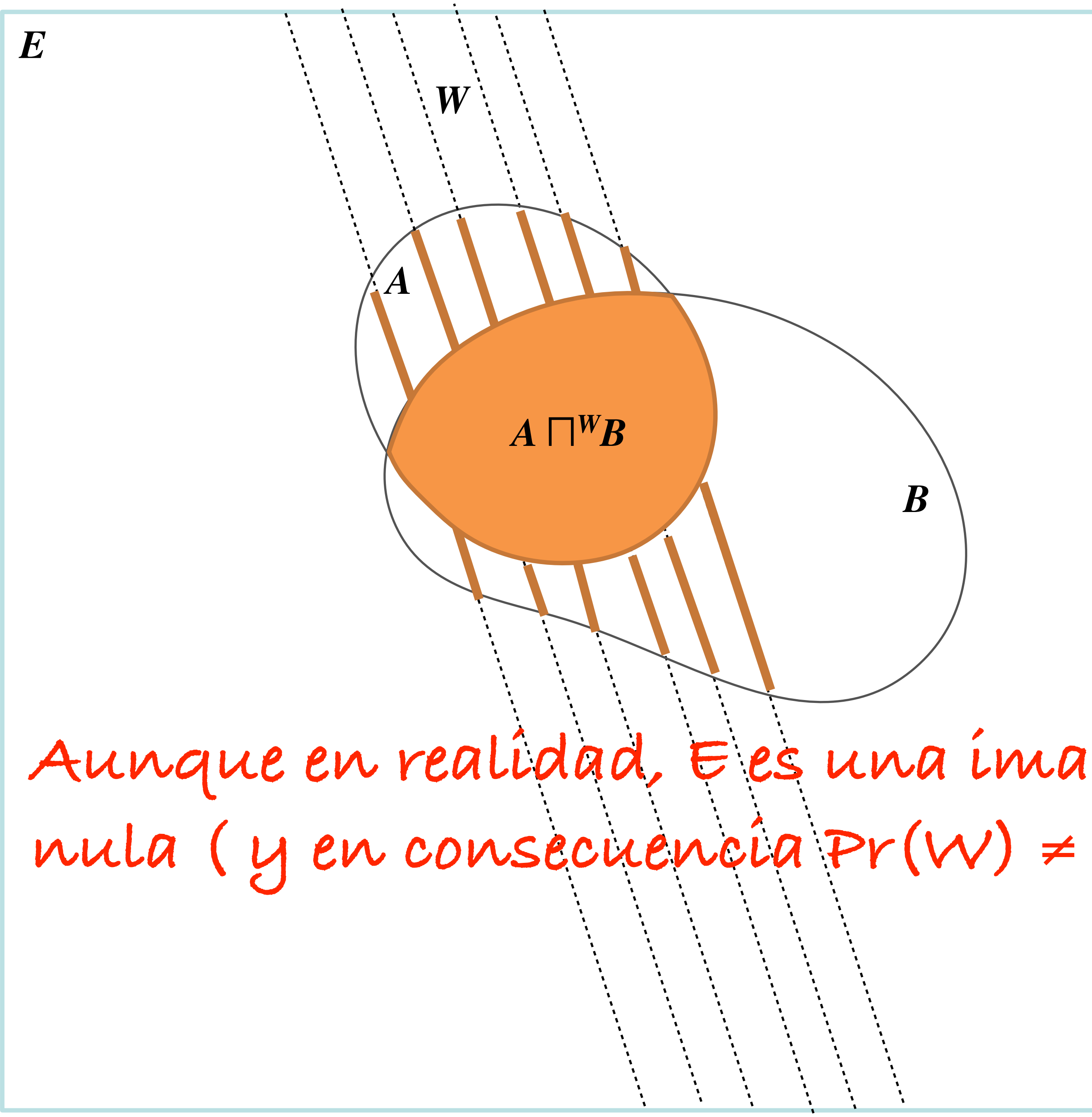
$\widehat{Pr}_W : P(E) \rightarrow [0,1]$ es medida en el álgebra de Boole $(P(E), \sqsubseteq^W)$

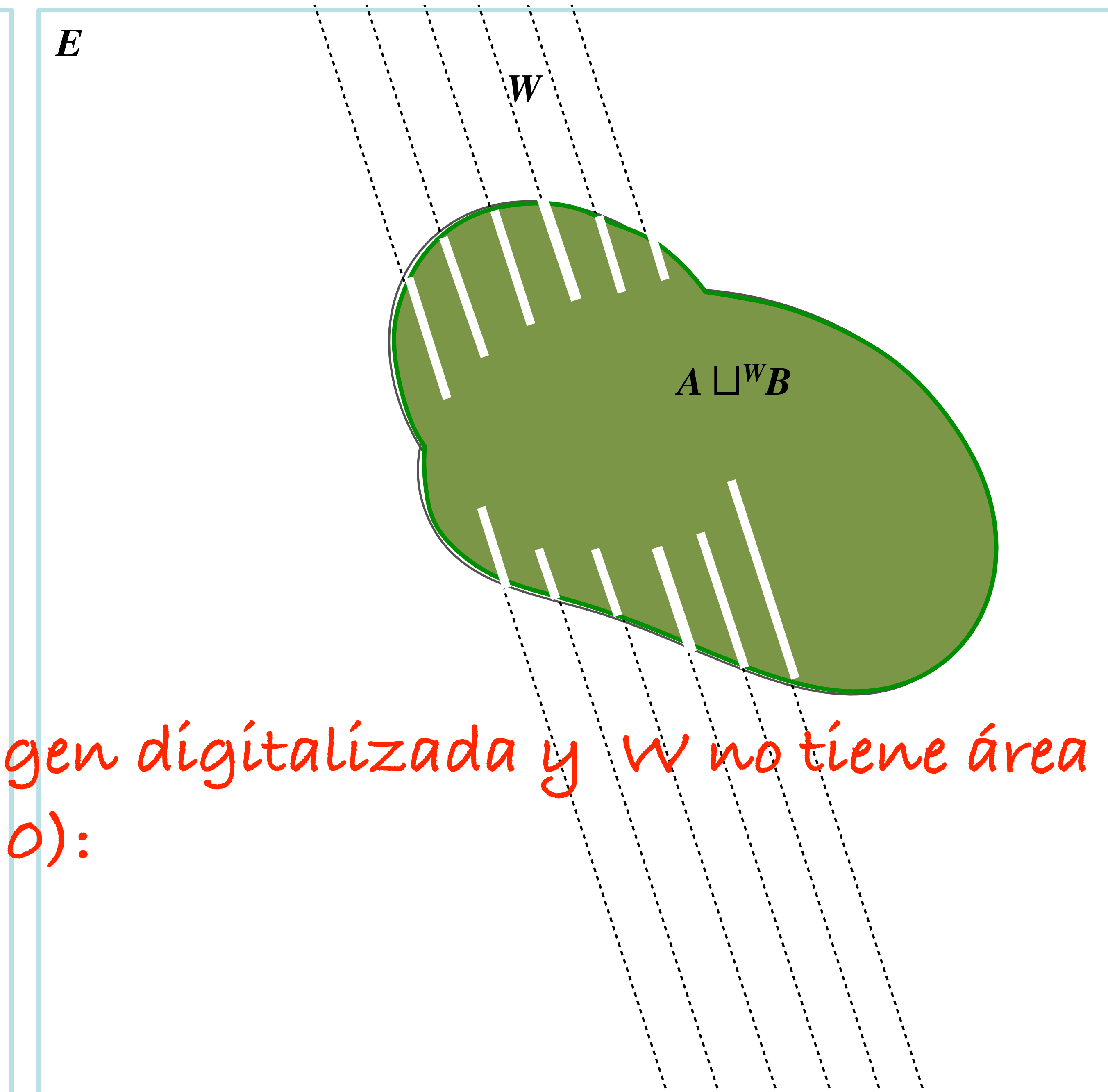
E cuadrado de área 1

Sea $\mathcal{B}$ la clase de subconjuntos $A, B, W, \ldots$ de E con área, entonces: $Pr(A)$ = área de A

Sea W tal que $Pr(W) = 0$

$$Pr(A) = Pr(A \cap E) = Pr(A \cap (W \cup W^c)) = Pr(A \cap W^c)$$





Aunque en realidad, E es una imagen digitalizada y W no tiene área nula (y en consecuencia $Pr(W) \neq 0$):

$$\widehat{Pr}_W(A) = Pr(A \triangle W) = Pr((A \cap W^c) \cup (A^c \cap W)) = Pr(A \cap W^c) + Pr(A^c \cap W) = Pr(A \cap W^c) = Pr(A)$$

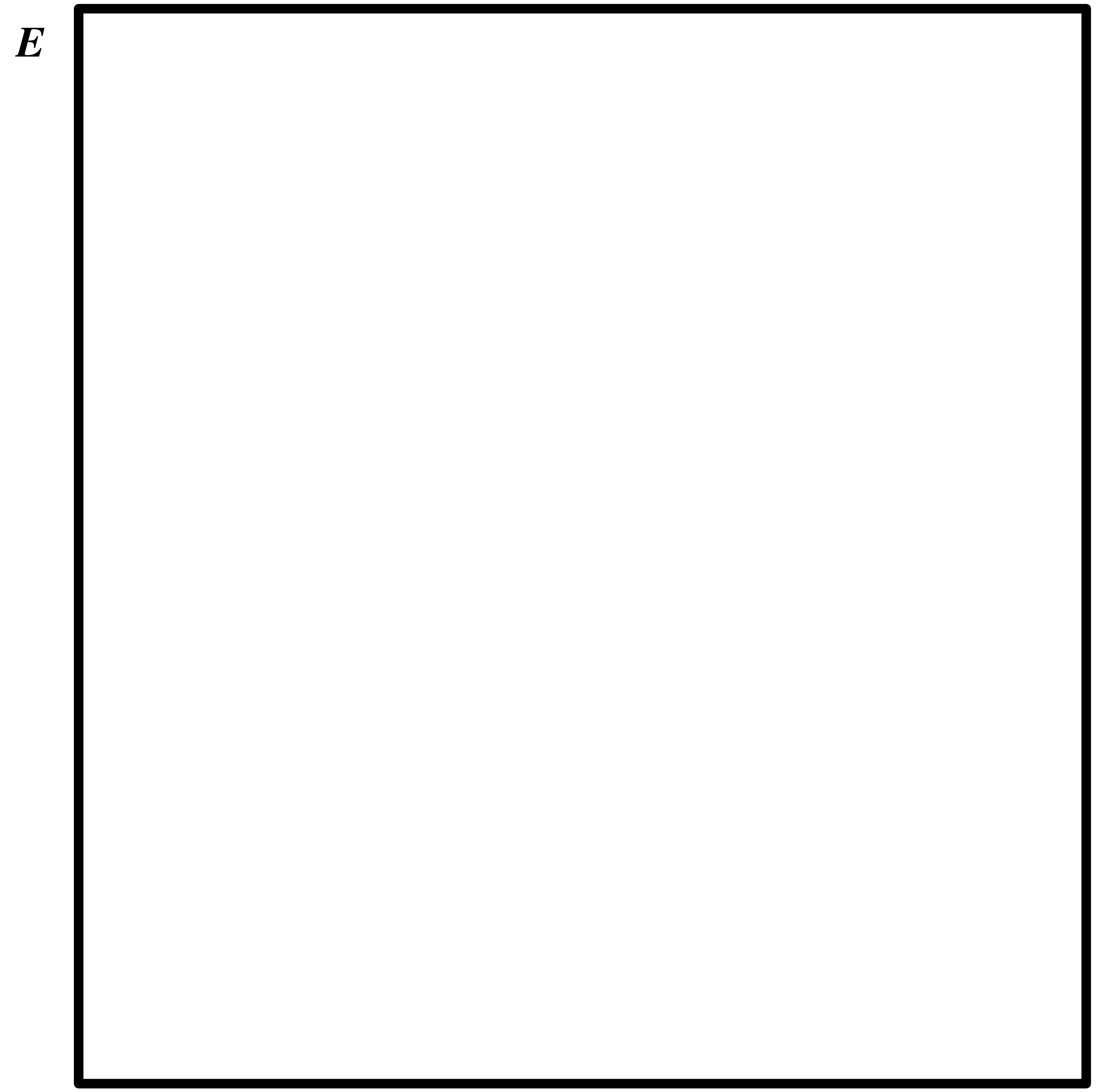
$Pr : P(E) \rightarrow [0,1]$ es probabilidad en el álgebra de Boole $(P(E), \subseteq)$

$\widehat{Pr}_W : P(E) \rightarrow [0,1]$ es medida en el álgebra de Boole $(P(E), \sqsubseteq^W)$

ÓRDENES DE ACTIVIDAD Y PROBABILIDAD

$\boldsymbol{E}$ cuadrado con $10^3 \times 10^3 = 10^6$ píxeles

$Pr(\boldsymbol{E}) = 1.000$



ÓRDENES DE ACTIVIDAD Y PROBABILIDAD

E cuadrado con $10^3 \times 10^3 = 10^6$ píxeles

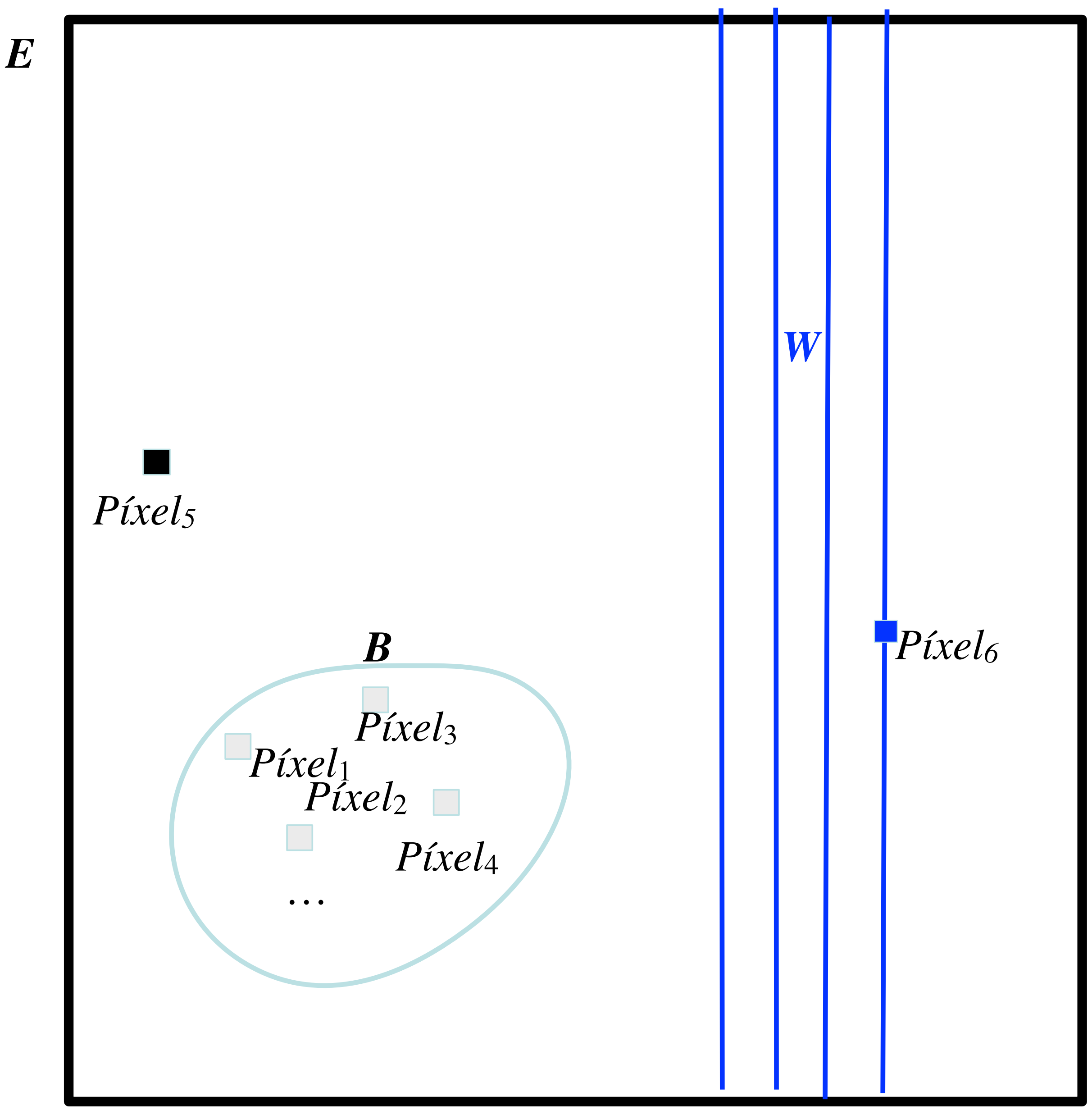
$Pr(E) = 1.000$

W subconjunto con $4 \times 10^3 = 4000$ píxeles

$$Pr(W) = \frac{4 \times 10^3}{10^6} = 0.004$$

$Pr(W^c) = 0.996$

Si B es subconjunto de E: $$Pr(B) = \frac{\text{Número de píxeles de } B}{10^6 \text{ píxeles}}$$



ÓRDENES DE ACTIVIDAD Y PROBABILIDAD

E cuadrado con $10^3 \times 10^3 = 10^6$ píxeles

$Pr(E) = 1.000$

W subconjunto con $4 \times 10^3 = 4000$ píxeles

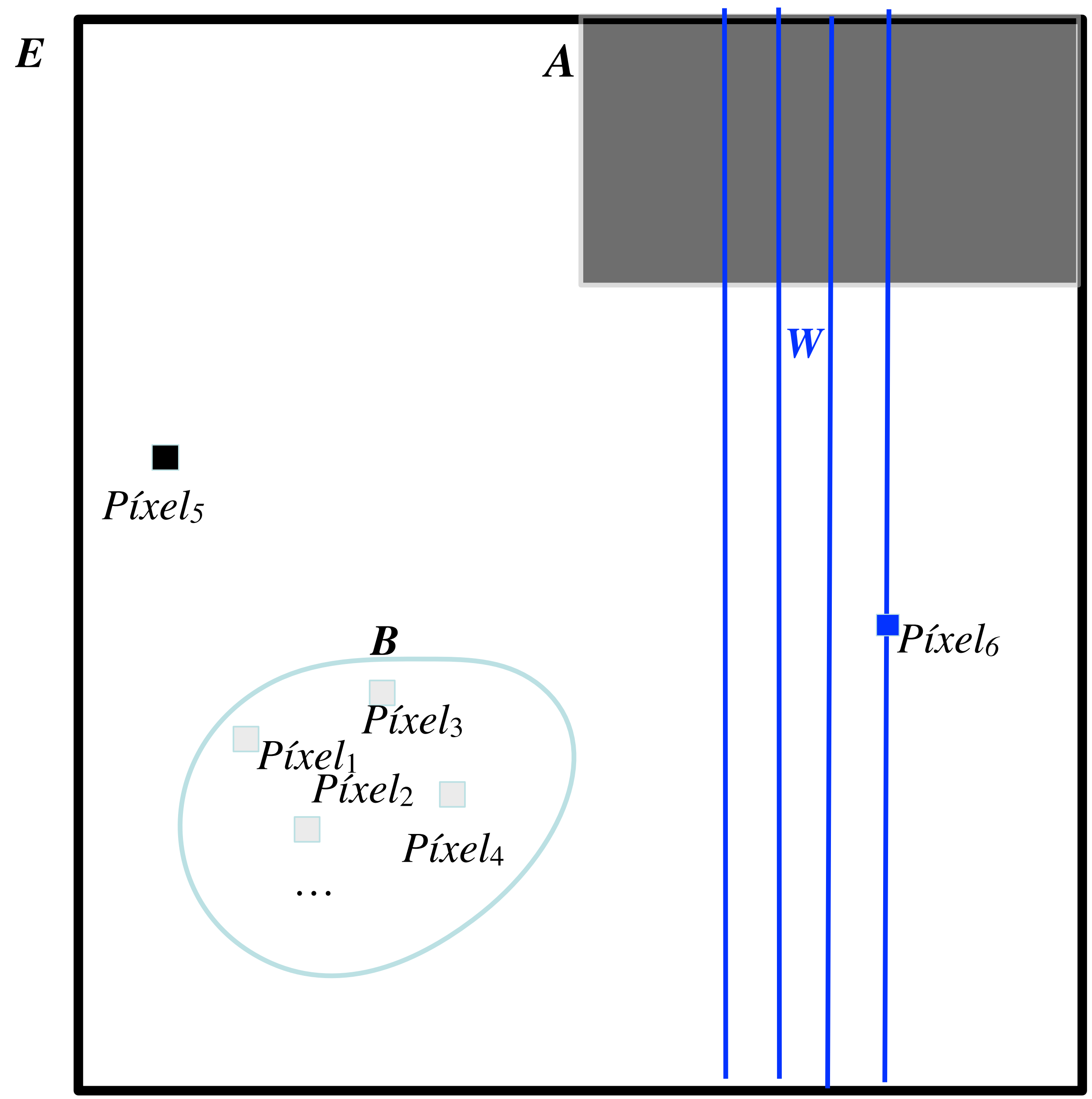
$Pr(W) = \frac{4 \times 10^3}{10^6} = 0.004$

$Pr(W^c) = 0.996$

Si B es subconjunto de E: $Pr(B) = \frac{\text{Número de píxeles de B}}{10^6 \text{ píxeles}}$

A subconjunto con $5^3 \times 10^3 = 125000$ píxeles

$Pr(A) = 0.125$



ÓRDENES DE ACTIVIDAD Y PROBABILIDAD

E cuadrado con $10^3 \times 10^3 = 10^6$ píxeles

$Pr(E) = 1.000$

Si B es subconjunto de E: $Pr(B) = \dfrac{\text{Número de píxeles de B}}{10^6 \text{ píxeles}}$

A subconjunto con $5^3 \times 10^3 = 125000$ píxeles

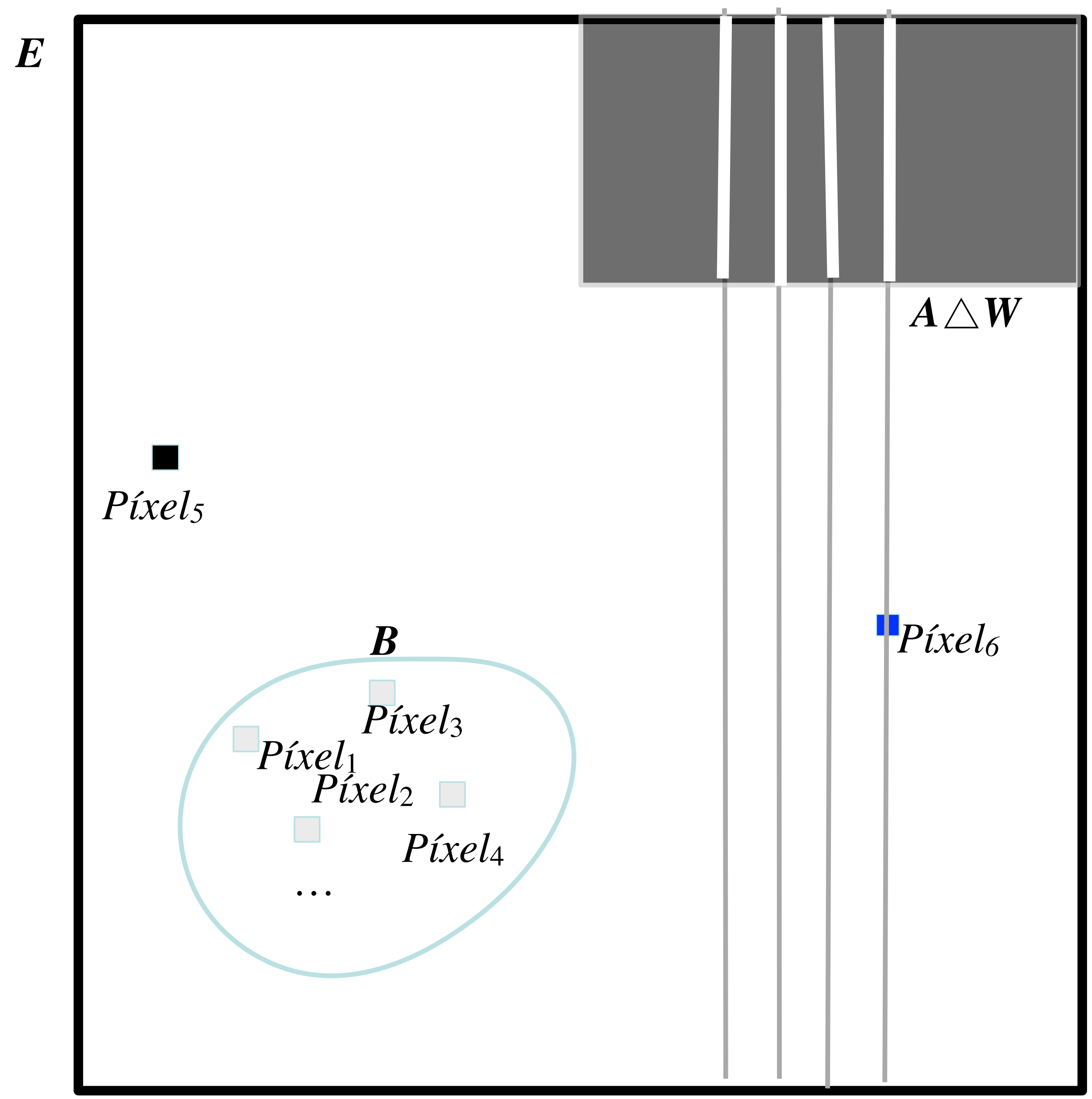
W subconjunto con $4 \times 10^3 = 4000$ píxeles

$Pr(A) = 0.125$

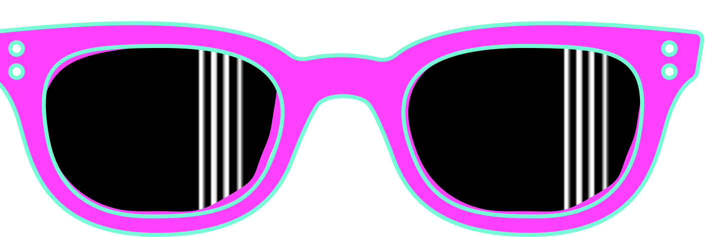
$Pr(W) = \dfrac{4x10^3}{10^6} = 0.004$

$Pr(A \triangle W) = 0{,}127 = \widehat{Pr}_W(A)$

$Pr(W^c) = 0.996$



Subconjunto diferencia simétrica $A \triangle W$:
"Una visión de A desde la perspectiva que proporciona W".



$\boldsymbol{E}$ cuadrado con $10^3 \times 10^3 = 10^6$ píxeles

$Pr(\boldsymbol{E}) = 1.000$

$\boldsymbol{W}$ subconjunto con $4 \times 10^3 = 4000$ píxeles

$Pr(\boldsymbol{W}) = \frac{4 \times 10^3}{10^6} = 0.004$

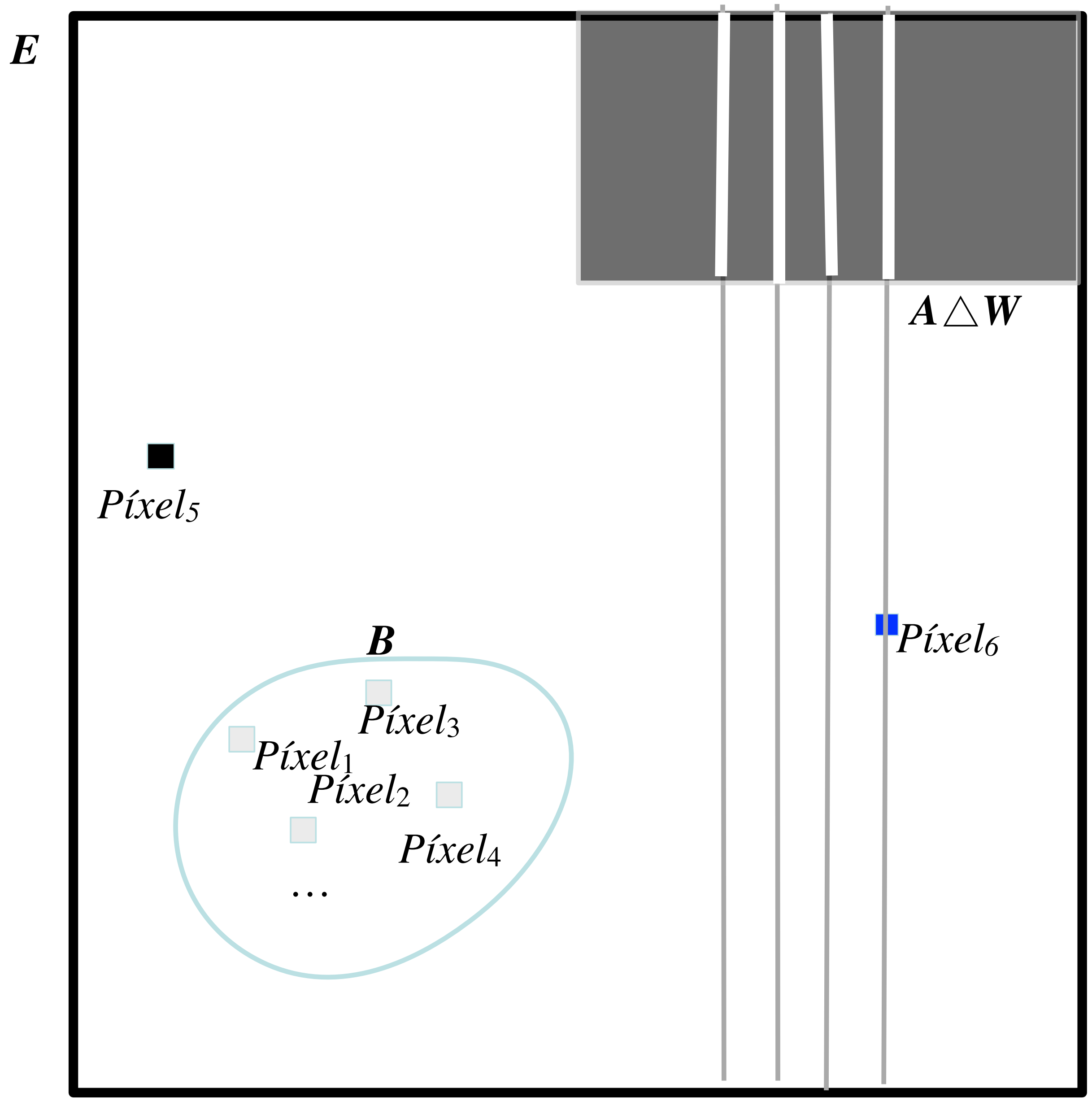
$Pr(\boldsymbol{W}^c) = 0.996$

Si $\boldsymbol{B}$ es subconjunto de $\boldsymbol{E}$: $Pr(\boldsymbol{B}) = \dfrac{\text{Número de píxeles de B}}{10^6 \text{ píxeles}}$

$\boldsymbol{A}$ subconjunto con $5^3 \times 10^3 = 125000$ píxeles

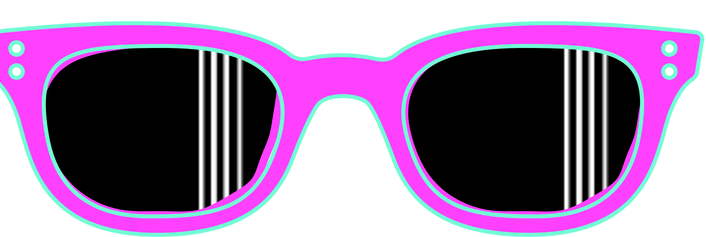
$Pr(\boldsymbol{A}) = 0.125$

$Pr(\boldsymbol{A} \triangle \boldsymbol{W}) = 0{,}127 = \widehat{Pr}_{\boldsymbol{W}}(\boldsymbol{A})$



Subconjunto diferencia simétrica $\boldsymbol{A} \triangle \boldsymbol{W}$:
"Una visión de $\boldsymbol{A}$ desde la perspectiva que proporciona $\boldsymbol{W}$".

$\widehat{Pr}_{W}(A) = Pr(\boldsymbol{A} \triangle \boldsymbol{W}) = Pr((\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{W}^c) \cup (\boldsymbol{A}^c \cap \boldsymbol{W})) \neq Pr(\boldsymbol{A})$



ÓRDENES DE ACTIVIDAD Y PROBABILIDAD

E cuadrado con $10^3 \times 10^3 = 10^6$ píxeles

$Pr(E) = 1.000$

Si B es subconjunto de E: $Pr(B) = \dfrac{\text{Número de píxeles de B}}{10^6 \text{ píxeles}}$

W subconjunto con $4 \times 10^3 = 4000$ píxeles

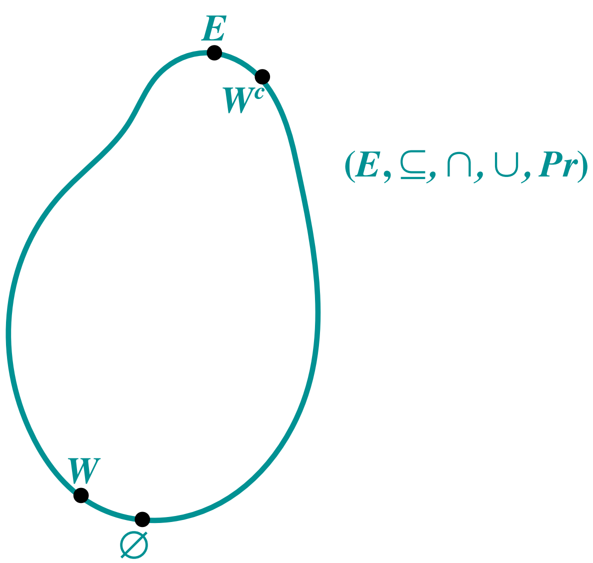
A subconjunto con $5^3 \times 10^3 = 125000$ píxeles

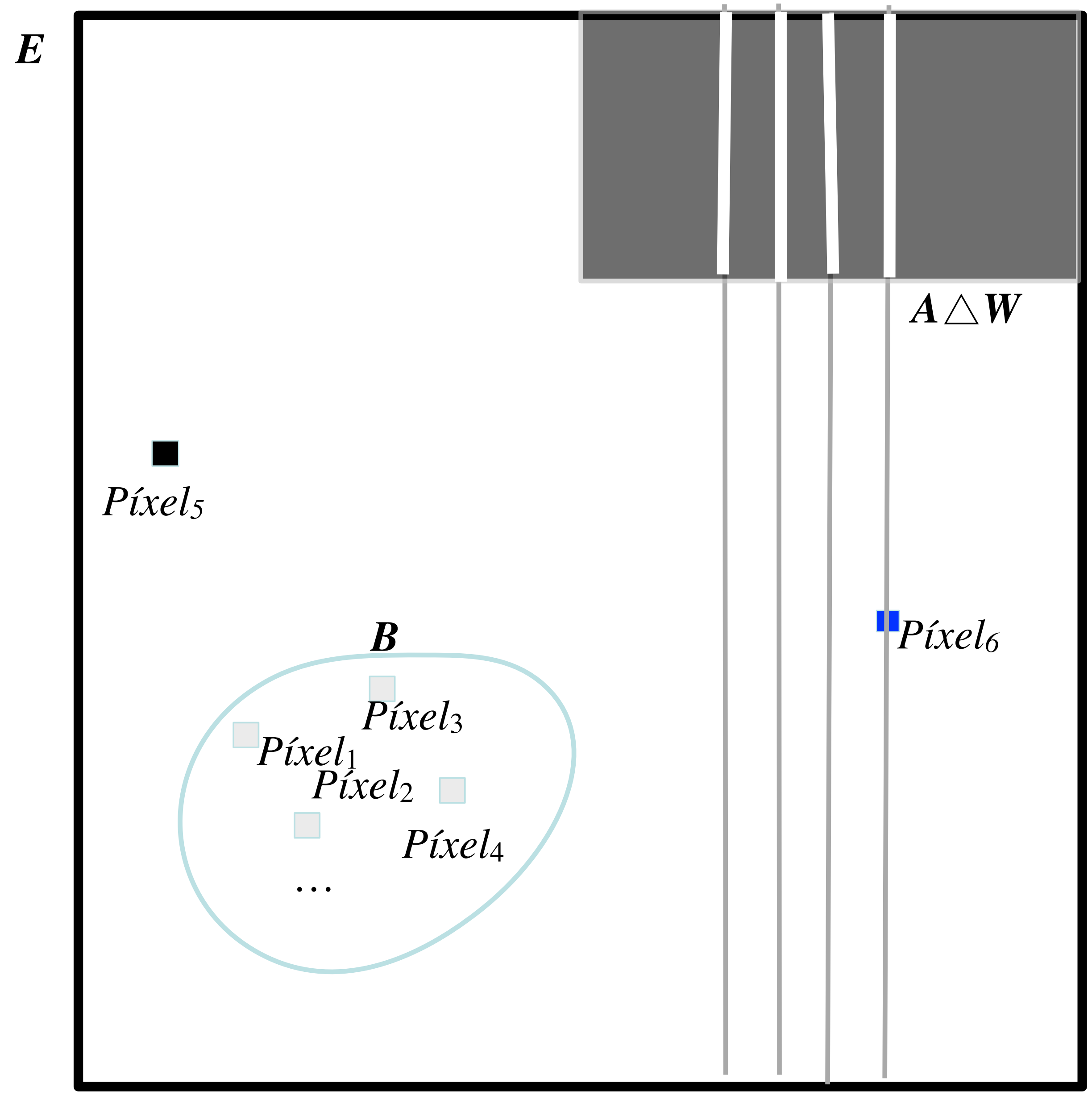
$Pr(W) = \dfrac{4x10^3}{10^6} = 0.004$

$Pr(A) = 0.125$

$Pr(A \triangle W) = 0{,}127 = \widehat{Pr}_W(A)$

$Pr(W^c) = 0.996$





Subconjunto diferencia simétrica $A \triangle W$:
"Una visión de A desde la perspectiva que proporciona W".

$\widehat{Pr}_W(A) = Pr(A \triangle W) = Pr((A \cap W^c) \cup (A^c \cap W)) \quad \neq Pr(A)$

$Pr : P(E) \rightarrow [0,1]$ es probabilidad en el álgebra de Boole $(P(E), \subseteq)$

ÓRDENES DE ACTIVIDAD Y PROBABILIDAD

$\boldsymbol{E}$ cuadrado con $10^3 \times 10^3 = 10^6$ píxeles

$Pr(\boldsymbol{E}) = 1.000$

$\boldsymbol{W}$ subconjunto con $4 \times 10^3 = 4000$ píxeles

$Pr(\boldsymbol{W}) = \frac{4x10^3}{10^6} = 0.004$

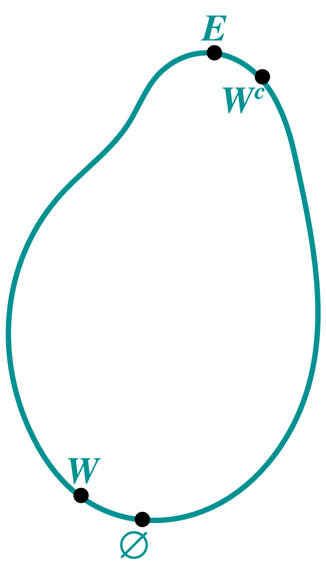
$Pr(\boldsymbol{W}^c) = 0.996$

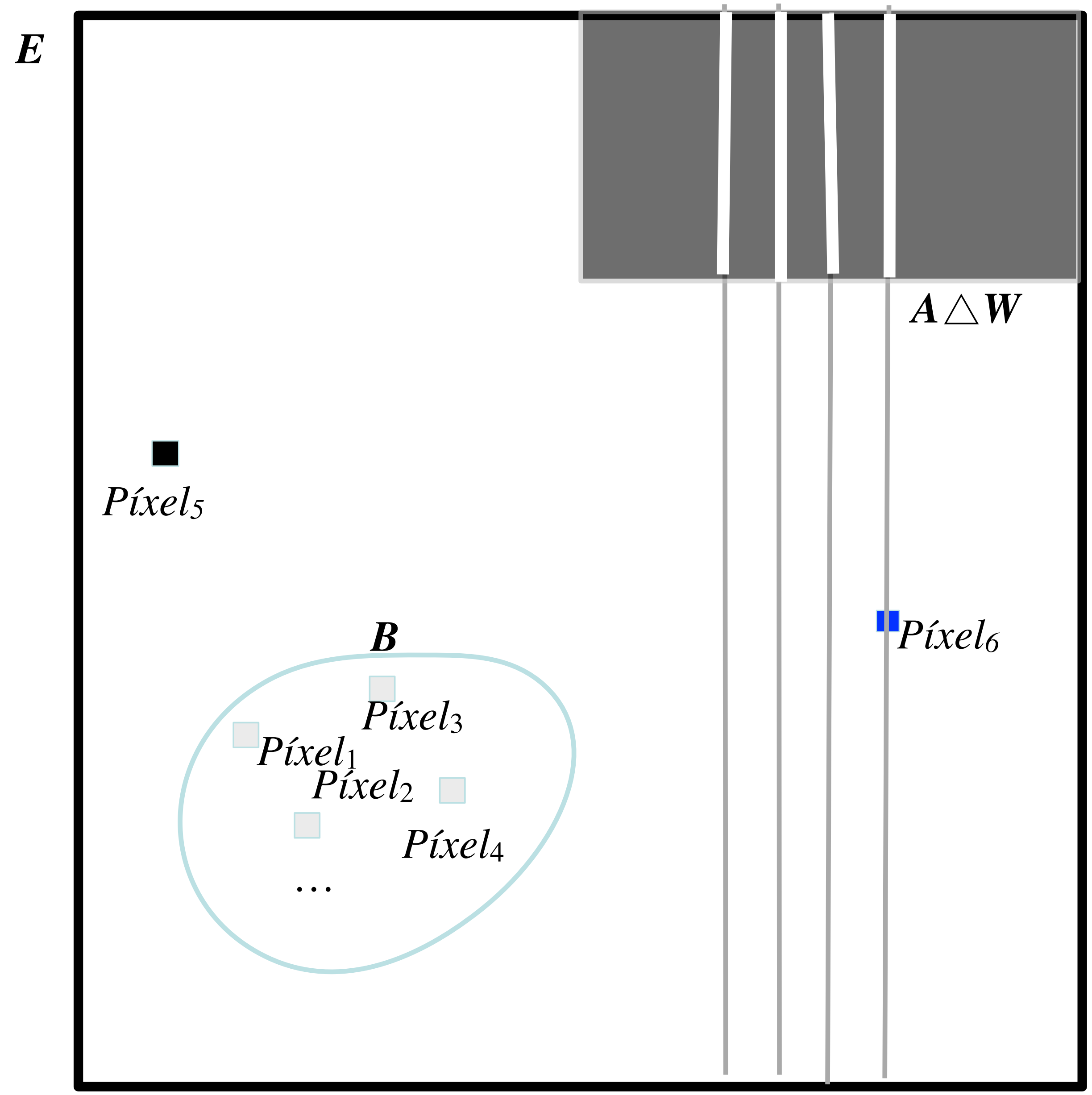
Si $\boldsymbol{B}$ es subconjunto de $\boldsymbol{E}$: $\quad Pr(\boldsymbol{B}) = \dfrac{\text{Número de píxeles de B}}{10^6 \text{ píxeles}}$

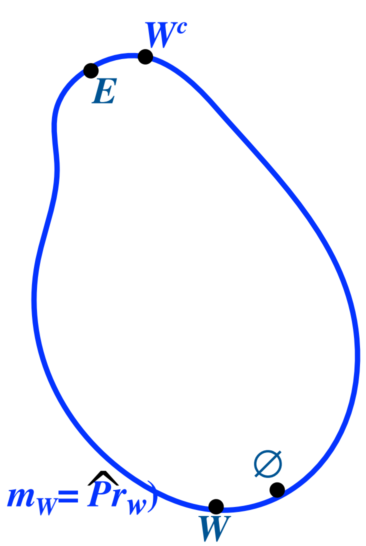
$\boldsymbol{A}$ subconjunto con $5^3 \times 10^3 = 125000$ píxeles

$Pr(\boldsymbol{A}) = 0.125$

$Pr(\boldsymbol{A} \triangle \boldsymbol{W}) = 0{,}127 = \widehat{Pr}_{\boldsymbol{W}}(\boldsymbol{A})$







Subconjunto diferencia simétrica $\boldsymbol{A} \triangle \boldsymbol{W}$:
"Una visión de $\boldsymbol{A}$ desde la perspectiva que proporciona $\boldsymbol{W}$".

$$\widehat{Pr}_{\boldsymbol{W}}(\boldsymbol{A}) = Pr(\boldsymbol{A} \triangle \boldsymbol{W}) = Pr((\boldsymbol{A} \cap \boldsymbol{W}^c) \cup (\boldsymbol{A}^c \cap \boldsymbol{W})) \quad \neq Pr(\boldsymbol{A})$$

$\boldsymbol{Pr} : \boldsymbol{P(E)} \rightarrow [0,1]$ es probabilidad en el álgebra de Boole $(\boldsymbol{P(E)}, \subseteq)$

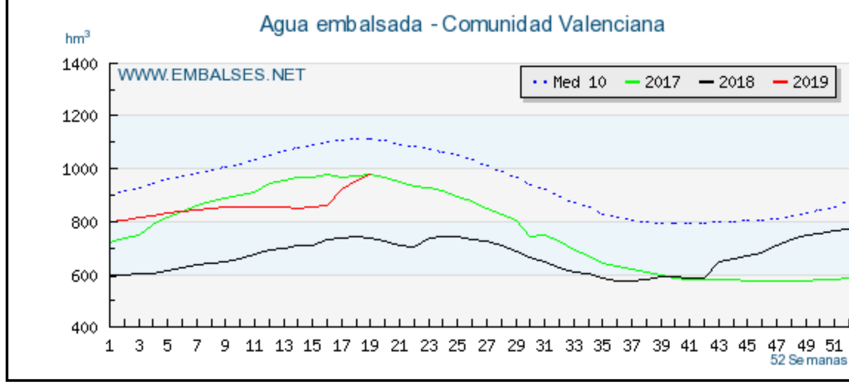
$\widehat{\boldsymbol{Pr}}_{\boldsymbol{w}} : \boldsymbol{P(E)} \rightarrow [0,1]$ es medida en el álgebra de Boole $(\boldsymbol{P(E)}, \sqsubseteq^{\boldsymbol{W}})$
w-probabilidad?

Ejemplo. Incorporación del término "vacío" en herramientas de gestión de recursos, ayuda a la decisión,...

En un sistema de gestión del uso del agua acumulada en los pantanos de la Comunidad Valenciana...

Comunidad: Comunidad Valenciana

Agua embalsada (06-05-2019):	**979**	**hm^3**	**40.01**	**%**
Variacion semana Anterior:	14	hm^3	0.57	%
Capacidad:	2447	hm^3		
Misma Semana (2018):	736	hm^3	30.08	%
Misma Semana (Med. 10 Años):	1111	hm^3	45.41	%



Embalses en Comunidad Valenciana

Pantano	Capacidad	Embalsada	Variacion
ALGAR	6	1	0
AMADORIO	16	6	1
ARENOS	137	95	0
BELLUS	69	11	0
BENAGEBER	221	164	5
BENIARRES	27	19	1
BUSEO	8	4	0
CONTRERAS	852	198	8
CORTES II	118	105	-7
CREVILLENTE	13	5	1
EL NARANJERO	29	18	-3
EL REGAJO	6	5	0
ESCALONA	99	5	0
FORATA	37	12	0
GUADALEST	13	7	1
LA MUELA	20	16	-1
LA PEDRERA	246	74	0
LORIGUILLA	73	22	-1
MARIA CRISTINA	18	7	0
SICHAR	49	37	2
TOUS - LA RIBERA	379	161	7
ULLDECONA	11	7	0

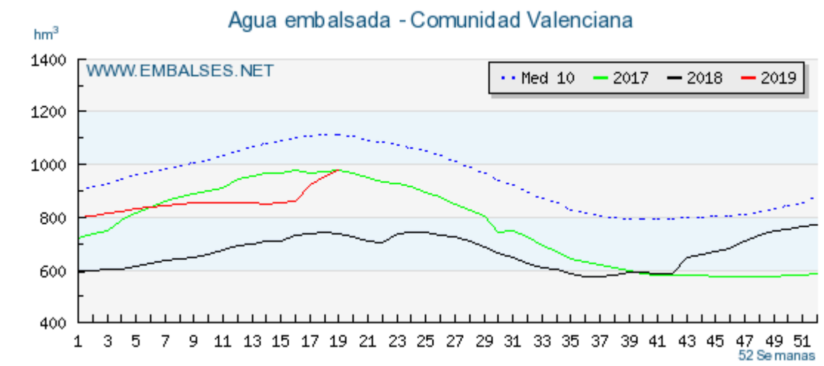
Embalses en Comunidad Valenciana (Sin datos Semanales)

Pantano	Capacidad
ALCORA	1
BETIES I	0
CIRAT	0
EL FEDERAL	1
ELCHE	0
ELDA	0
FLORA	0
FRANCISCO MIRA CANOVAS	1
ISBERT	0
ONDA	1
PARAJE DE GALENO	0
RELLEU	1
RIBESALBES	0
SAN VICENTE	0
SECA SALADA	2
TIBI	4
TOLL DE CARMELO I	0
TORRE ALTA	0
[illegible]	[illegible]

En un sistema de gestión del uso del agua acumulada en los pantanos de la Comunidad Valenciana...

Comunidad: Comunidad Valenciana

Agua embalsada (06-05-2019):	**979**	**hm³**	**40.01 %**
Variacion semana Anterior:	14	hm³	0.57 %
Capacidad:	2447	hm³	
Misma Semana (2018):	736	hm³	30.08 %
Misma Semana (Med. 10 Años):	1111	hm³	45.41 %



Embalses en Comunidad Valenciana

Pantano		Capacidad	Embalsada	Variacion
ALGAR	**17%**	6	1	0
AMADORIO	**37%**	16	6	1
ARENOS	**69%**	137	95	0
BELLUS	**16%**	69	11	0
BENAGEBER	**74%**	221	164	5
BENIARRES	**70%**	27	19	1
BUSEO	**50%**	8	4	0
CONTRERAS	**23%**	852	198	8
CORTES II	**89%**	118	105	-7
CREVILLENTE	**38%**	13	5	1
EL NARANJERO	**62%**	29	18	-3
EL REGAJO	**83%**	6	5	0
ESCALONA	**5%**	99	5	0
FORATA	**32%**	37	12	0
GUADALEST	**54%**	13	7	1
LA MUELA	**80%**	20	16	-1
LA PEDRERA	**30%**	246	74	0
LORIGUILLA	**30%**	73	22	-1
MARIA CRISTINA	**39%**	18	7	0
SICHAR	**75%**	49	37	2
TOUS - LA RIBERA	**42%**	379	161	7
ULLDECONA	**63%**	11	7	0

Embalses en Comunidad Valenciana (Sin datos Semanales)

Pantano	Capacidad
ALCORA	1
BETIES I	0
CIRAT	0
EL FEDERAL	1
ELCHE	0
ELDA	0
FLORA	0
FRANCISCO MIRA CANOVAS	1
ISBERT	0
ONDA	1
PARAJE DE GALENO	0
RELLEU	1
RIBESALBES	0
SAN VICENTE	0
SECA SALADA	2
TIBI	4
TOLL DE CARMELO I	0
TORRE ALTA	0

EV = {AlBeConCrEsLapLo, AmBuFoMcrTo, ArElnGuLamUll, BeBenCoElrSi} =
{P1, P2, P3, P4}

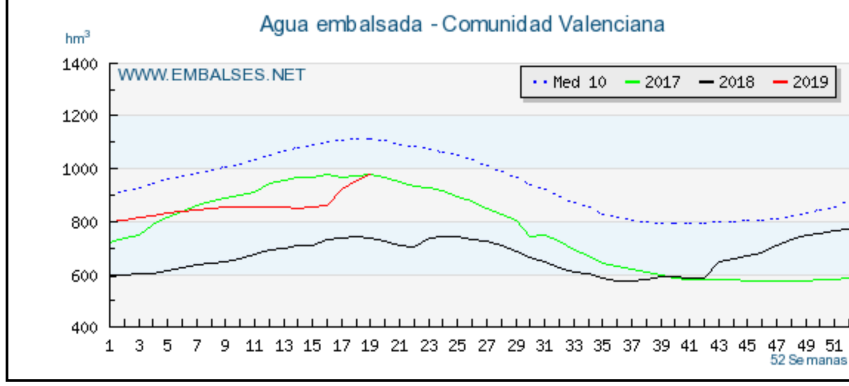
W

Embalses en Comunidad Valenciana

Pantano		Capacidad	Embalsada	Variacion
ALGAR	17%	6	1	0
AMADORIO	37%	16	6	1
ARENOS	69%	137	95	0
BELLUS	16%	69	11	0
BENAGEBER	74%	221	164	5
BENIARRES	70%	27	19	1
BUSEO	50%	8	4	0
CONTRERAS	23%	852	198	8
CORTES II	89%	118	105	-7
CREVILLENTE	38%	13	5	1
EL NARANJERO	62%	29	18	-3
EL REGAJO	83%	6	5	0
ESCALONA	5%	99	5	0
FORATA	32%	37	12	0
GUADALEST	54%	13	7	1
LA MUELA	80%	20	16	-1
LA PEDRERA	30%	246	74	0
LORIGUILLA	30%	73	22	-1
MARIA CRISTINA	39%	18	7	0
SICHAR	75%	49	37	2
TOUS - LA RIBERA	42%	379	161	7
ULLDECONA	63%	11	7	0

Comunidad: Comunidad Valenciana

Agua embalsada (06-05-2019):	**979**	**hm³**	**40.01**	**%**
Variacion semana Anterior:	14	hm³	0.57	%
Capacidad:	2447	hm³		
Misma Semana (2018):	736	hm³	30.08	%
Misma Semana (Med. 10 Años):	1111	hm³	45.41	%

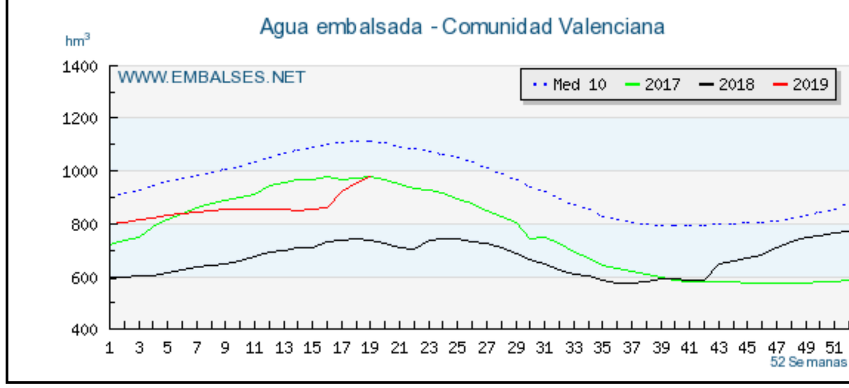


una agrupación y simplificación del conjunto de pantanos según su capacidad en una época determinada

$EV = \{AlBeConCrEsLapLo,\ AmBuFoMcrTo,\ ArElnGuLamUll,\ BeBenCoElrSi\} = \{P1,\ P2,\ P3,\ P4\}$

W ¿Un subconjunto de pantanos "vacíos"?

Comunidad: Comunidad Valenciana				
Agua embalsada (06-05-2019):	979	hm³	40.01	%
Variacion semana Anterior:	14	hm³	0.57	%
Capacidad:	2447	hm³		
Misma Semana (2018):	736	hm³	30.08	%
Misma Semana (Med. 10 Años):	1111	hm³	45.41	%



Embalses en Comunidad Valenciana

Pantano		Capacidad	Embalsada	Variacion
ALGAR	17%	6	1	0
AMADORIO	37%	16	6	1
ARENOS	69%	137	95	0
BELLUS	16%	69	11	0
BENAGEBER	74%	221	164	5
BENIARRES	70%	27	19	1
BUSEO	50%	8	4	0
CONTRERAS	23%	852	198	8
CORTES II	89%	118	105	-7
CREVILLENTE	38%	13	5	1
EL NARANJERO	62%	29	18	-3
EL REGAJO	83%	6	5	0
ESCALONA	5%	99	5	0
FORATA	32%	37	12	0
GUADALEST	54%	13	7	1
LA MUELA	80%	20	16	-1
LA PEDRERA	30%	246	74	0
LORIGUILLA	30%	73	22	-1
MARIA CRISTINA	39%	18	7	0
SICHAR	75%	49	37	2
TOUS - LA RIBERA	42%	379	161	7
ULLDECONA	63%	11	7	0

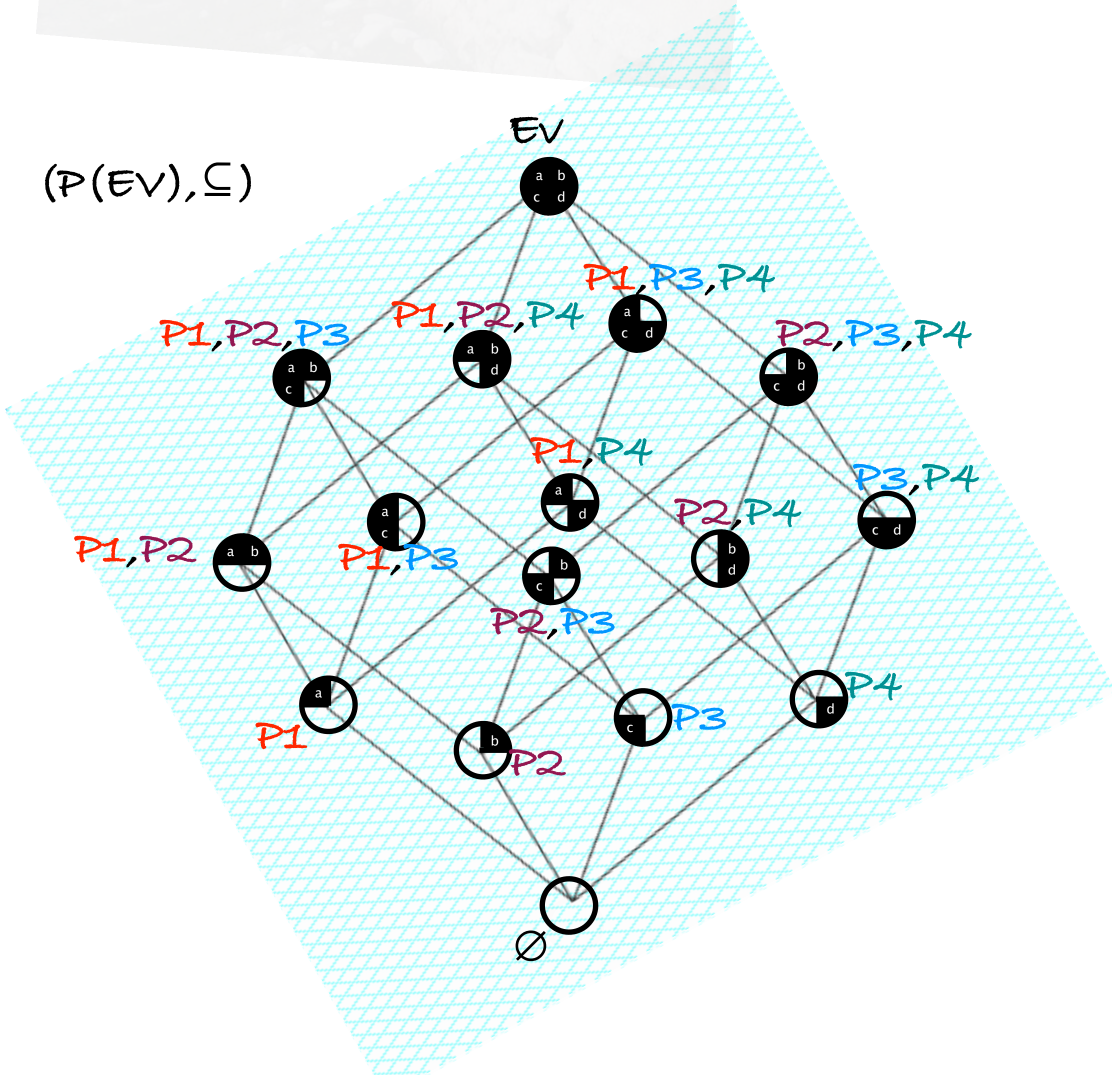
$(\nexists x\colon x \in \emptyset)$?

De caminata por un vacío Embalse

EV={AlBeConCrEsLapLo, AmBuFoMcrTo, ArElnGuLamUll, BeBenCoElrSí }={ P1, P2, P3, P4 }

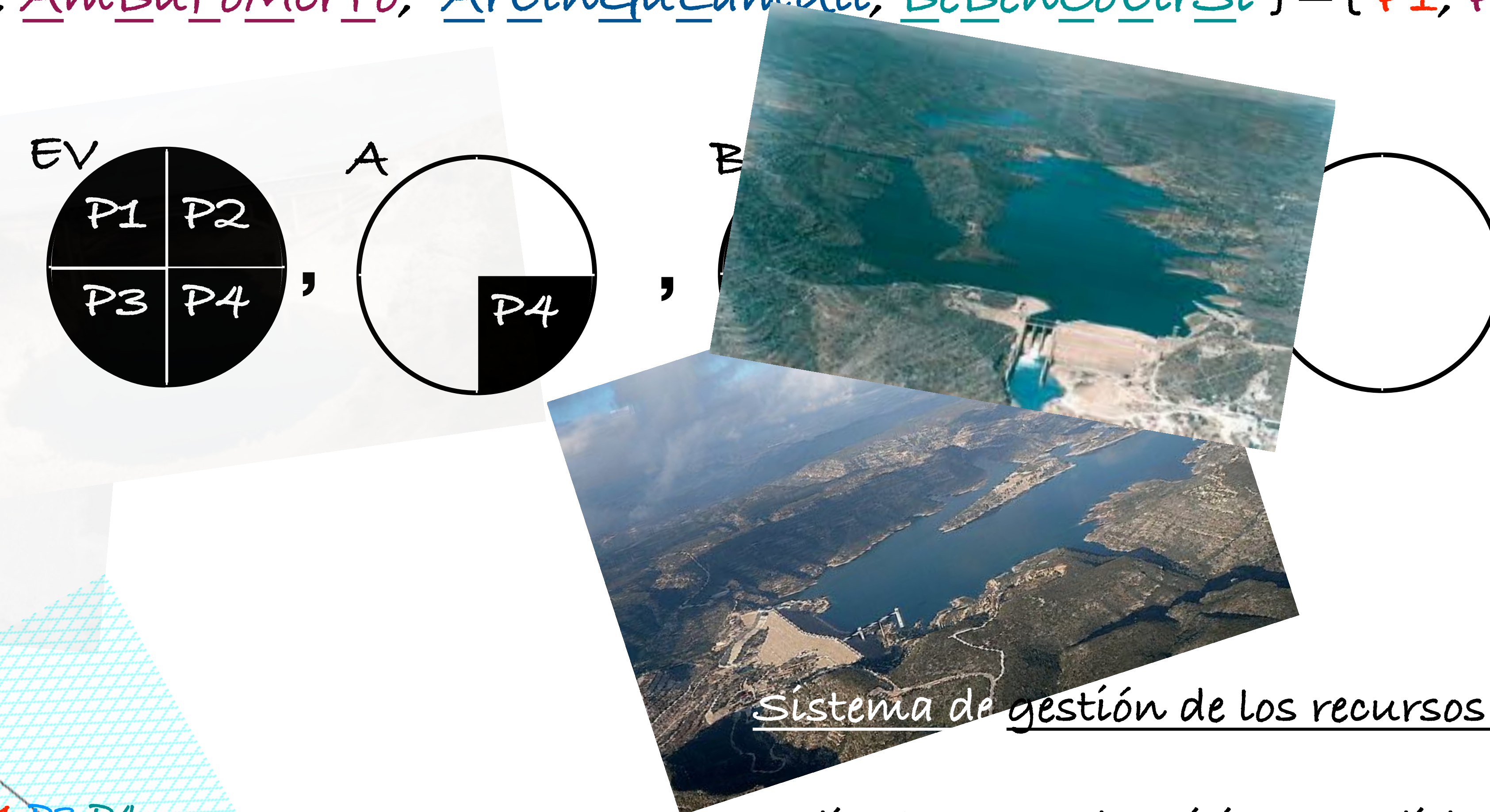
•••

EV={AlBeConCrEsLapLo, AmBuFoMcrTo, ArElnGuLamUll, BeBenCoElrSí}={P1, P2, P3, P4}

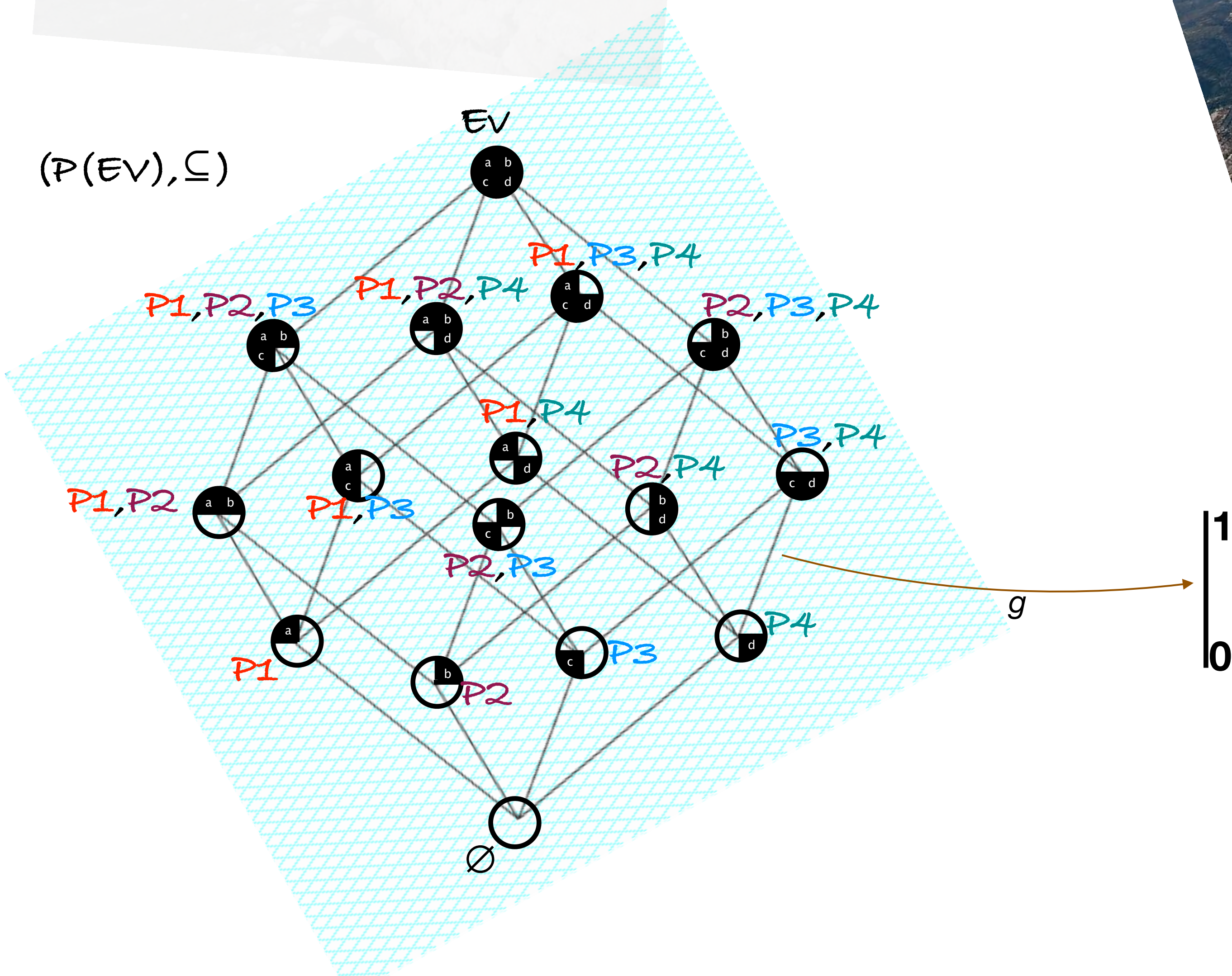


EV={AlBeConCrEsLapLo, AmBuFoMcrTo, ArElnGuLamUll, BeBenCoElrSi}={P1, P2, P3, P4}

$P(EV) = \{$



$\}$



Sistema de gestión de los recursos de EV.

En su diseño se puede utilizar medidas borrosas:

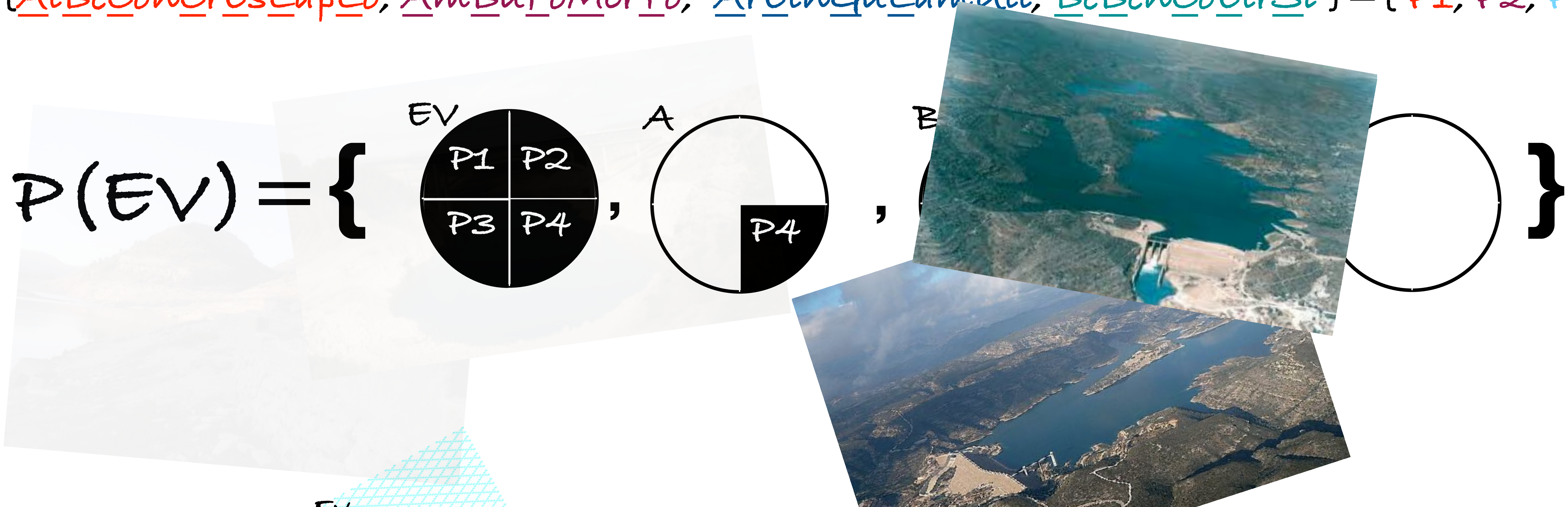
g: (P(EV),⊆)→ ($\mathbb{R}^+$,≤) ó g: (P(EV),⊆)→ ([0.1],≤),

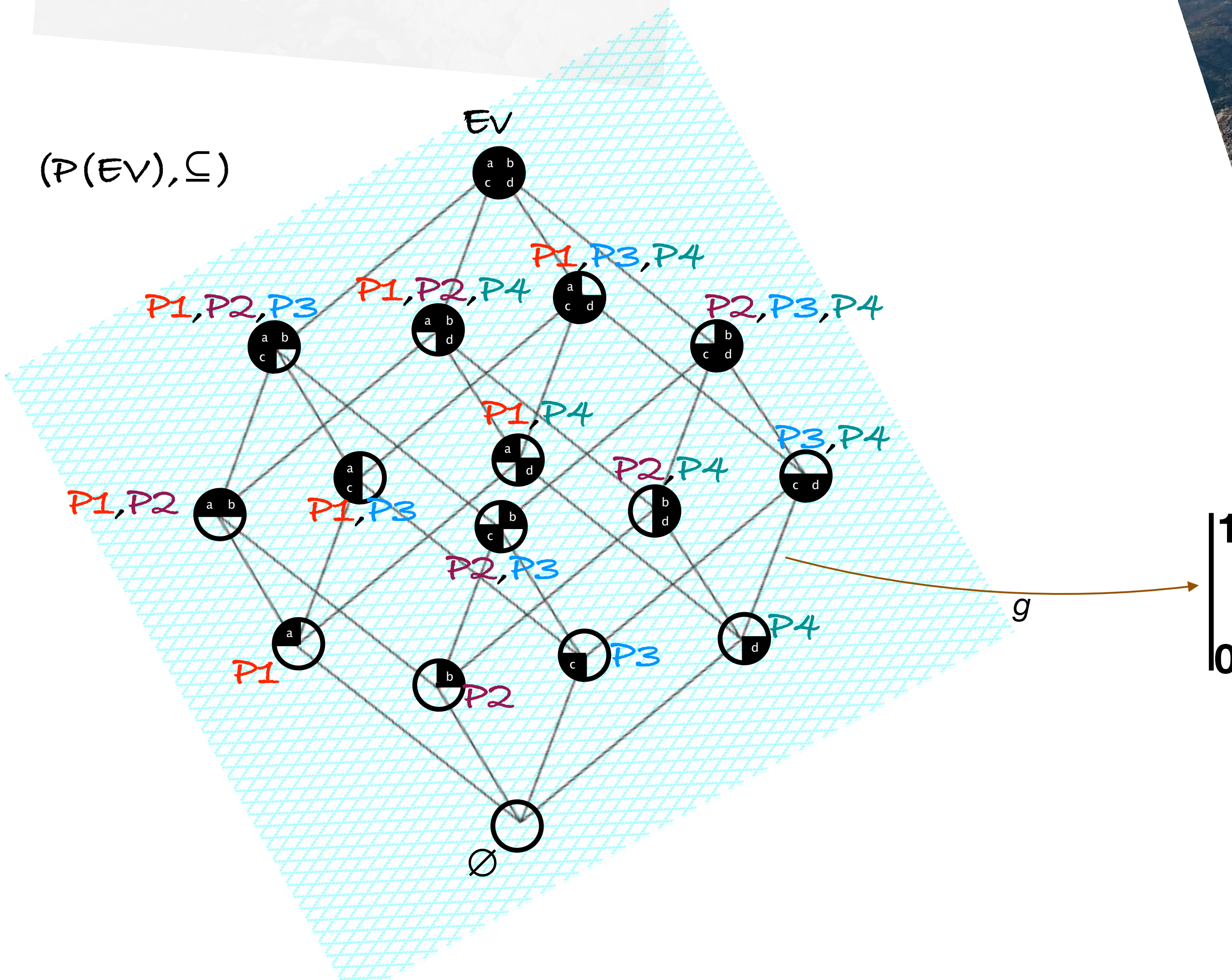
que verifiquen propiedades como

g(∅)=0 ,g(EV)=1 , (A⊆B)⇒(g(A) ≤ g(B)),

g(A∪B)=max(g(A),g(B)), etc,...

EV = {AlBeConCrEsLapLo, AmBuFoMcrTo, ArElnGuLamUll, BeBenCoElrSi} = {P1, P2, P3, P4}





Sistema de gestión de los recursos de EV.

En su diseño se puede utilizar medidas borrosas:

$g: (\mathcal{P}(EV), \subseteq) \rightarrow (\mathbb{R}^+, \leq)$ ó $g: (\mathcal{P}(EV), \subseteq) \rightarrow ([0.1], \leq)$,

que verifiquen propiedades como

$g(\emptyset) = 0$, $g(EV) = 1$, $(A \subseteq B) \Rightarrow (g(A) \leq g(B))$,

$g(A \cup B) = \max(g(A), g(B))$, etc,...

O quizá también medidas nítidas:

como una probabilidad $Pr: (\mathcal{P}(EV), \subseteq) \rightarrow ([0.1], \leq)$,

que verifica

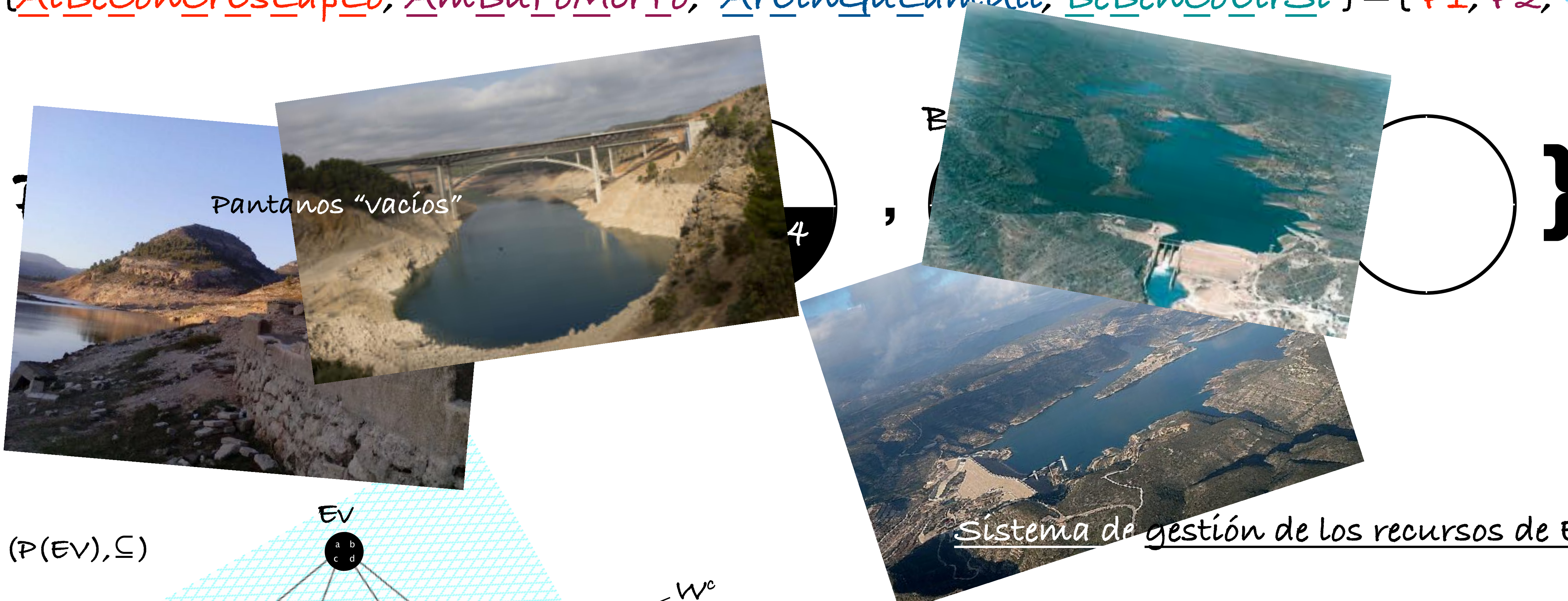
$Pr(\emptyset) = 0$, $Pr(EV) = 1$, $(A \subseteq B) \Rightarrow (Pr(A) \leq Pr(B))$,

$Pr(A \cup B) = Pr(A) + Pr(B) - Pr(A \cap B)$.

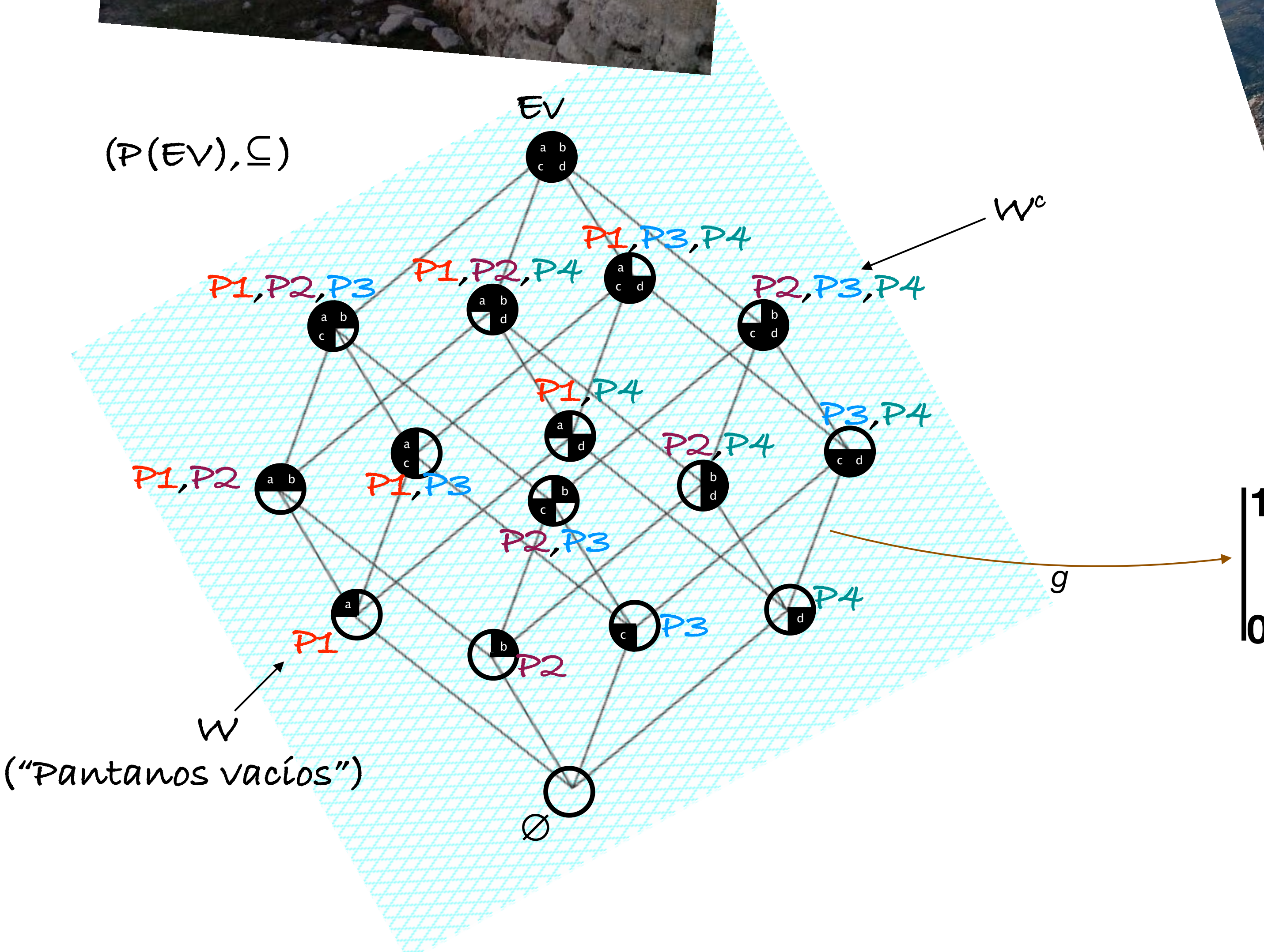
O probabilidades condicionadas:

$Pr^*(A/B) = Pr(A \cap B)/Pr(A)$, etc...

$EV = \{$AlBeConCrEsLapLo, AmBuFoMcrTo, ArElnGuLamUll, BeBenCoElrSi$\} = \{$P1, P2, P3, P4$\}$



Sistema de gestión de los recursos de EV.



En su diseño se puede utilizar medidas borrosas:

$g: (P(EV),\subseteq) \rightarrow (\mathbb{R}^+,\leq)$ ó $g: (P(EV),\subseteq) \rightarrow ([0.1],\leq)$,

que verifiquen propiedades como

$g(\emptyset)=0$, $g(EV)=1$, $(A\subseteq B) \Rightarrow (g(A) \leq g(B))$,

$g(A\cup B)=\max(g(A),g(B))$, etc,...

O quizá también medidas nítidas:

como una probabilidad $Pr: (P(EV),\subseteq) \rightarrow ([0.1],\leq)$,

que verifica

$Pr(\emptyset)=0$, $Pr(EV)=1$, $(A\subseteq B) \Rightarrow (Pr(A) \leq Pr(B))$,

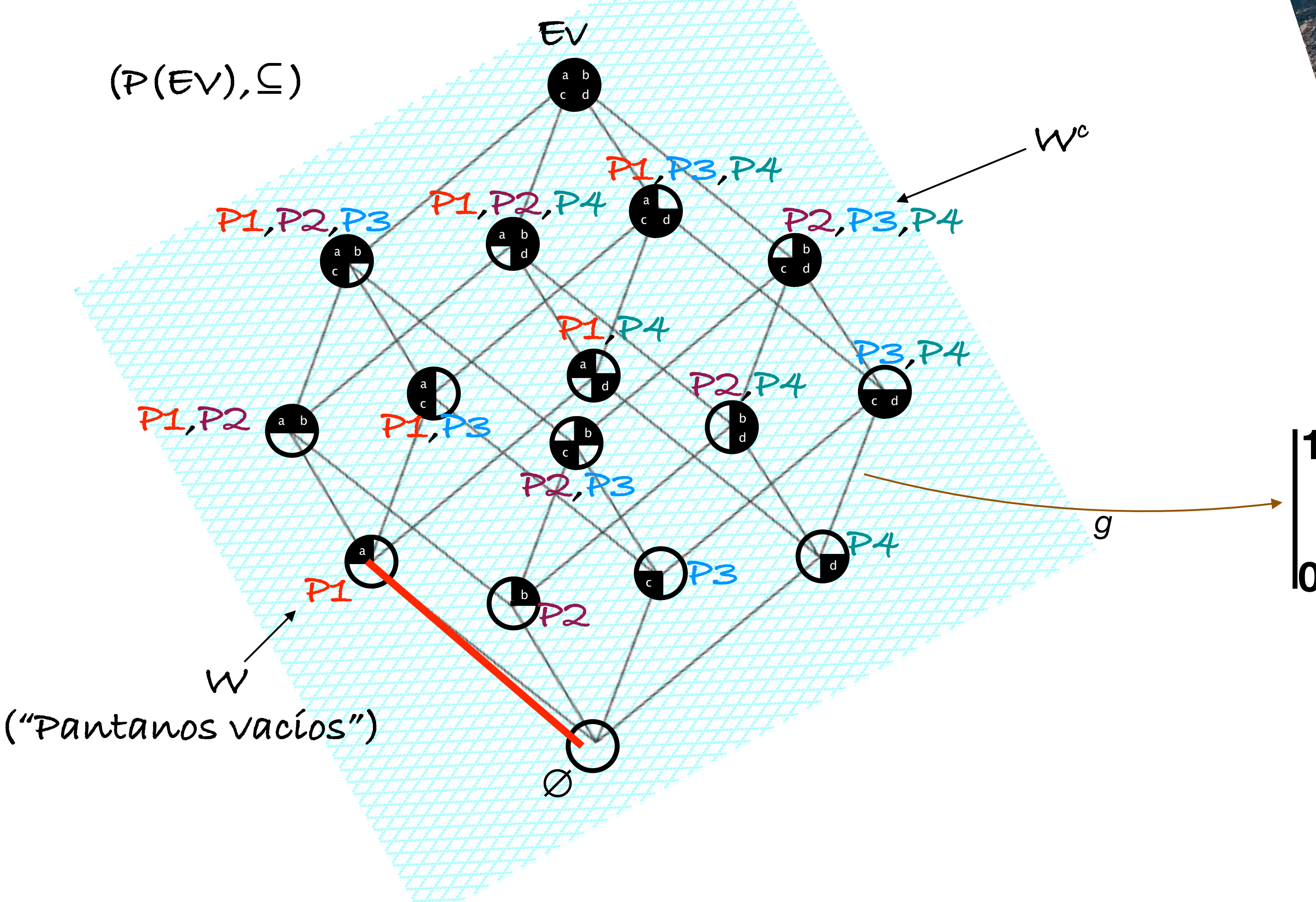
$Pr(A\cup B)=Pr(A)+Pr(B)-Pr(A\cap B)$.

O probabilidades condicionadas:

$Pr^*(A/B)=Pr(A\cap B)/Pr(A)$, etc...

EV={AlBeConCrEsLapLo, AmBuFoMcrTo, ArElnGuLamUll, BeBenCoElrSi }={ P1, P2, P3, P4 }

P1={Algar Crevillente , Escalona Belluz Loriguilla , Contreras La Pedrera}



En su diseño se puede utilizar medidas borrosas:

$g: (\mathcal{P}(EV),\subseteq) \to (\mathbb{R}^+,\leq)$ ó $g: (\mathcal{P}(EV),\subseteq) \to ([0.1],\leq)$,

que verifiquen propiedades como

$g(\emptyset)=0$, $g(EV)=1$, $(A\subseteq B)\Rightarrow(g(A)\leq g(B))$,

$g(A\cup B)=\max(g(A),g(B))$, etc,...

O quizá también medidas nítidas:

como una probabilidad $Pr: (\mathcal{P}(EV),\subseteq) \to ([0.1],\leq)$,

que verifica

$Pr(\emptyset)=0$, $Pr(EV)=1$, $(A\subseteq B)\Rightarrow(Pr(A)\leq Pr(B))$,

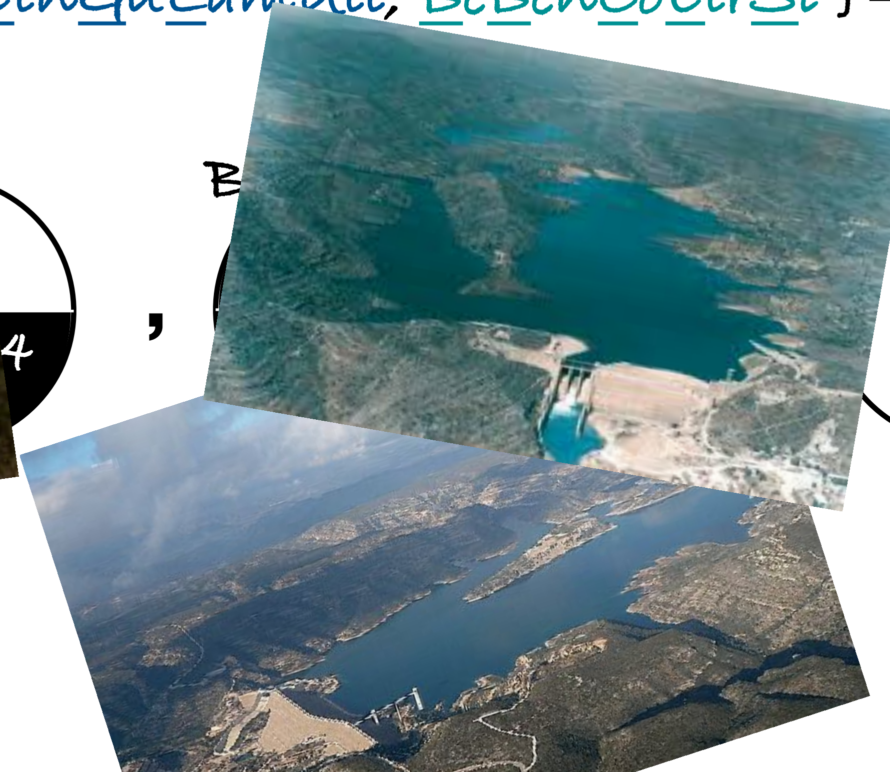
$Pr(A\cup B)=Pr(A)+Pr(B)-Pr(A\cap B)$.

O probabilidades condicionadas:

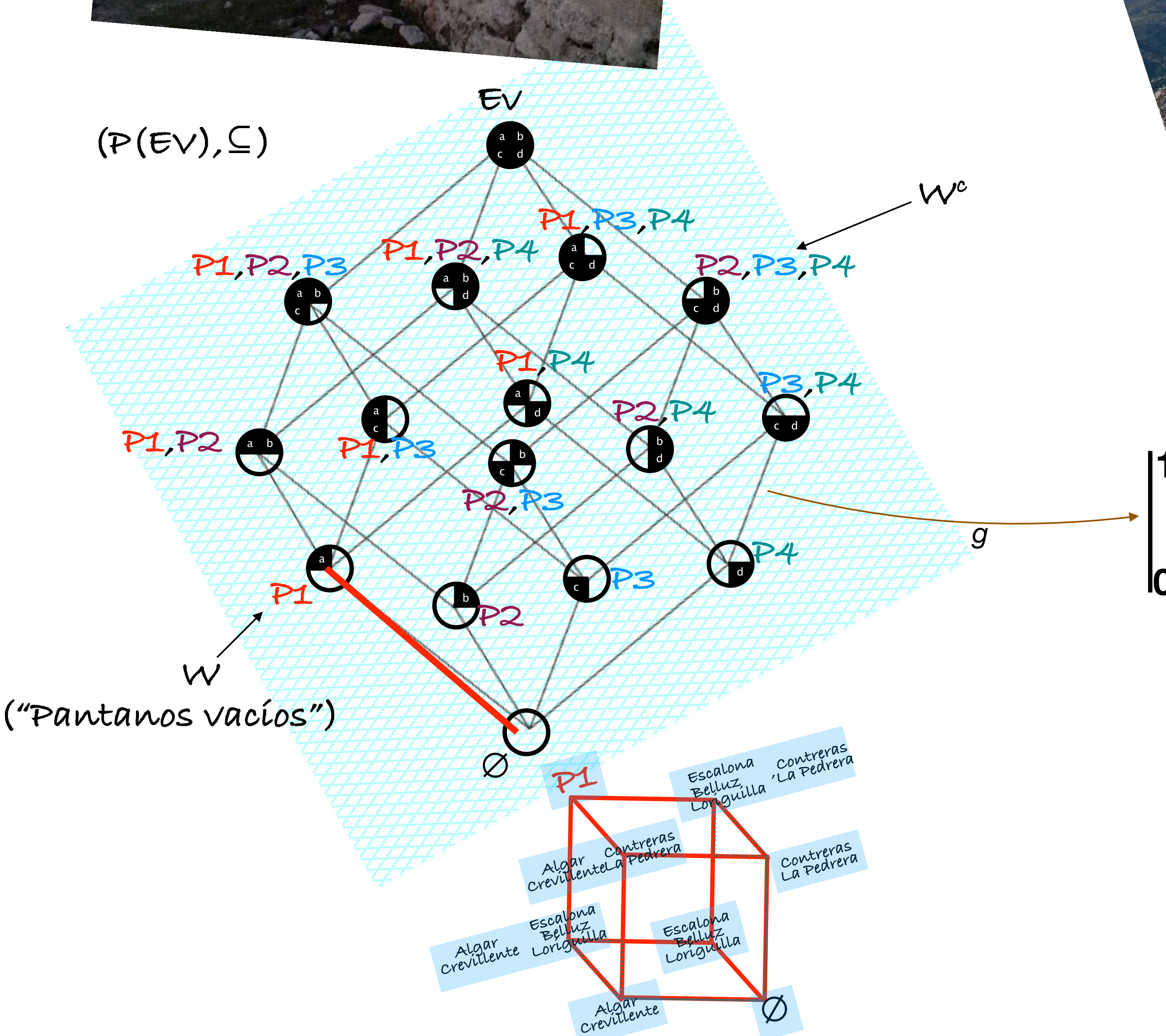
$Pr^*(A/B)=Pr(A\cap B)/Pr(A)$, etc...

EV={AlBeConCrEsLapLo, AmBuFoMcrTo, ArElnGuLamUll, BeBenCoElrSi}={P1, P2, P3, P4}

P1={Algar Crevillente, Escalona Belluz Loriguilla, Contreras La Pedrera}



Sistema de gestión de los recursos de EV.



En su diseño se puede utilizar medidas borrosas:

$g: (P(EV),\subseteq) \rightarrow (\mathbb{R}^+,\leq)$ ó $g: (P(EV),\subseteq) \rightarrow ([0.1],\leq)$,

que verifiquen propiedades como

$g(\emptyset)=0$, $g(EV)=1$, $(A\subseteq B) \Rightarrow (g(A) \leq g(B))$,

$g(A\cup B)=\max(g(A),g(B))$, etc,...

O quizá también medidas nítidas:

como una probabilidad $Pr: (P(EV),\subseteq) \rightarrow ([0.1],\leq)$,

que verifica

$Pr(\emptyset)=0$, $Pr(EV)=1$, $(A\subseteq B) \Rightarrow (Pr(A)\leq Pr(B))$,

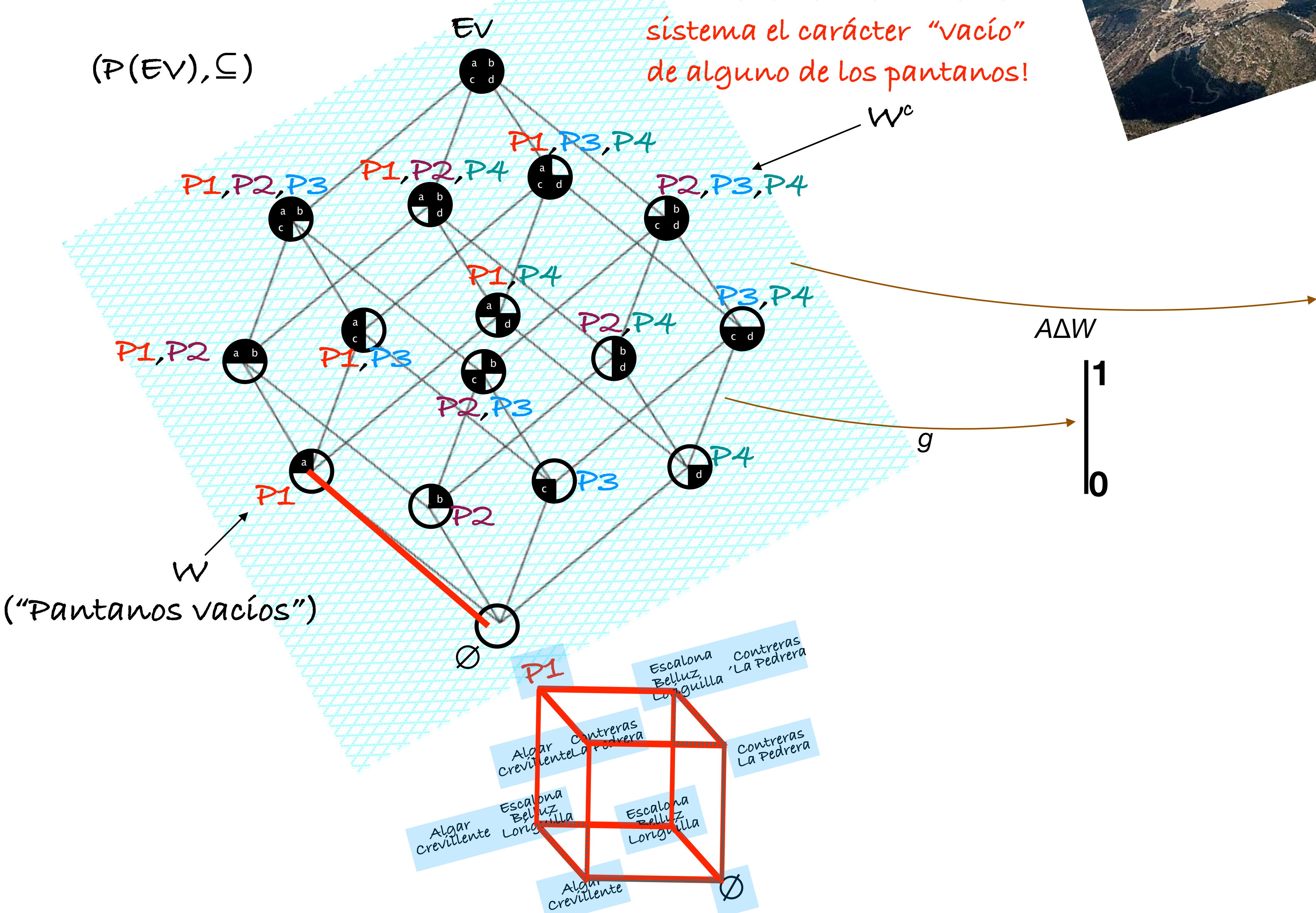
$Pr(A\cup B)=Pr(A)+Pr(B)-Pr(A\cap B)$.

O probabilidades condicionadas:

$Pr^*(A/B)=Pr(A\cap B)/Pr(A)$, etc...

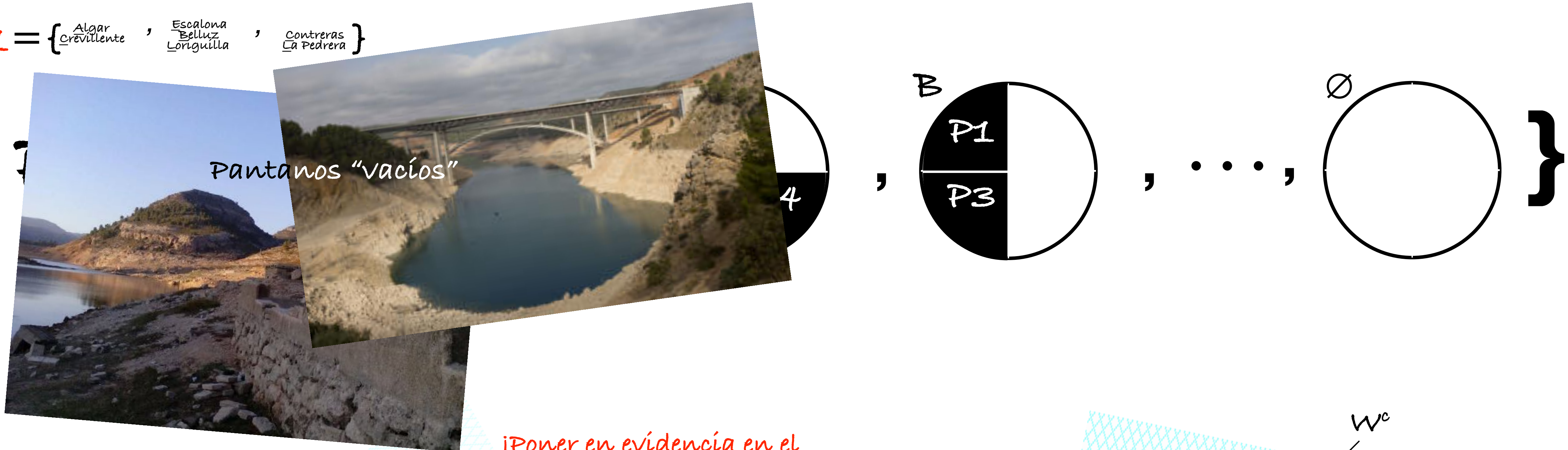
$Ev = \{$AlBeConCrEsLapLo, AmBuFoMcrTo, ArElnGuLamUll, BeBenCoElrSí$\} = \{$P1, P2, P3, P4$\}$

P1 $= \{$ Algar Crevillente , Escalona Belluz Loriguilla , Contreras La Pedrera $\}$

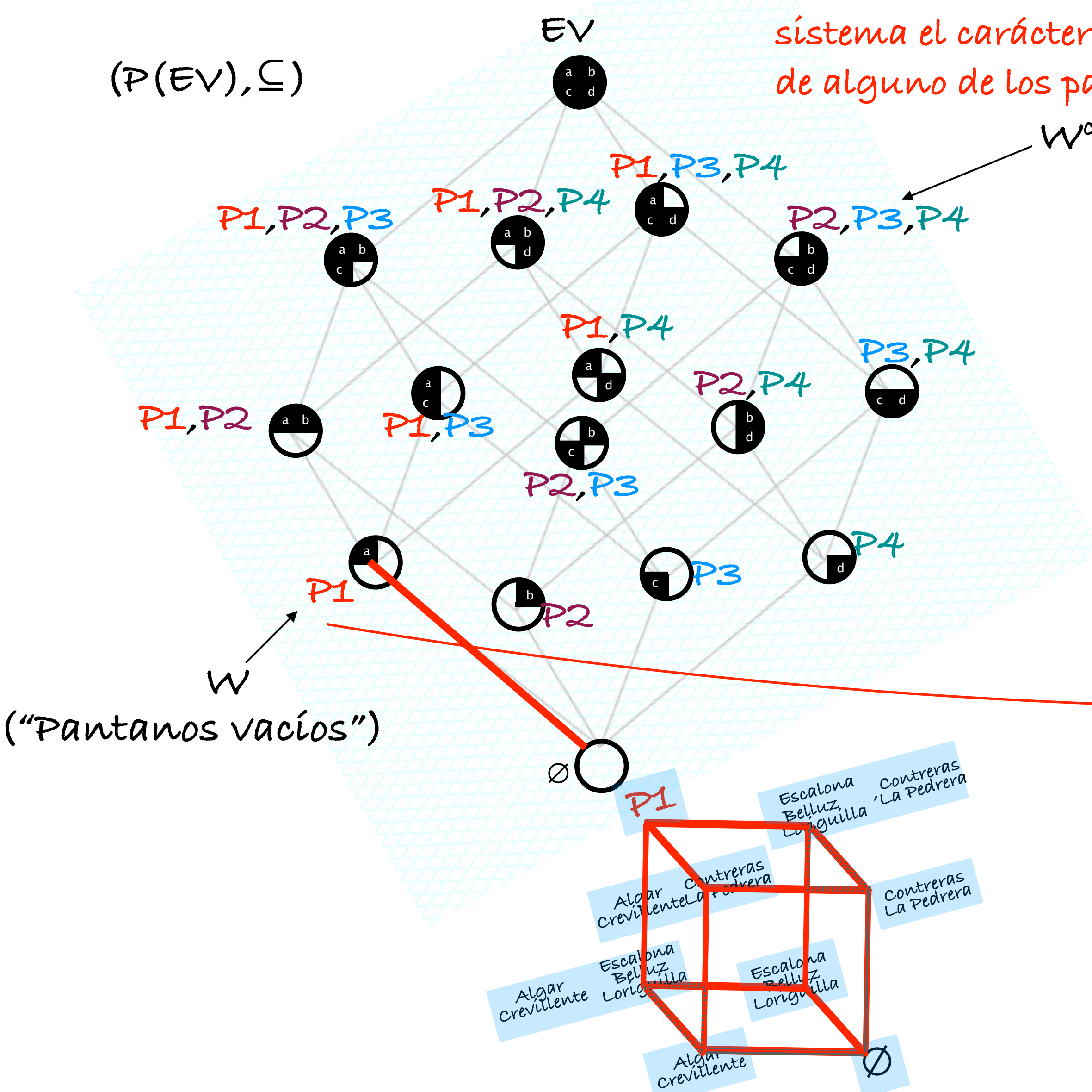


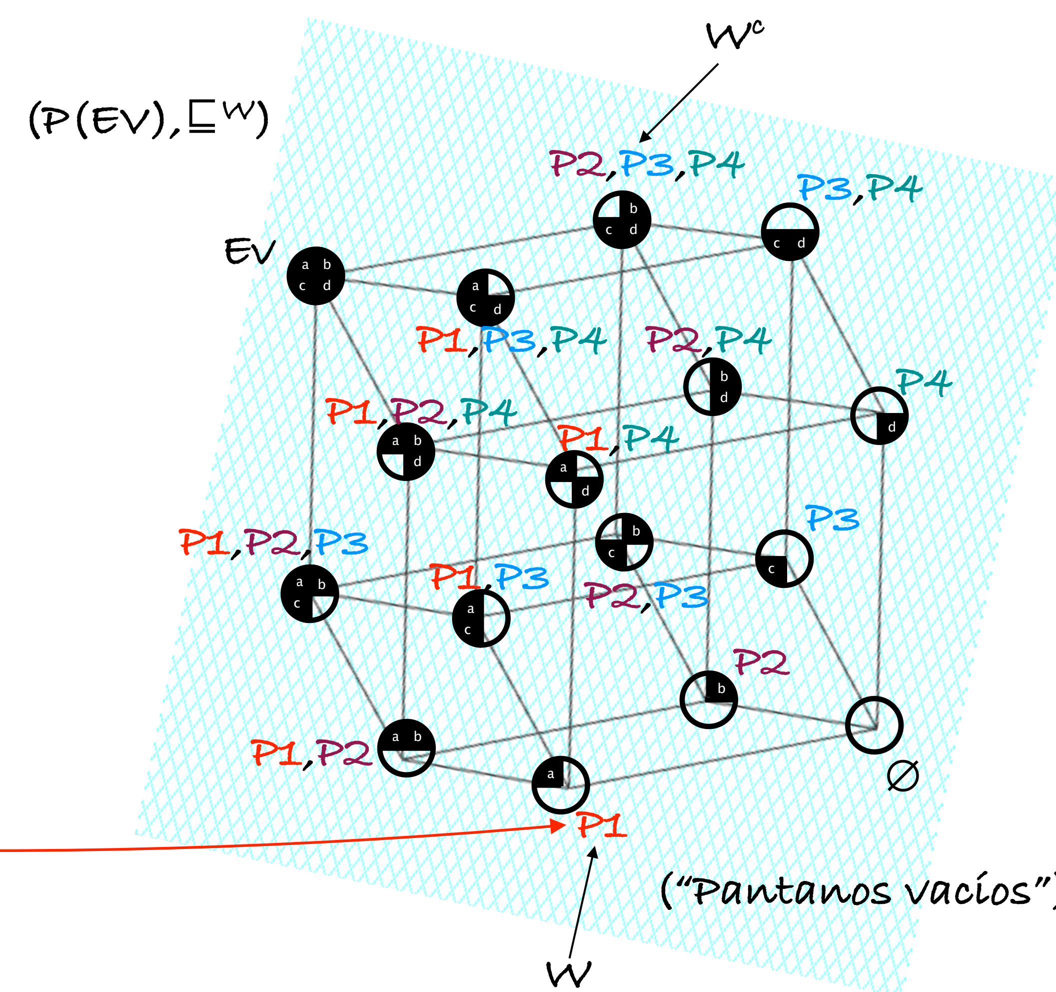
EV={AlBeConCrEsLapLo, AmBuFoMcrTo, ArElnGuLamUll, BeBenCoElrSi}={P1, P2, P3, P4}

P1={Algar Crevillente, Escalona Belluz Loriguilla, Contreras La Pedrera}



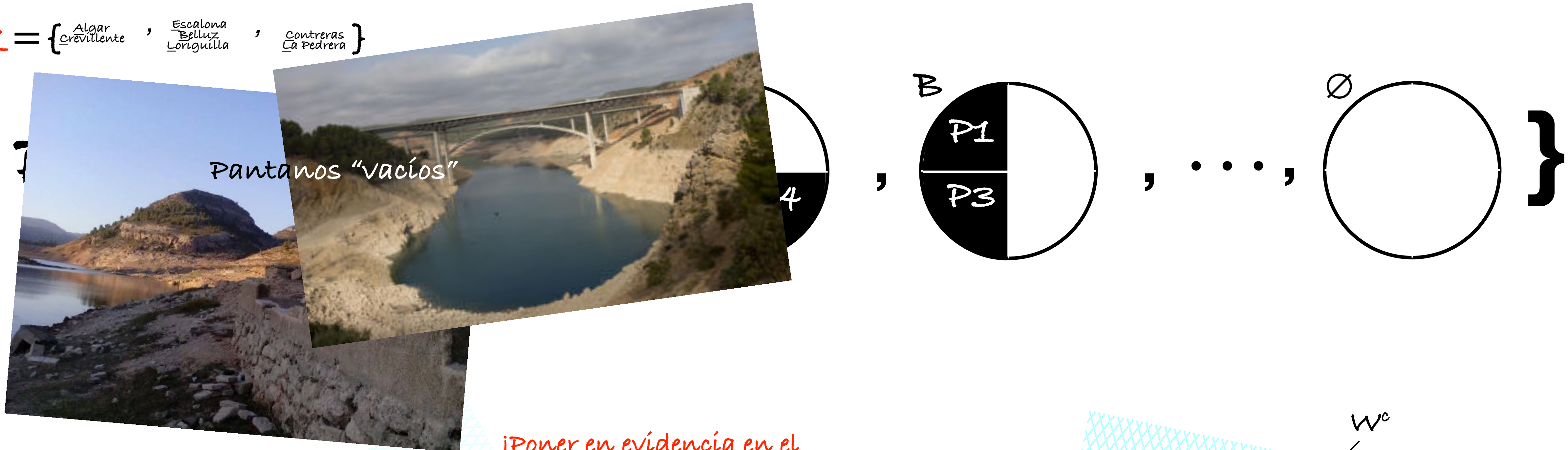
¡Poner en evidencia en el sistema el carácter "vacío" de alguno de los pantanos!



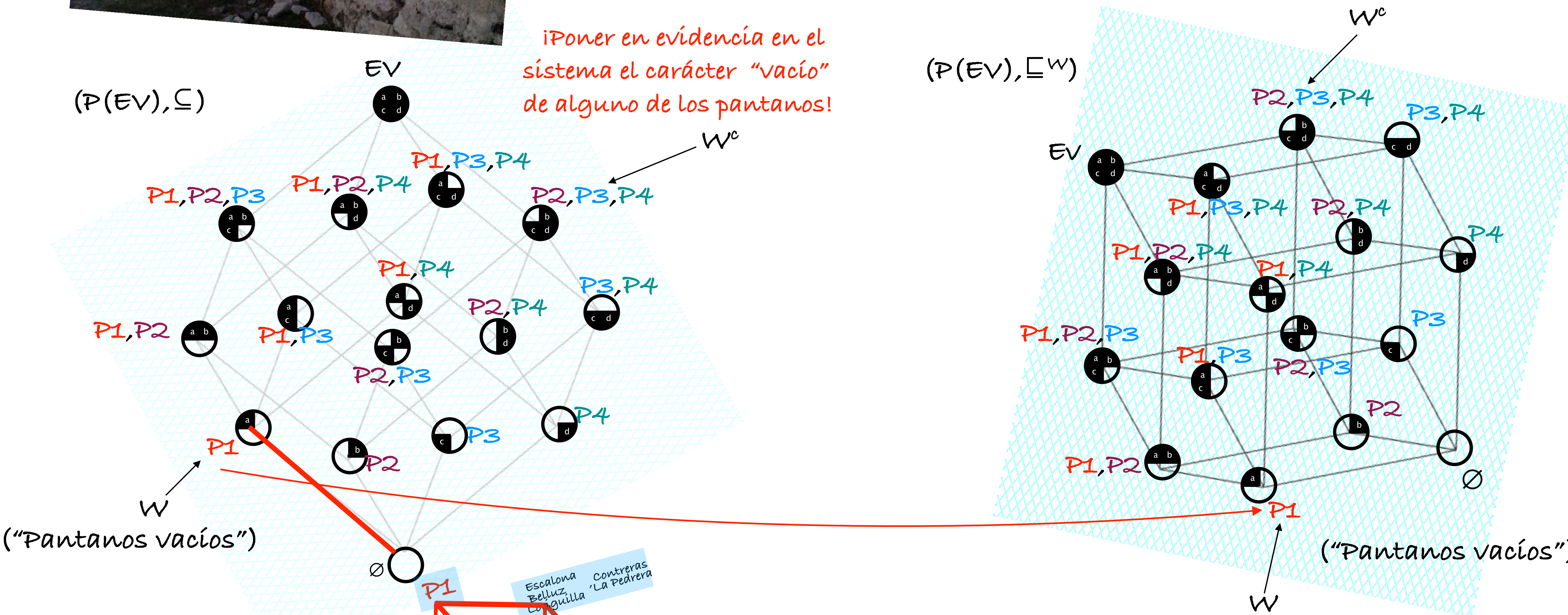


EV = {AlBeConCrEsLapLo, AmBuFoMcrTo, ArElnGuLamUll, BeBenCoElrSi} = {P1, P2, P3, P4}

P1 = {Algar Crevillente, Escalona Belluz Loriguilla, Contreras La Pedrera}



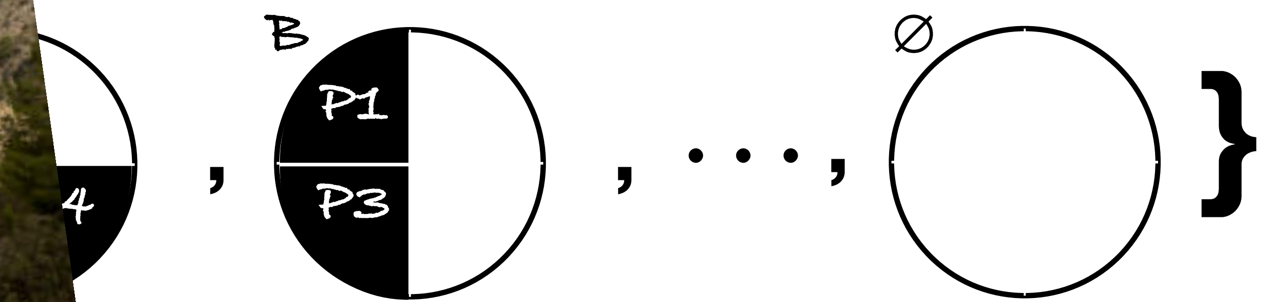
¡Poner en evidencia en el sistema el carácter "vacío" de alguno de los pantanos!



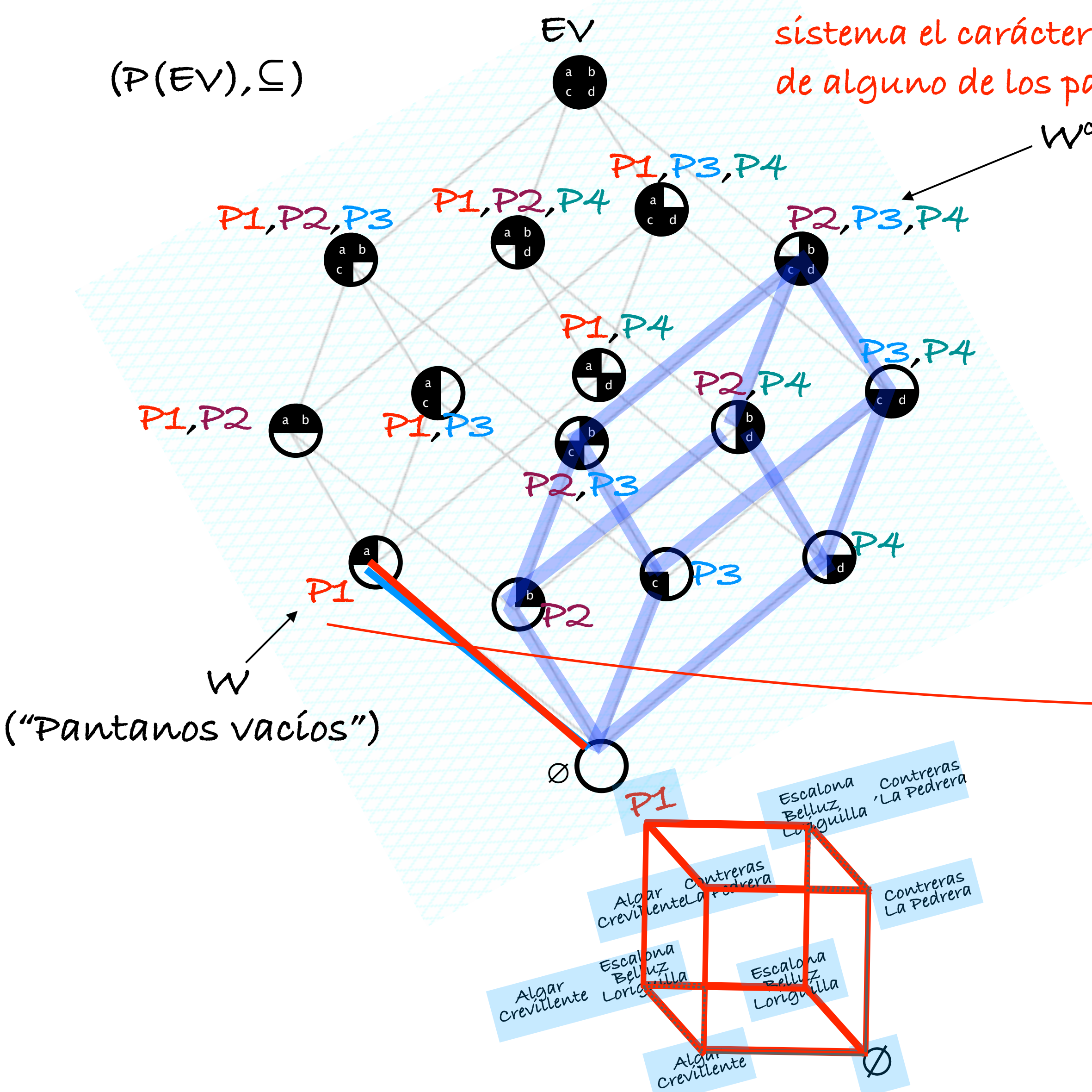
Incorporación al sistema de estados "alarmantes" de algunos pantanos en un periodo determinado...

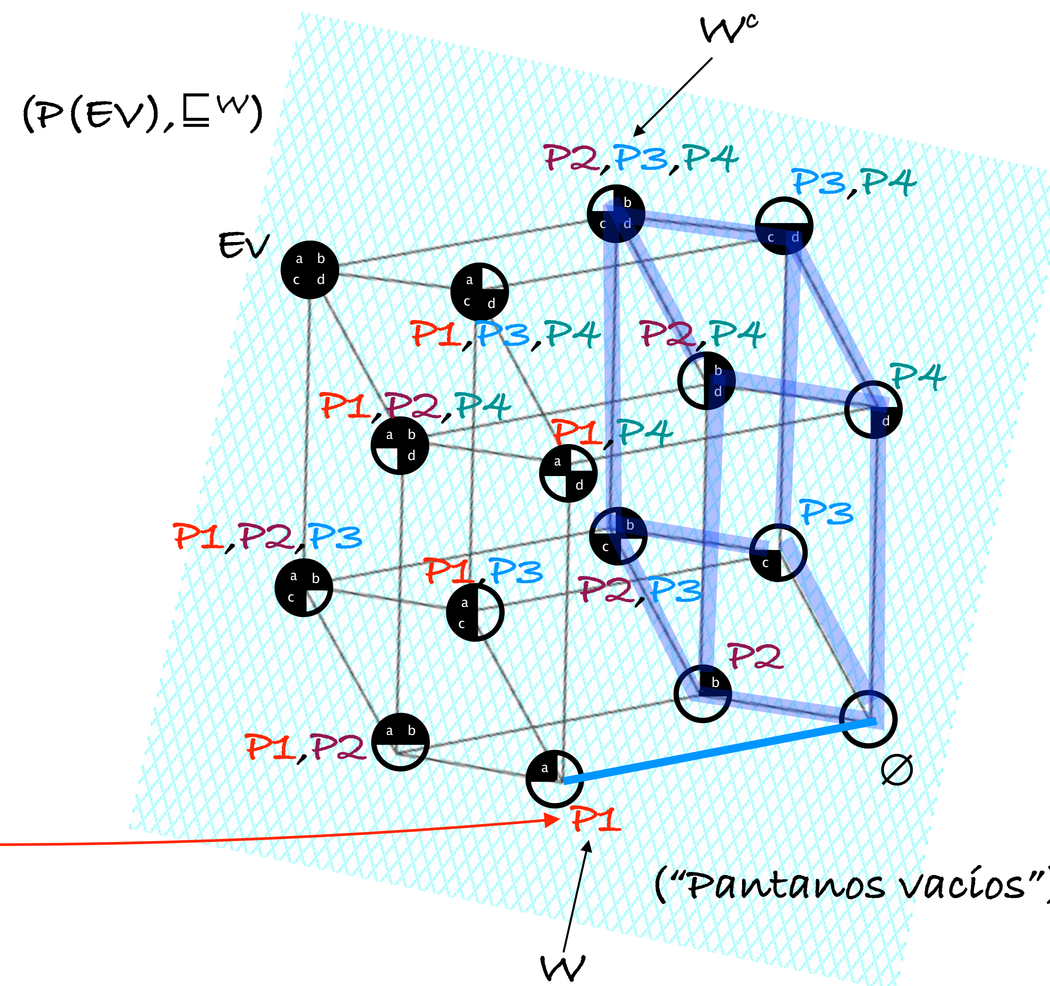
$EV = \{AlBeConCrEsLapLo,\ AmBuFoMcrTo,\ ArElnGuLamUll,\ BeBenCoElrSi\} = \{P1, P2, P3, P4\}$

$P1 = \{$ Algar Crevillente , Escalona Belluz Loriguilla , Contreras La Pedrera $\}$



¡Poner en evidencia en el sistema el carácter "vacío" de alguno de los pantanos!

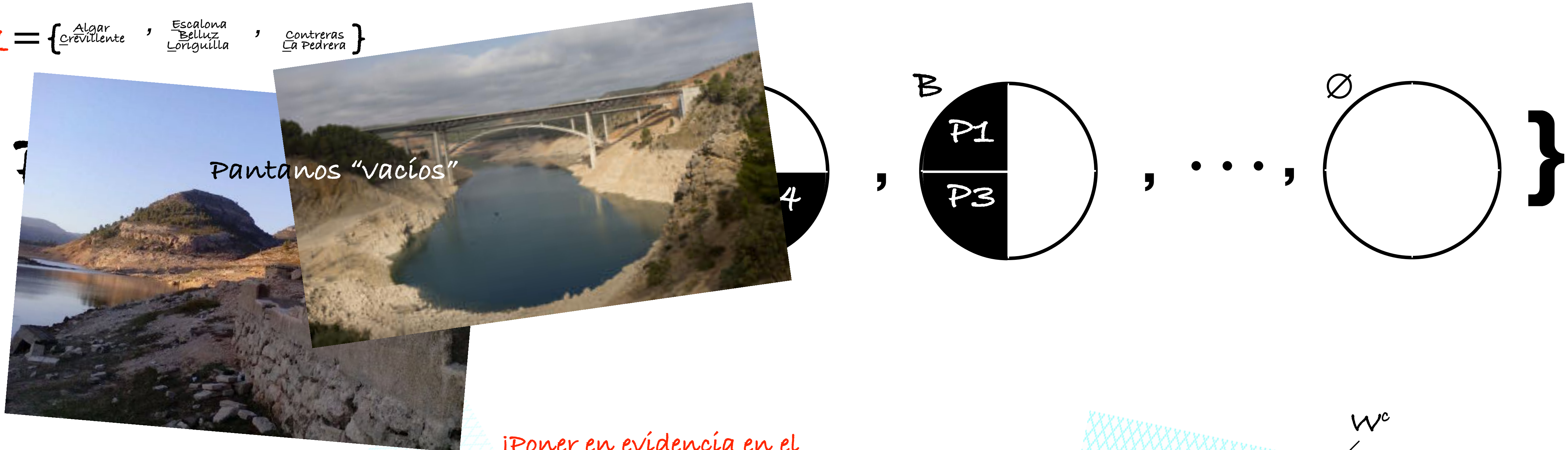




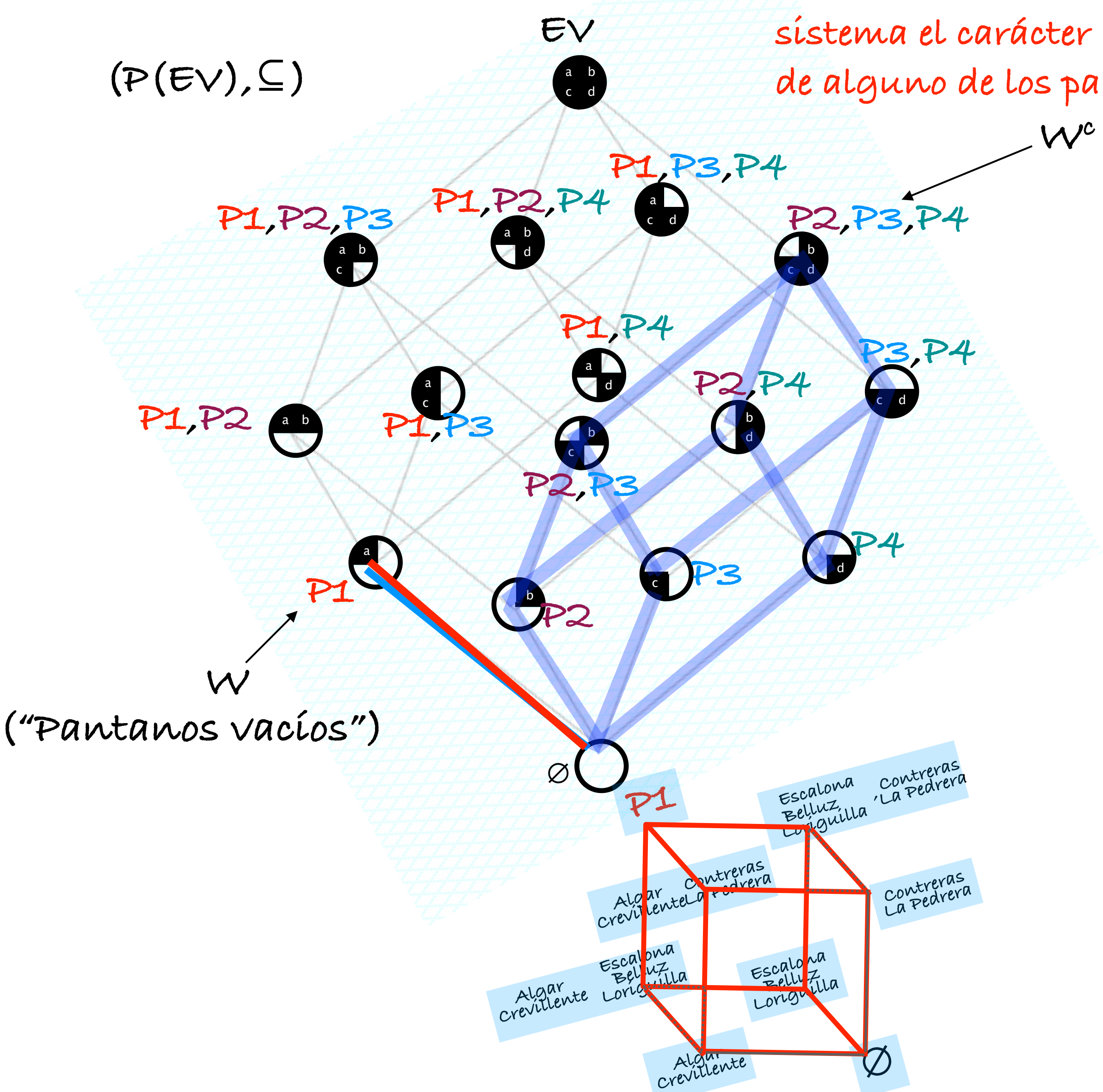
Incorporación al sistema de estados "alarmantes" de algunos pantanos en un período determinado...

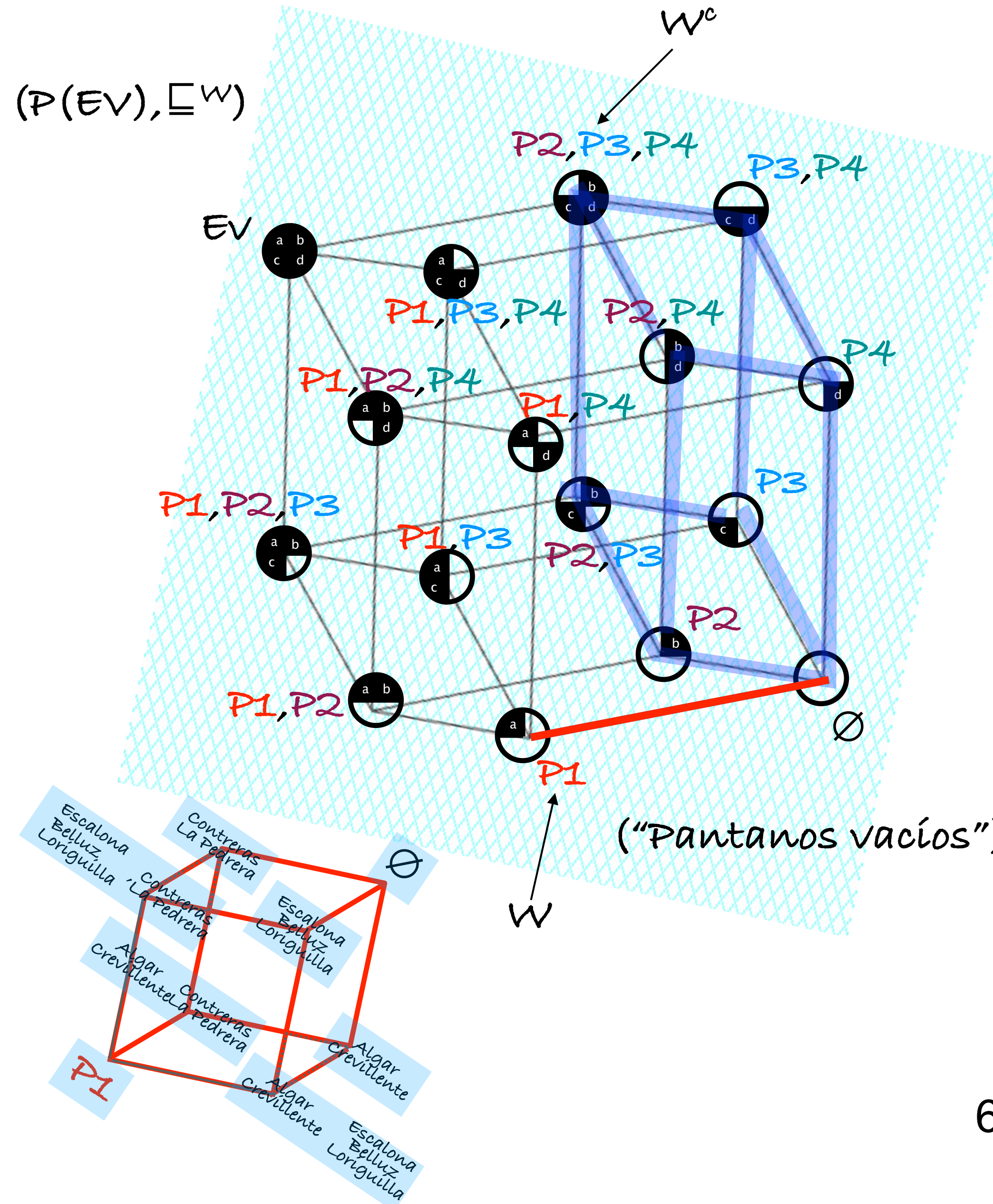
$EV=\{$AlBeConCrEsLapLo, AmBuFoMcrTo, ArElnGuLamUll, BeBenCoElrSi$\}=\{$P1, P2, P3, P4$\}$

P1 $=\{$ Algar Crevillente, Escalona Belluz Loriguilla, Contreras La Pedrera $\}$



¡Poner en evidencia en el sistema el carácter "vacío" de alguno de los pantanos!

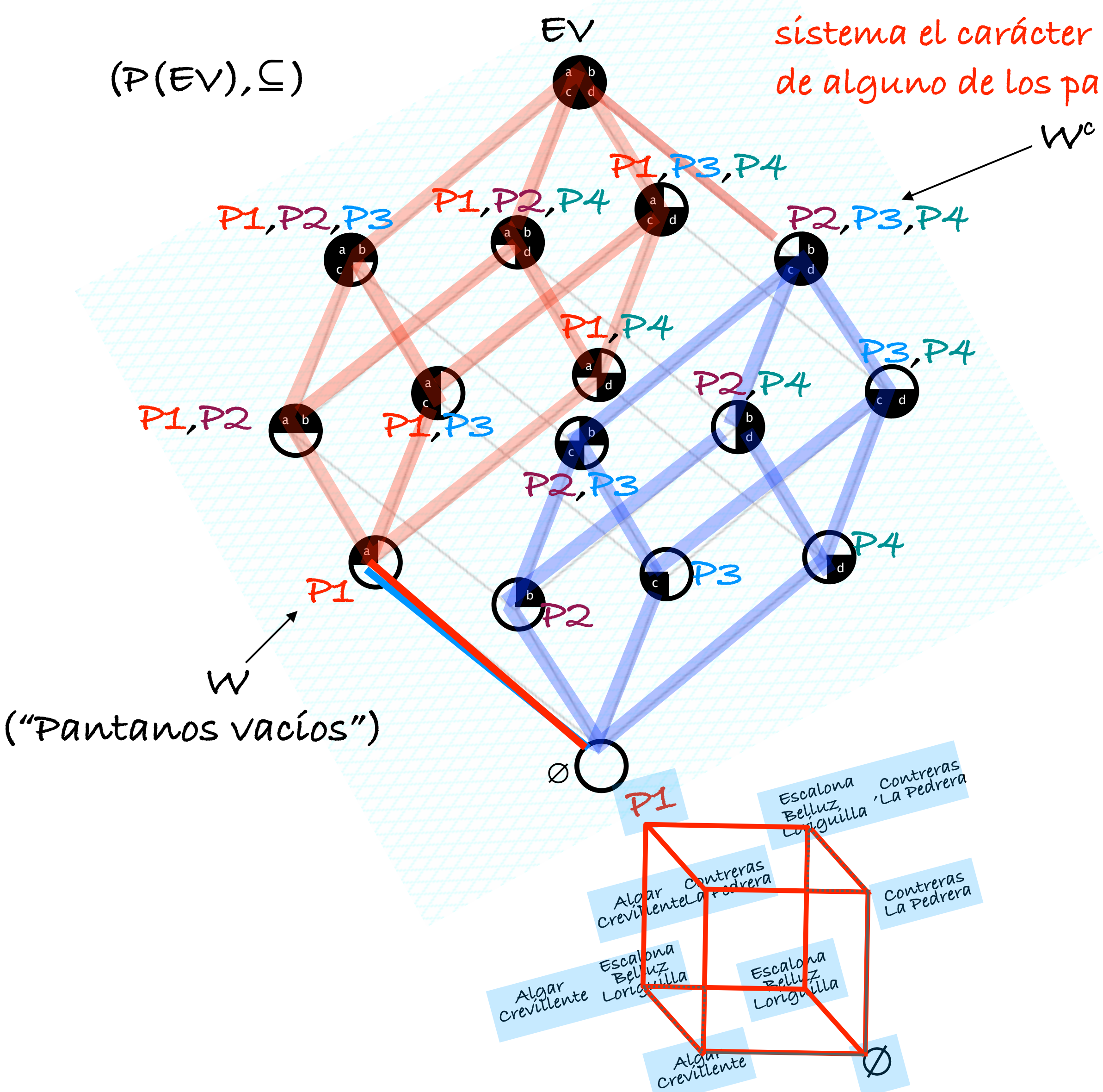


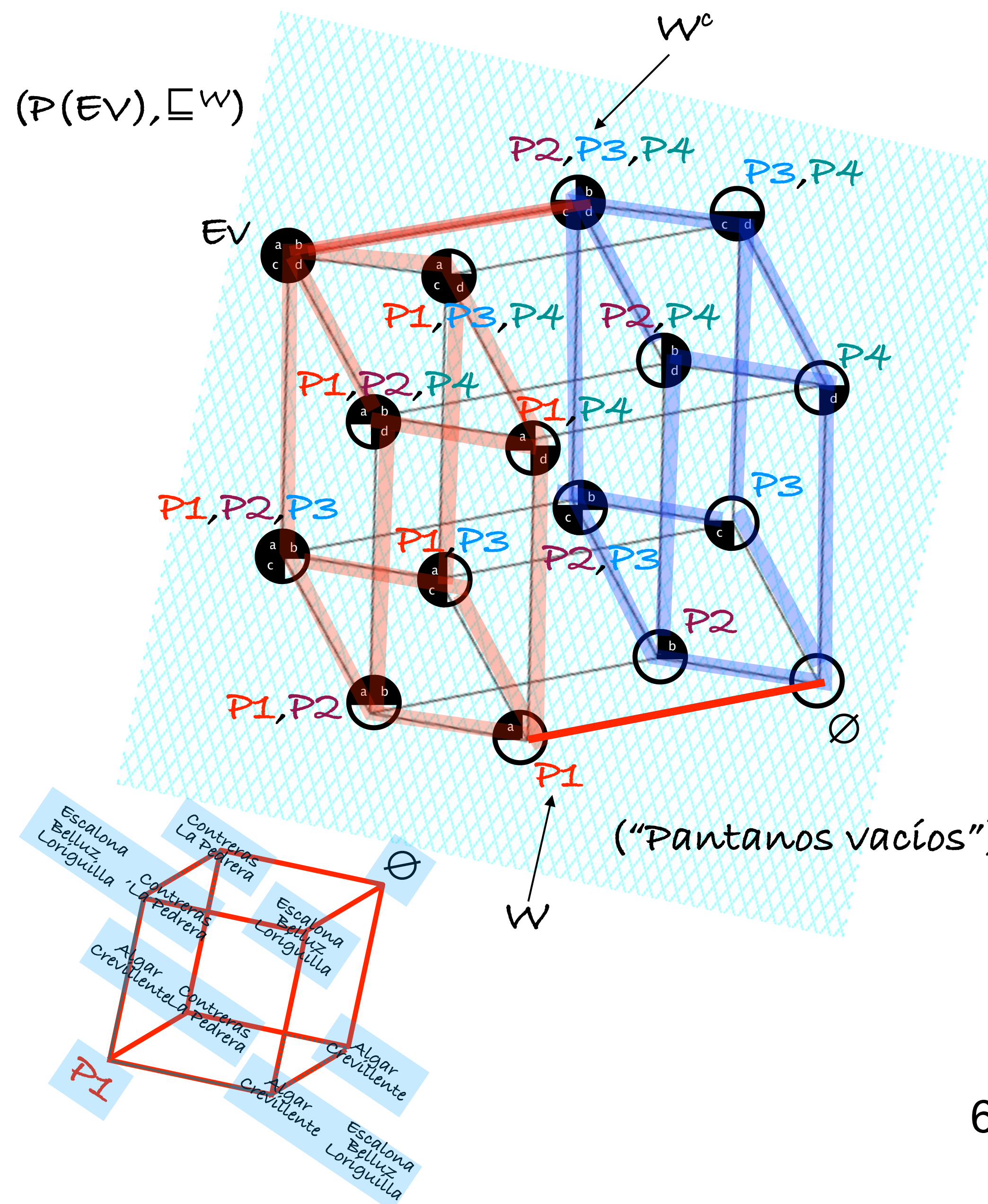


EV={AlBeConCrEsLapLo, AmBuFoMcrTo, ArElnGuLamUll, BeBenCoElrSi }={ P1, P2, P3, P4 }

P1={Algar Crevillente, Escalona Belluz Loriguilla, Contreras La Pedrera}

¡Poner en evidencia en el sistema el carácter "vacío" de alguno de los pantanos!





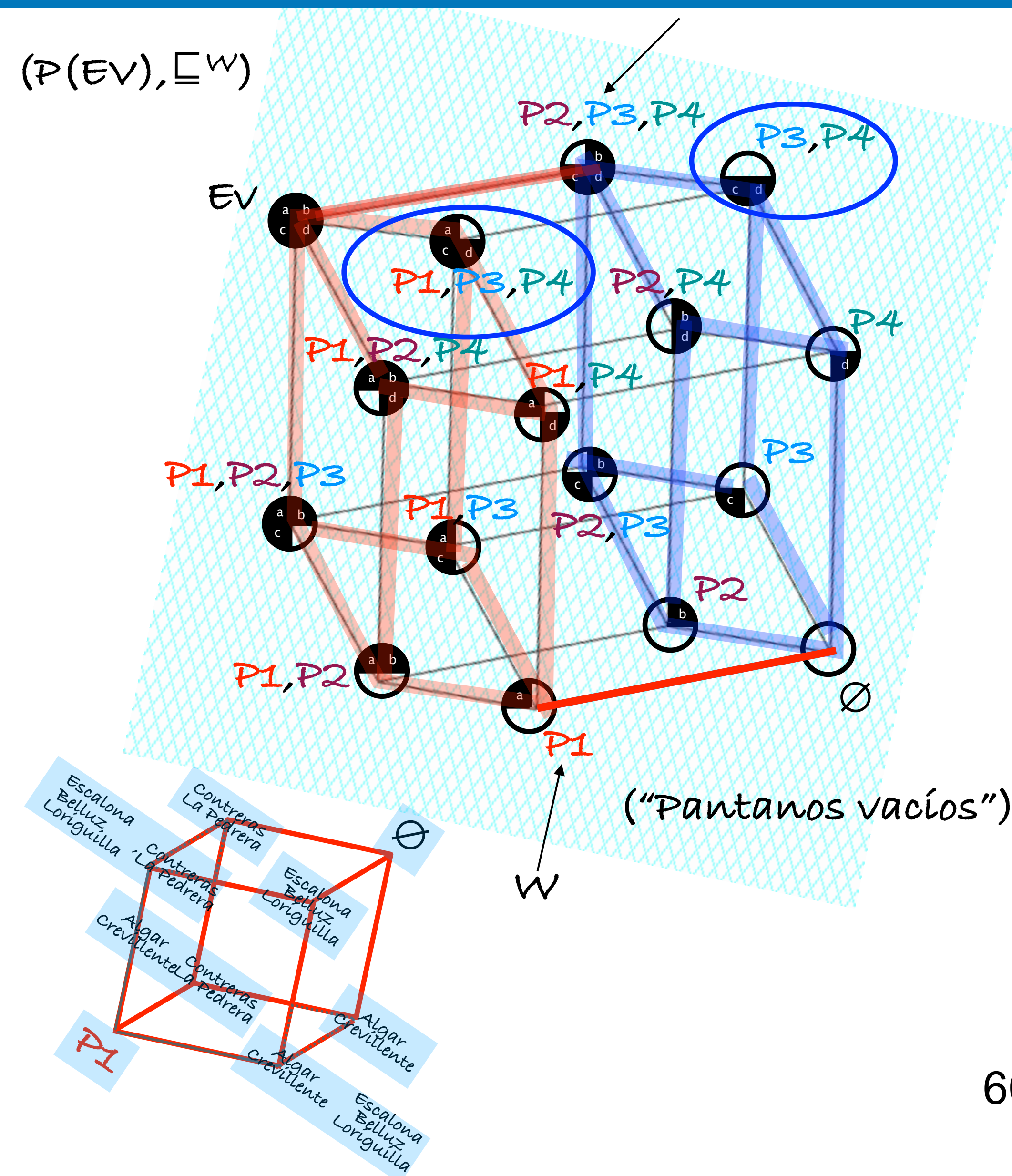
EV={AlBeConCrEsLapLo, AmBuFoMcrTo, ArElnGuLamUll, BeBenCoElrSí}={P1, P2, P3, P4}

$$(P1, P3, P4) \sqsubseteq^{W} (P3, P4)$$

Esta relación puede ser una formalización del siguiente enunciado:

Si lo que prima es el estado de las reservas de agua, entonces, (dado el carácter de "vacío" que tienen los pantanos incluidos en P1); "si la cuestión es la de extraer agua del grupo de pantanos de EV, para hacerlo parece mejor opción (P3, P4) que (P1, P3, P4)".

¡Poner en evidencia en el sistema el carácter "vacío" de alguno de los pantanos!



$EV=\{$AlBeConCrEsLapLo, AmBuFoMcrTo, ArElnGuLamUll, BeBenCoElrSi$\}=\{$ P1, P2, P3, P4 $\}$

(… $\sqsubseteq^W$(P3, P4)

Es … ión del siguiente enunciado:

Si … as de agua, entonces, (dado el carácter de "vací … incluidos en P1); "si la cuestión es la de extraer agua del grup … para hacerlo parece mejor opción (P3, P4) que (P1, P3, P4)".

Coherencia con las propiedades de las medidas borrosas g, las probabilidades Pr, etc:

<u>Sistema de gestión de los recursos de EV.</u>

(Incorporación de "contenido de vacío")

Extensión de medidas borrosas: $\hat{g}_W(A)=g(A\Delta W)$.

$\hat{g}_W: (P(EV),\sqsubseteq^W)\rightarrow(\mathbb{R}^+,\leq)$ ó $\hat{g}_W: (P(EV),\sqsubseteq^W)\rightarrow([0.1],\leq)$,

que, dependiendo de las propiedades de g, verificarán:

$\hat{g}_W(W)=0$, $\hat{g}_W(W^c)=1$, $(A\sqsubseteq^W B)\Rightarrow(\hat{g}_W(A)\leq\hat{g}_W(B))$,

$\hat{g}_W(A\sqcup^W B)=\max(\hat{g}_W(A),\hat{g}_W(B))$, etc,...

O medidas nítidas:

como extensiones de la probabilidad $Pr_W(A)=Pr_W(A\Delta W)$

$Pr_W: (P(EV),\subseteq)\rightarrow([0.1],\leq)$,

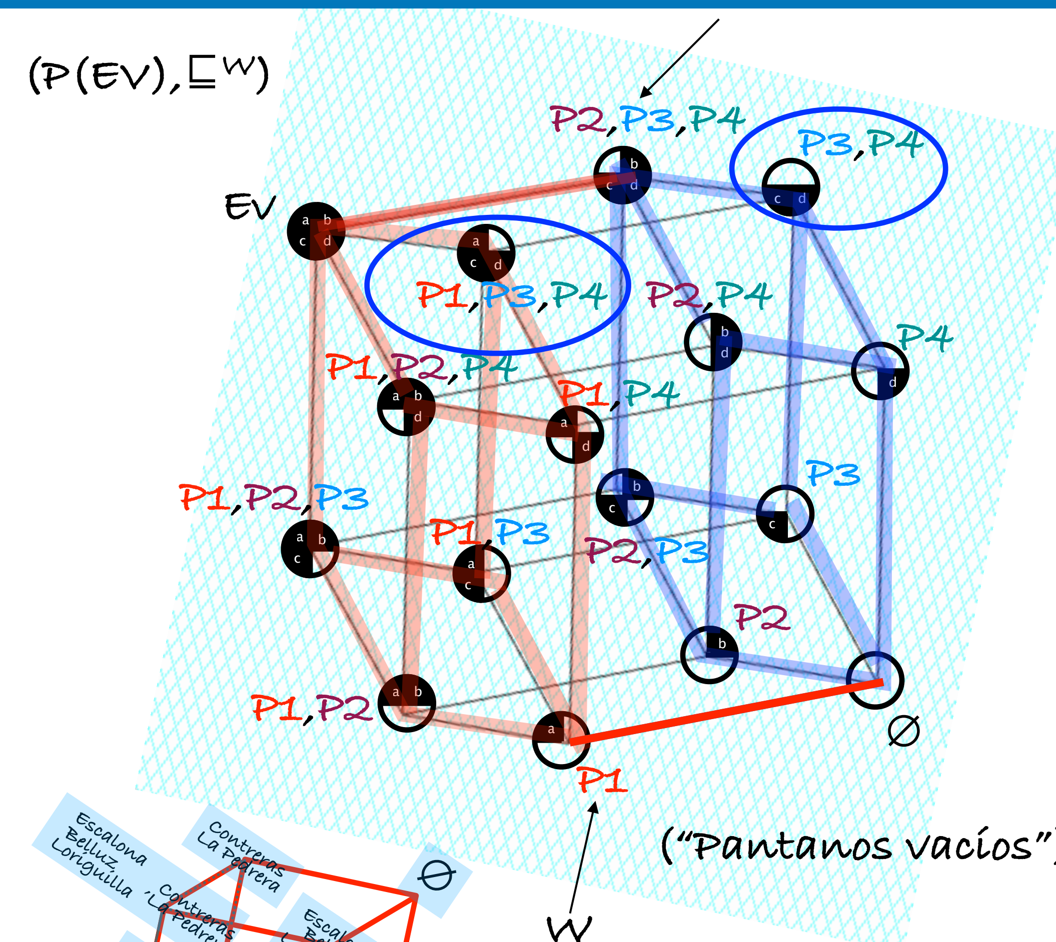
que verificarán:

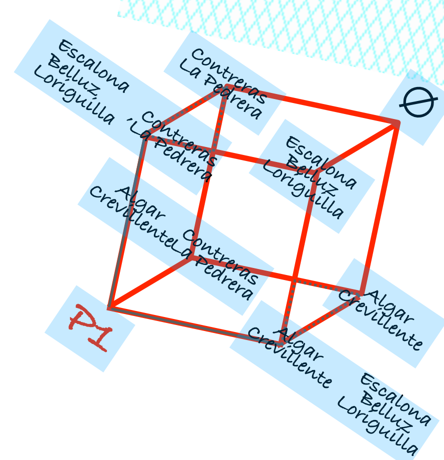
$Pr_W(W)=0$, $Pr_W(W^c)=1$, $(A\subseteq B)\Rightarrow(Pr_W(A)\leq Pr_W(B))$,

$Pr_W(A\sqcup^W B)=Pr_W(A)+Pr_W(B)-Pr_W(A\sqcap^W B)$.

O extensiones de las probabilidades condicionadas:

$Pr_W^*(A/B)=Pr_W(A\sqcap^W B)/Pr_W(A)$, etc...

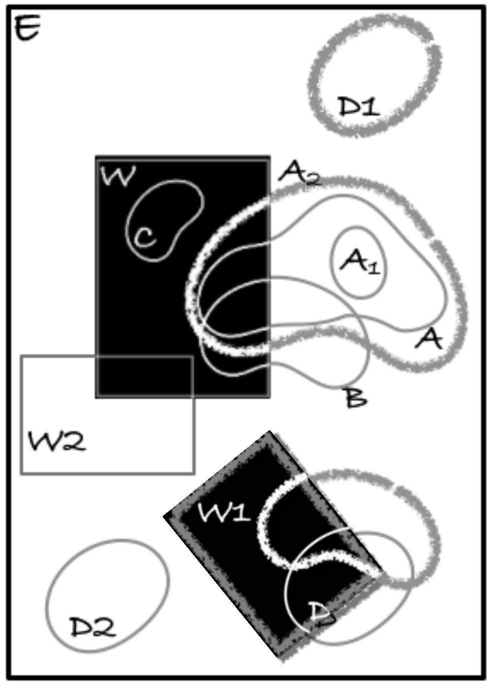




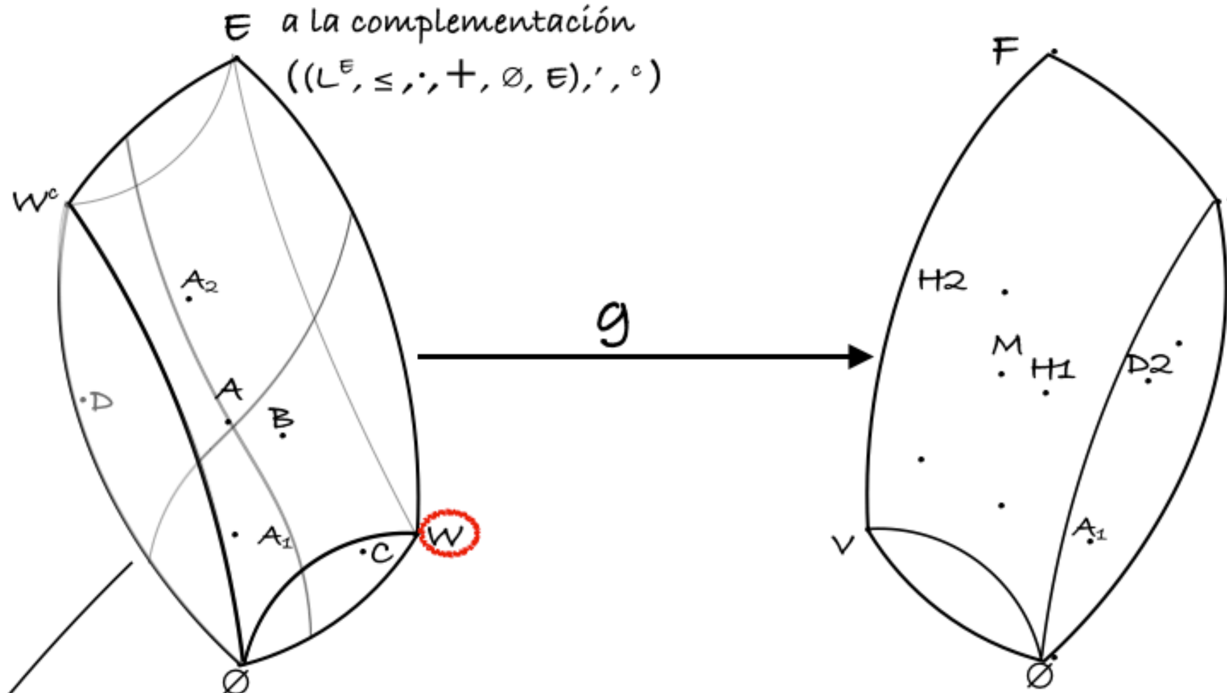
Cuestiones abiertas

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos

$\emptyset \leq E,\ A \leq E,\ B \leq E, \ldots,\ E \leq E$

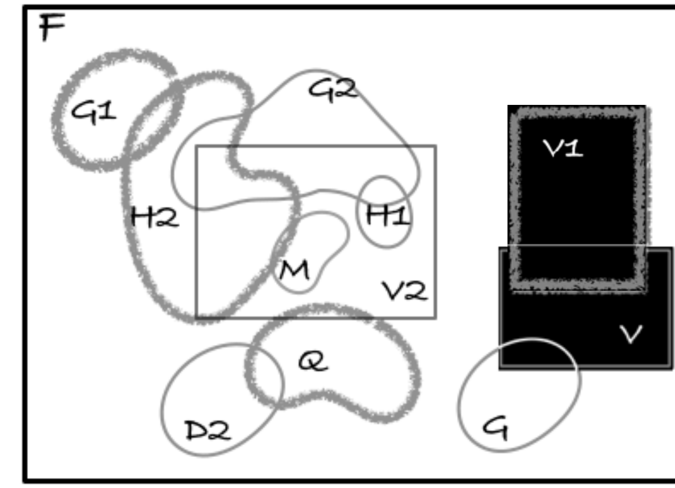


Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$



$\varphi_W(S) = S \Delta W$

$\varphi_V(K) = K \Delta V$



Coherencia:
si

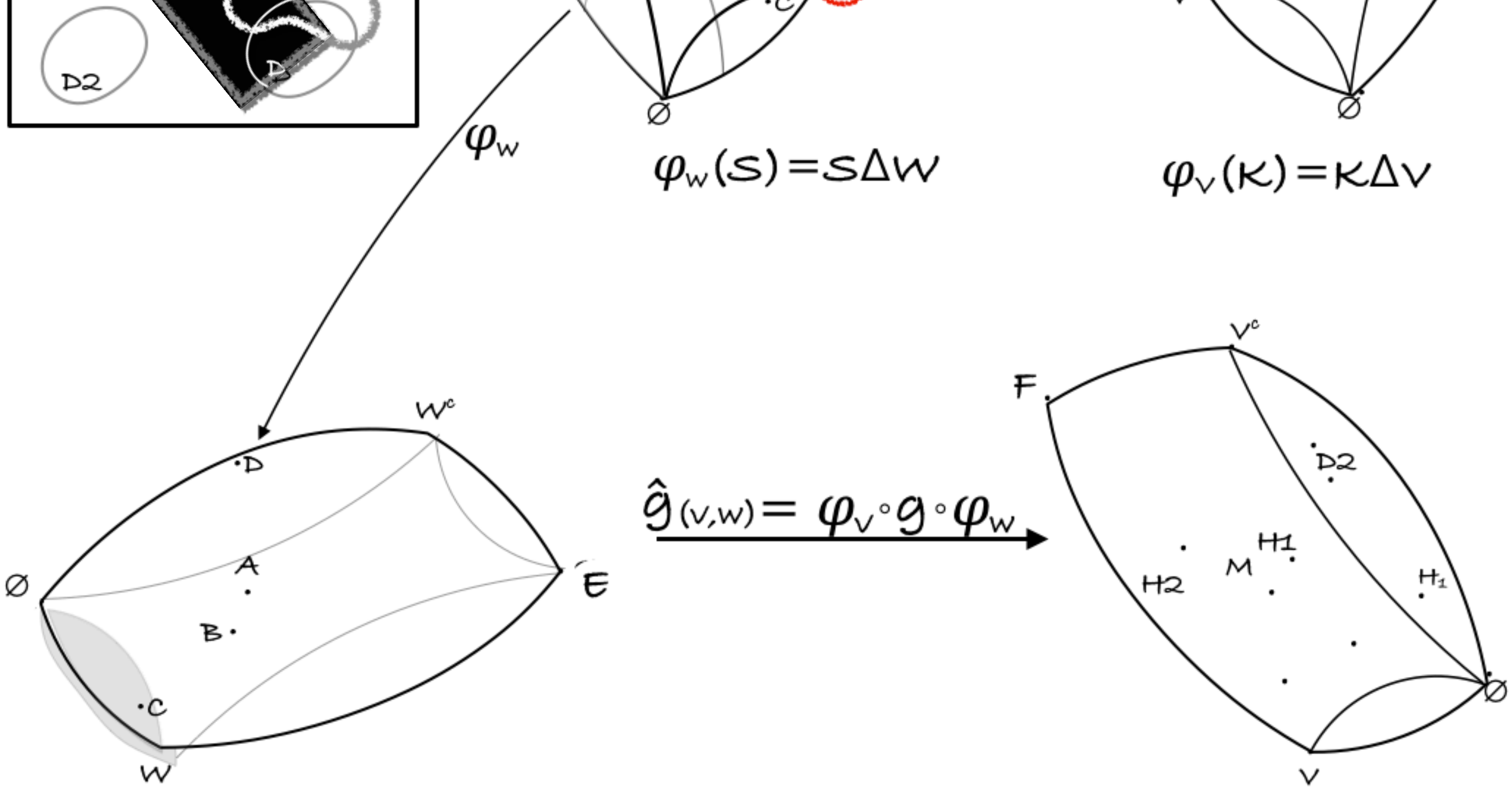
$$g\Big(\bigcup_{j \in J} A_j\Big) = \bigcup_{j \in J} g(A_j),\quad \forall (A_j)_{j \in J},$$

$$(A \subseteq B) \Rightarrow (g(A) \subseteq g(B)),\ \text{etc...}$$

Entonces también

$$\underline{\hat{g}_{(V,W)}}\Big(\bigsqcup_{j \in J}^{W} A_j\Big) = \bigsqcup_{j \in J}^{V} \underline{\hat{g}_{(V,W)}}(A_j),\quad \forall (A_j)_{j \in J},$$

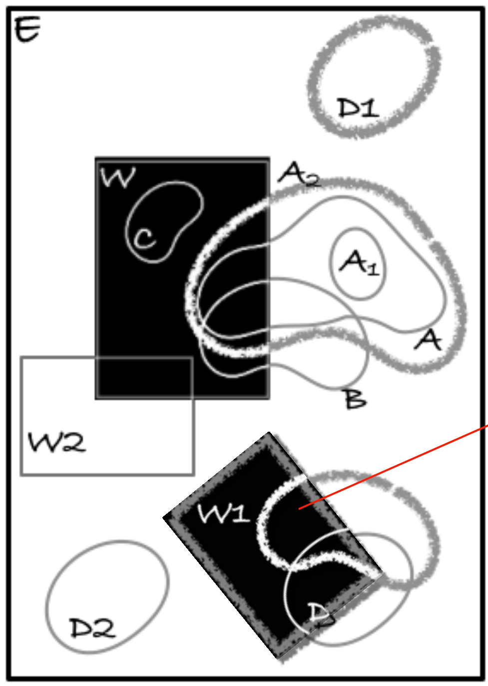
$$(A \sqsubseteq^W B) \Rightarrow (\underline{\hat{g}_{(V,W)}}(A) \sqsubseteq^V \underline{\hat{g}_{(V,W)}}(B)),\ \text{etc...}$$



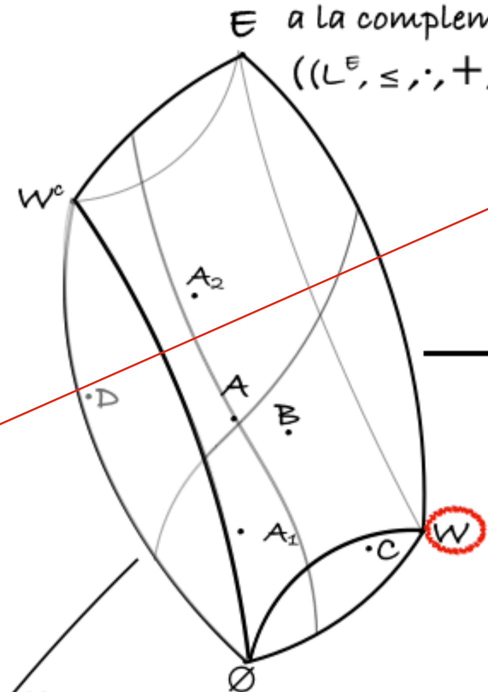
$\hat{g}_{(V,W)} = \varphi_V \circ g \circ \varphi_W$

Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $\boxed{A \longrightarrow \varphi_W(A) = A \Delta W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)}$

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos
$\emptyset \leq E,\ A \leq E,\ B \leq E, \ldots,\ E \leq E$

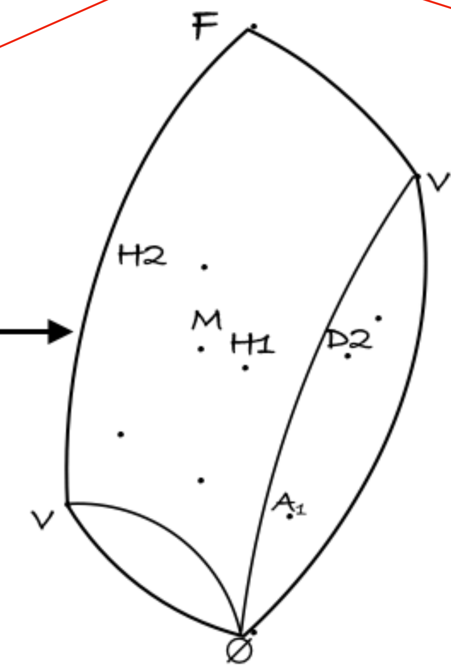


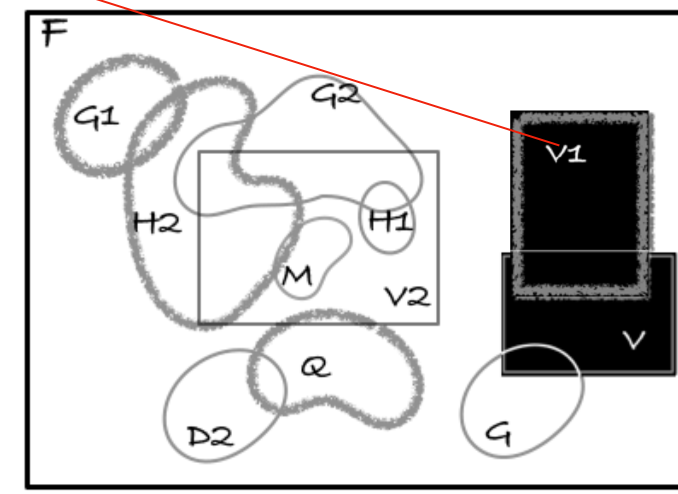
Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$



Si W1 y V1 son borrosos propios (no nítidos)

g





φ_W

$\varphi_W(S) = S \Delta W$

$\varphi_V(K) = K \Delta V$

Coherencia:
si

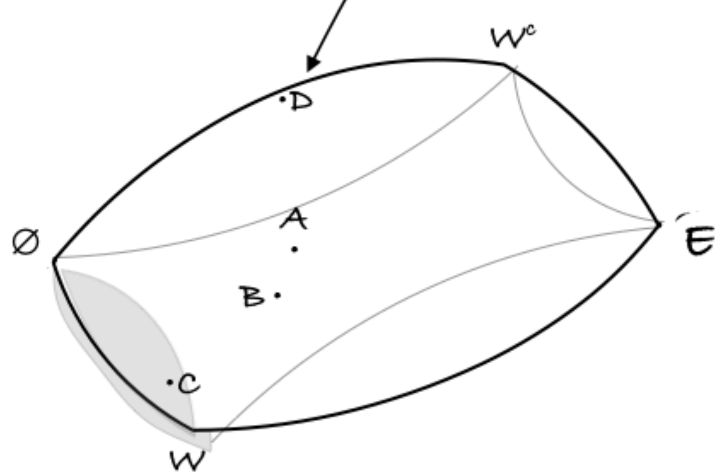
$$g\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right) = \bigcup_{j \in J} g(A_j),\ \forall (A_j)_{j \in J},$$

$$(A \subseteq B) \Rightarrow (g(A) \subseteq g(B)),\ \text{etc...}$$

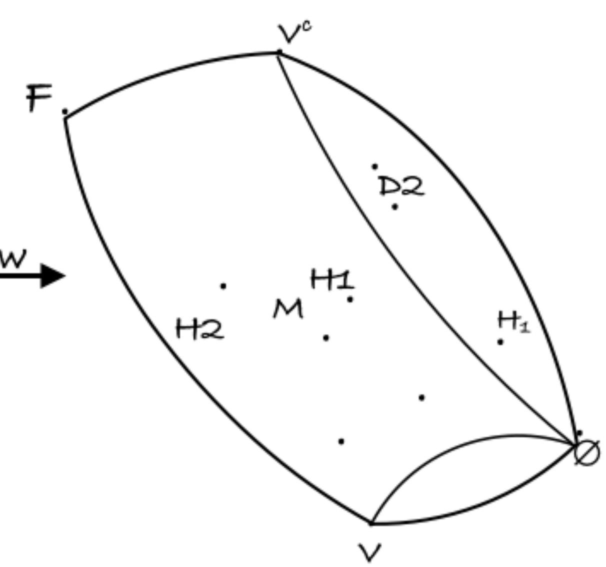
Entonces también

$$\underline{\hat{g}_{(V,W)}}\left(\bigsqcup_{j \in J}^{W} A_j\right) = \bigsqcup_{j \in J}^{V} \underline{\hat{g}_{(V,W)}}(A_j),\ \forall (A_j)_{j \in J},$$

$$(A \sqsubseteq^W B) \Rightarrow (\underline{\hat{g}_{(V,W)}}(A) \sqsubseteq^V \underline{\hat{g}_{(V,W)}}(B)),\ \text{etc...}$$



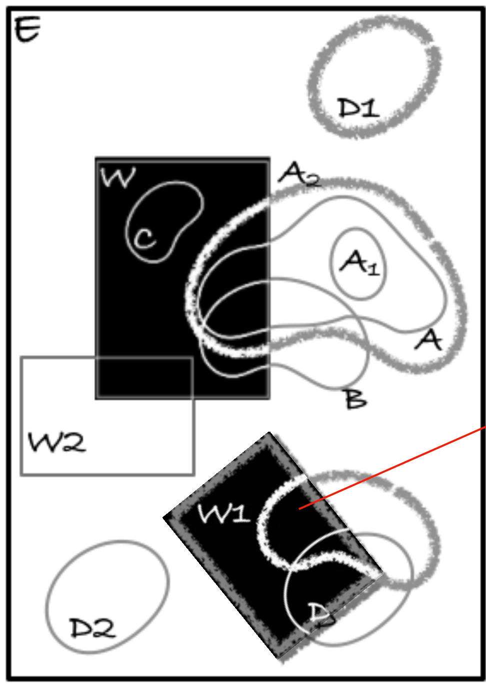
$\hat{g}_{(V,W)} = \varphi_V \circ g \circ \varphi_W$



Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $\boxed{A \longrightarrow \varphi_W(A) = A \Delta W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)}$

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos

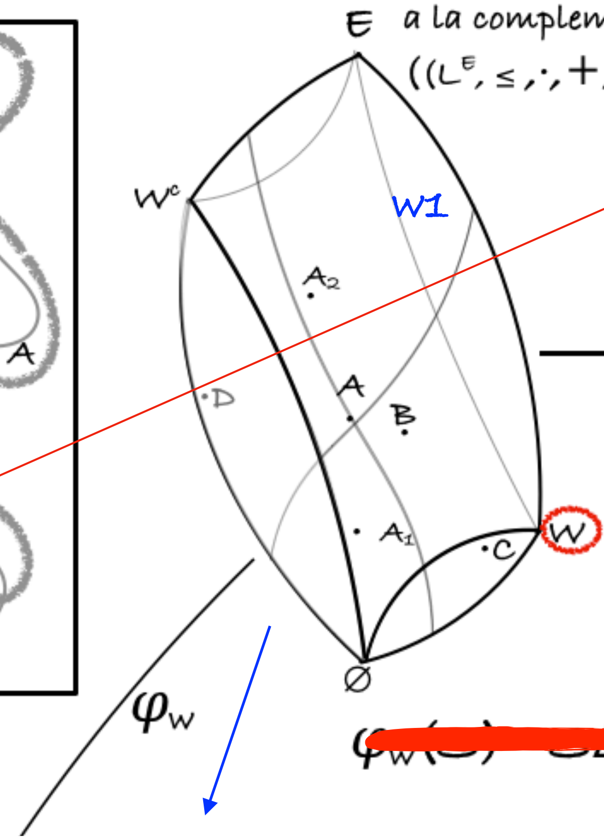
$\emptyset \leq E,\ A \leq E,\ B \leq E, \ldots,\ E \leq E$



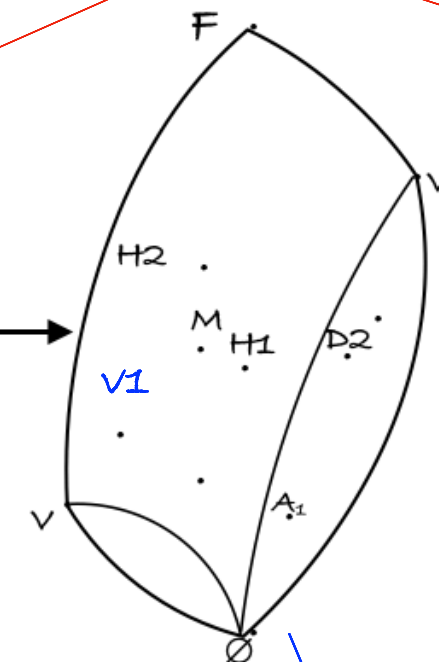
Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación

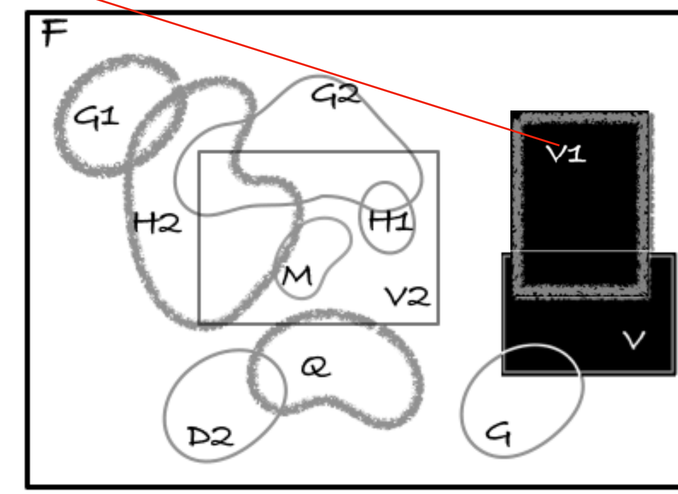
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$

Si W1 y V1 son borrosos propios (no nítidos)



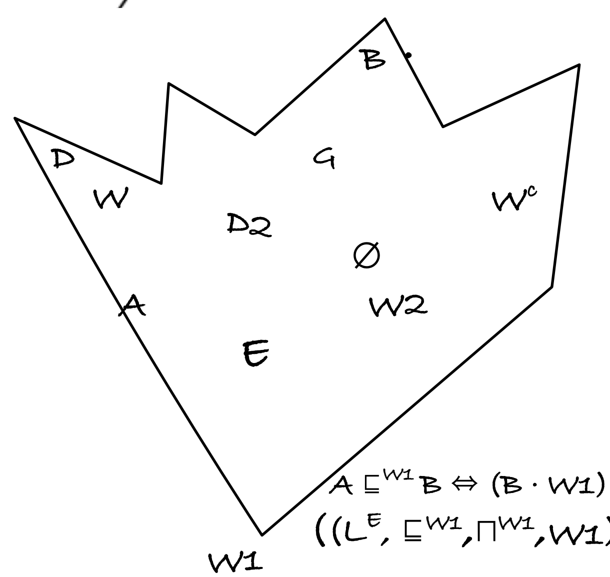
g





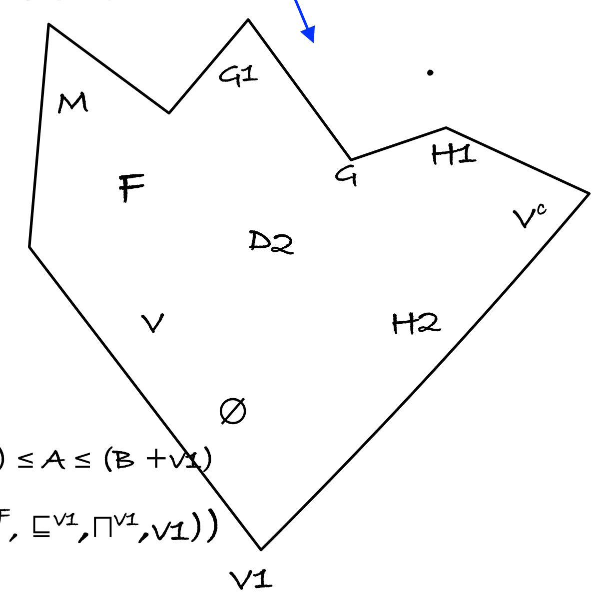
Entonces...

~~$\varphi_W(C) = C\Delta W$~~ ~~$\varphi_V(C)$~~



$A \sqsubseteq^{W1} B \Leftrightarrow (B \cdot W1) \leq A \leq (B + W1)$,

$((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1))$



$A \sqsubseteq^{V1} B \Leftrightarrow (B \cdot V1) \leq A \leq (B + V1)$

$((L^F, \sqsubseteq^{V1}, \sqcap^{V1}, V1))$

Coherencia:

si

$g(\bigcup_{j\in J} A_j) = \bigcup_{j\in J} g(A_j),\ \forall (A_j)_{j\in J}$,

$(A \subseteq B) \Rightarrow (g(A) \subseteq g(B))$, etc...

Entonces también

$\underline{\hat{g}_{(V,W)}}(\bigsqcup_{j\in J}^{W} A_j) = \bigsqcup_{j\in J}^{V} \underline{\hat{g}_{(V,W)}}(A_j),\ \forall (A_j)_{j\in J}$,

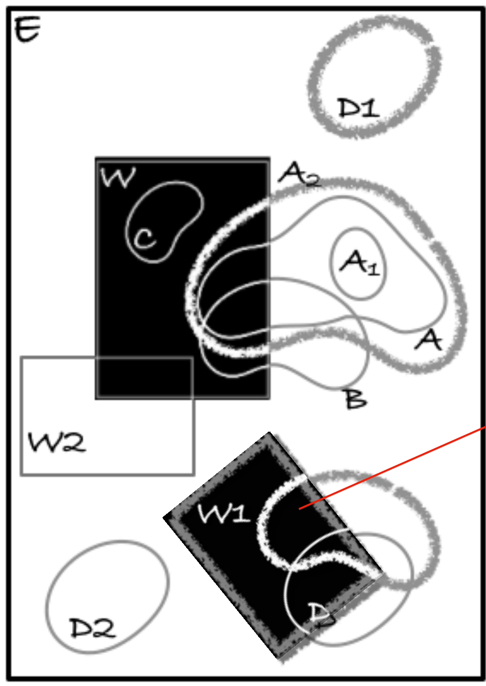
$(A \sqsubseteq^{W} B) \Rightarrow (\underline{\hat{g}_{(V,W)}}(A) \sqsubseteq^{V} \underline{\hat{g}_{(V,W)}}(B))$, etc...

~~Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $A \to \varphi_W(A) = A\Delta W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)$~~

Sistemas algebraicos $((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1))$ y $((L^F, \sqsubseteq^{V1}, \sqcap^{V1}, V1))$, que son inf-semiretículos.

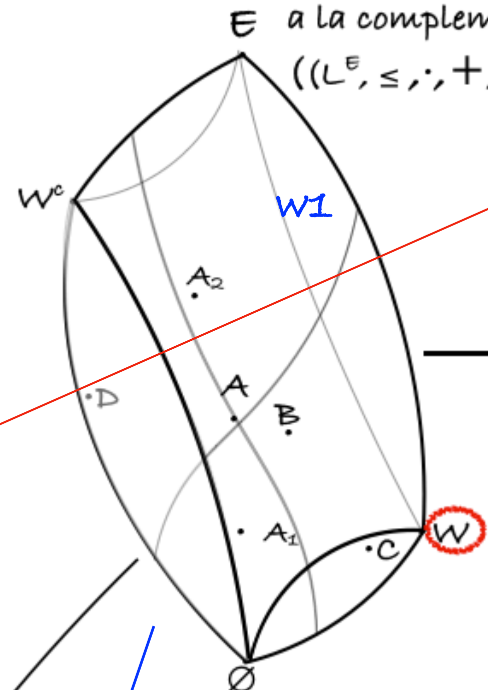
Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos

$\emptyset \leq E,\ A \leq E,\ B \leq E, \ldots,\ E \leq E$

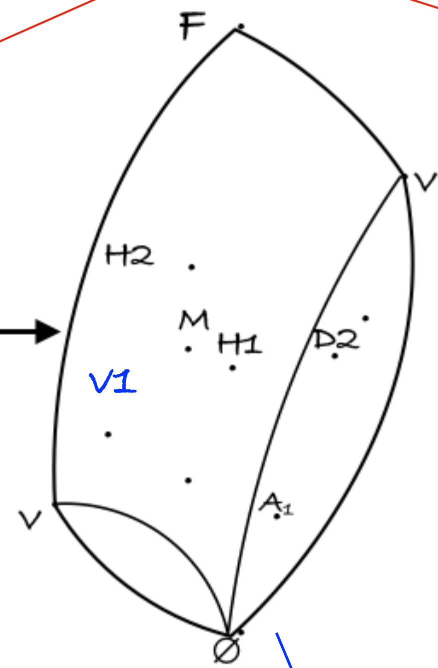


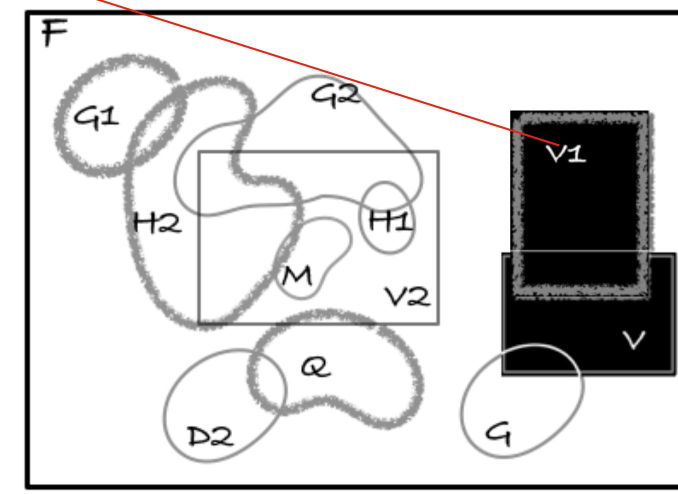
Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$

Si W1 y V1 son borrosos propios (no nítidos)



g



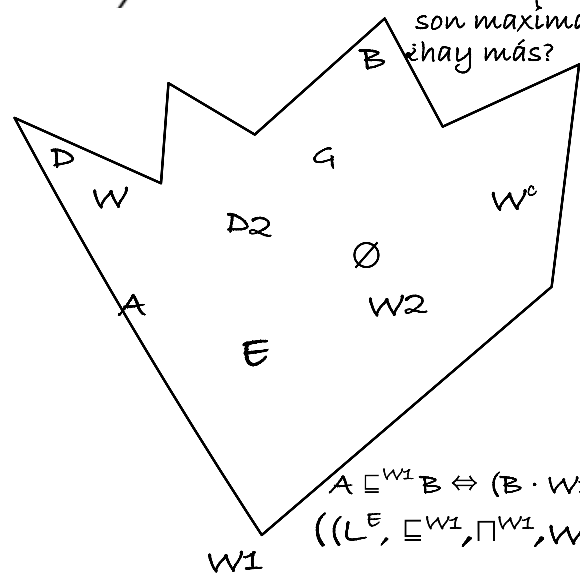


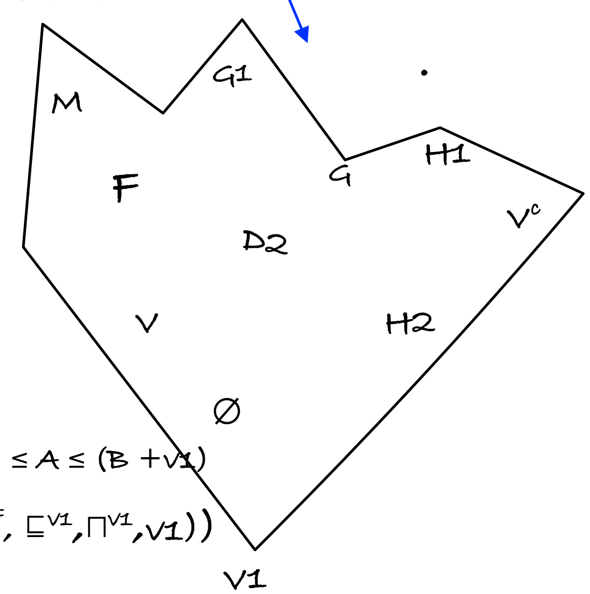
φ_W

$\varphi_W(S) = S\Delta W$

Los elementos z tales que $z = w1 \rightarrow q = q - w1$ para algún q, son maximales, pero ¿hay más? ?

$\varphi_V(K) = \ldots$





$A \sqsubseteq^{V1} B \Leftrightarrow (B \cdot V1) \leq A \leq (B + V1)$

$((L^F, \sqsubseteq^{V1}, \sqcap^{V1}, V1))$

$A \sqsubseteq^{W1} B \Leftrightarrow (B \cdot W1) \leq A \leq (B + W1)$,

$((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1))$

Coherencia:

si

$g(\bigcup_{j\in J} A_j) = \bigcup_{j\in J} g(A_j),\ \forall (A_j)_{j\in J},$

$(A \subseteq B) \Rightarrow (g(A) \subseteq g(B))$, etc...

Entonces también

$\underline{\hat{g}_{(v,w)}}(\bigsqcup_{j\in J}^{W} A_j) = \bigsqcup_{j\in J}^{V} \underline{\hat{g}_{(v,w)}}(A_j),\ \forall (A_j)_{j\in J},$

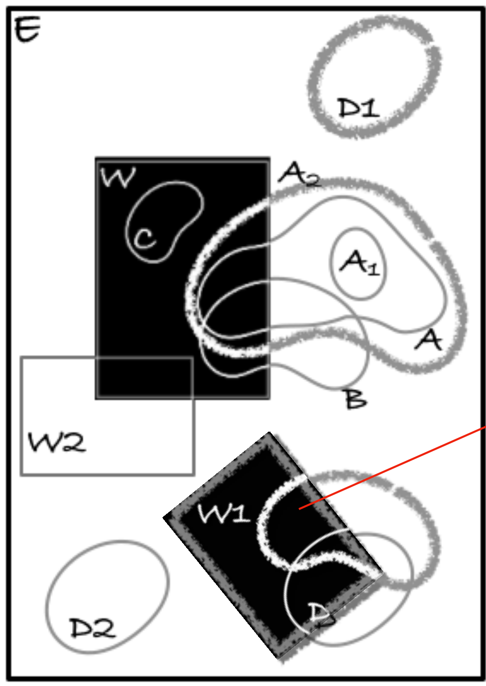
$(A \sqsubseteq^W B) \Rightarrow (\underline{\hat{g}_{(v,w)}}(A) \sqsubseteq^V \underline{\hat{g}_{(v,w)}}(B))$, etc...

~~Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo~~ ~~$A \rightarrow \varphi_W(A) = A\Delta W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)$~~

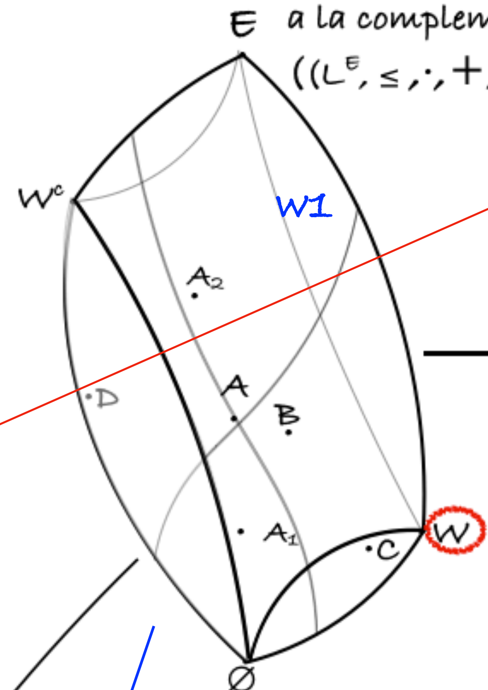
Sistemas algebraicos $((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1))$ y $((L^F, \sqsubseteq^{V1}, \sqcap^{V1}, V1))$, que son inf-semiretículos.

Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos

$\emptyset \leq E,\ A \leq E,\ B \leq E, \ldots,\ E \leq E$

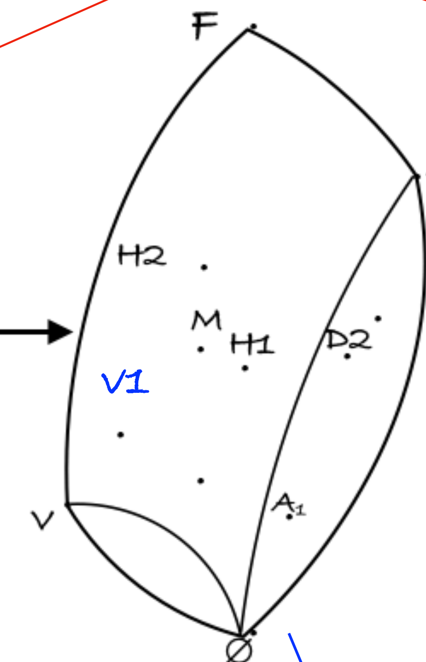


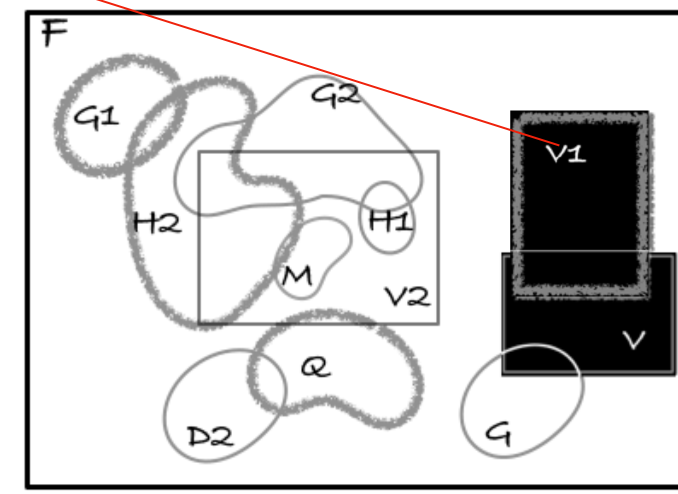
Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \leq, \cdot, +, \emptyset, E), ', °)$



Si W1 y V1 son borrosos propios (no nítidos)

g





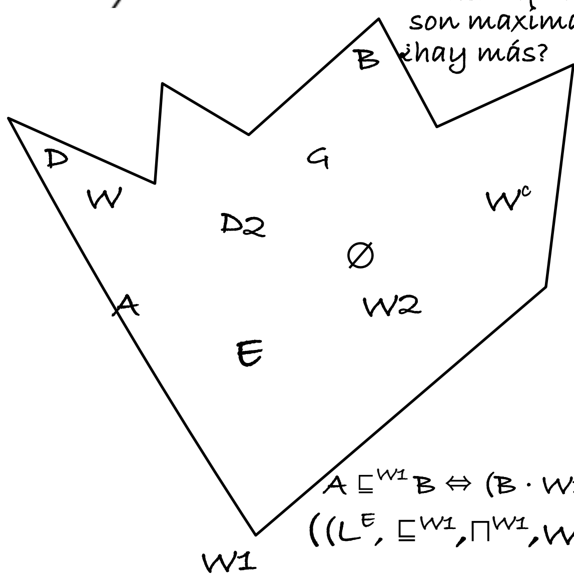
φ_W

$\varphi_W(S) = S\Delta W$

$\varphi_V(K) = \mathsf{I}$

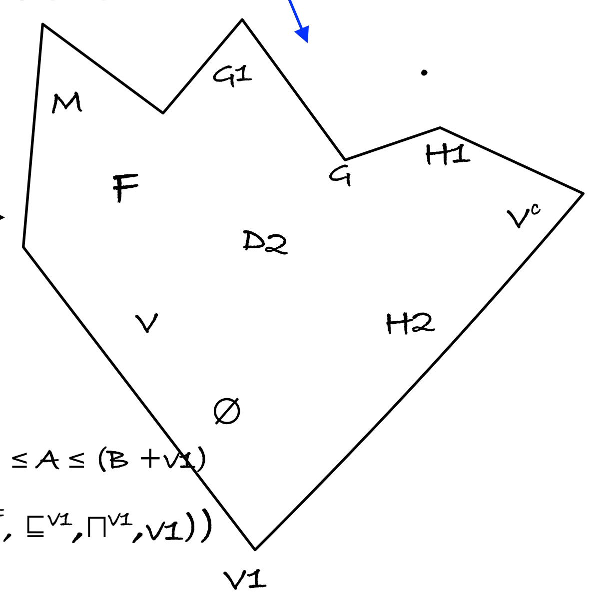
Los elementos z tales que z=w1→q=q–w1 para algún q, son maximales, pero ¿hay más?

? ?



$\hat{g}_{(V,W)}$

¿Hay ahora extensiones coherentes de otras g?



$A \sqsubseteq^{W1} B \Leftrightarrow (B \cdot W1) \leq A \leq (B + W1)$,

$((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1))$

$A \sqsubseteq^{V1} B \Leftrightarrow (B \cdot V1) \leq A \leq (B + V1)$

$((L^F, \sqsubseteq^{V1}, \sqcap^{V1}, V1))$

Coherencia:

si

$g(\cup A_j) = \cup g(A_j),\ \forall (A_j)_{j\in J},$

$(A \subseteq B) \Rightarrow (g(A) \subseteq g(B))$, etc...

Entonces también

?

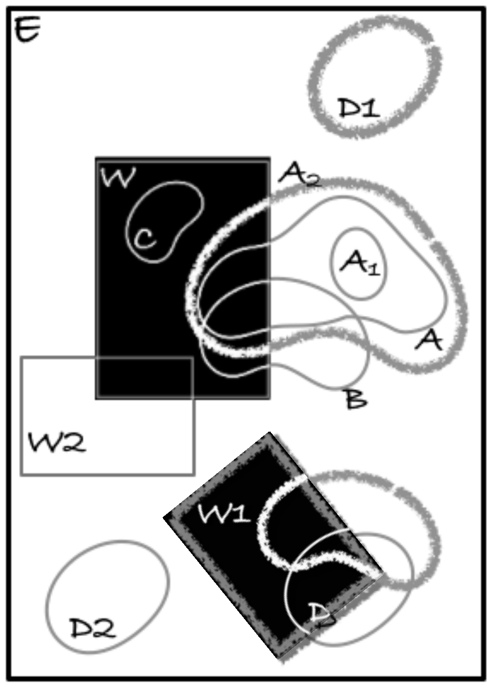
$\underline{\hat{g}_{(V,W)}}(\bigsqcup^W_{j\in J} A_j) = \bigsqcup^V_{j\in J} \underline{\hat{g}_{(V,W)}}(A_j),\ \forall (A_j)_{j\in J},$

$(A \sqsubseteq^W B) \Rightarrow (\underline{\hat{g}_{(V,W)}}(A) \sqsubseteq^V \underline{\hat{g}_{(V,W)}}(B))$, etc...

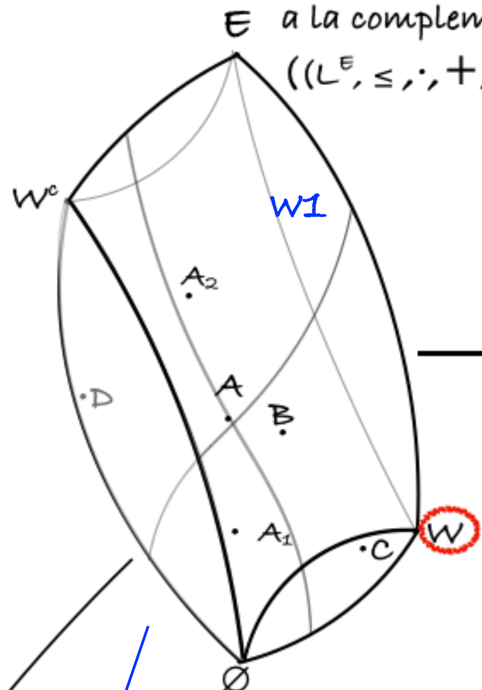
[redacted]

Sistemas algebraicos $((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1))$ y $((L^F, \sqsubseteq^{V1}, \sqcap^{V1}, V1))$, que son inf-semiretículos.

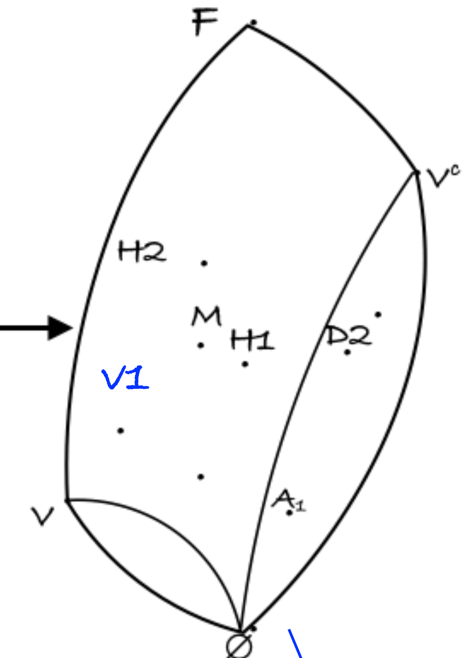
Referencial E y subconjuntos nítidos y borrosos
$\emptyset \le E,\ A \le E,\ B \le E, \ldots,\ E \le E$

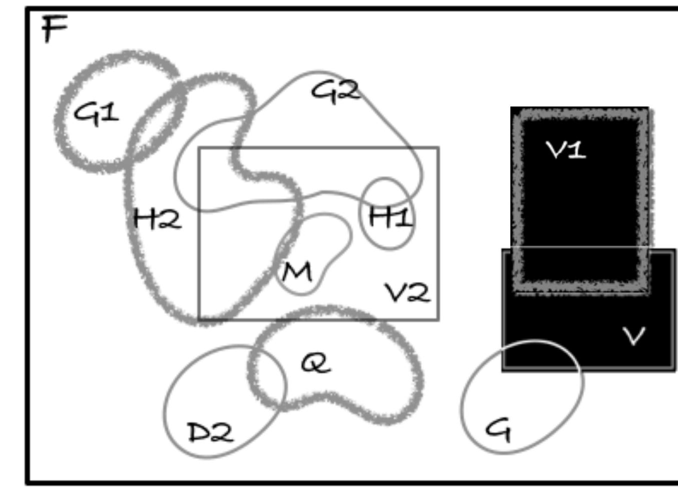


Sistema algebraico:
Retículo distributivo con negación fuerte que contiene a la complementación
$((L^E, \le, \cdot, +, \emptyset, E), ', ^c)$



g





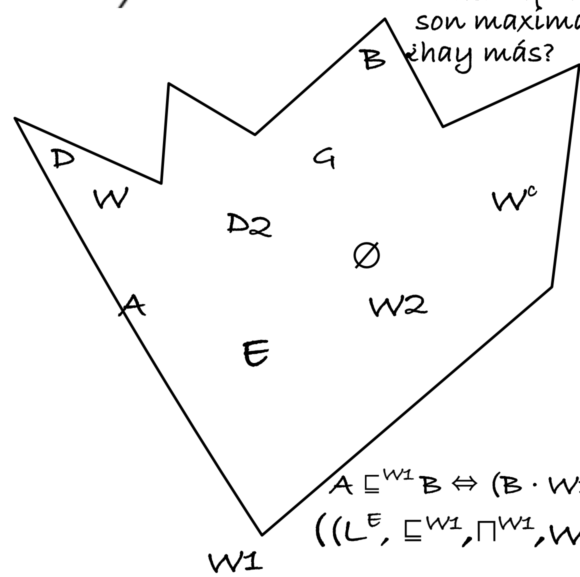
$\varphi_W(S) = S \Delta W$

Los elementos z tales que z=w1→q=q−w1 para algún q, son maximales, pero ¿hay más?

?

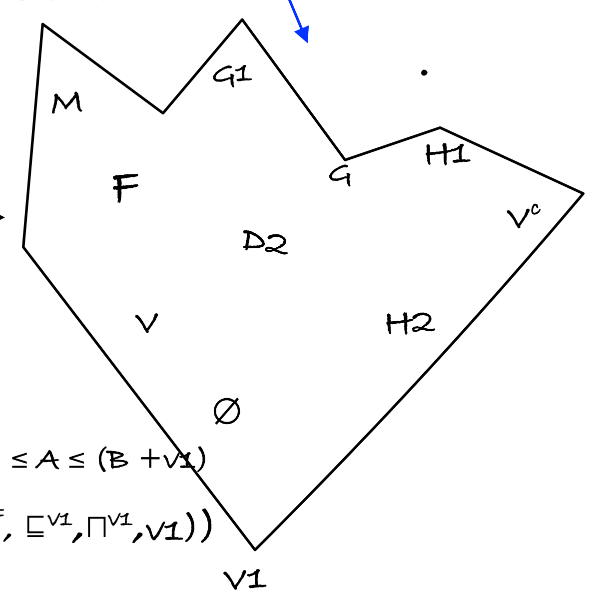
?

$\varphi_V(K) =$



$\hat{g}_{(V,W)}$

¿Hay ahora extensiones coherentes de otras g?



$A \sqsubseteq^{W1} B \Leftrightarrow (B \cdot W1) \le A \le (B + W1)$,
$((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1))$

$A \sqsubseteq^{V1} B \Leftrightarrow (B \cdot V1) \le A \le (B + V1)$
$((L^F, \sqsubseteq^{V1}, \sqcap^{V1}, V1))$

Coherencia:

sí

$g(\cup A_j) = \cup g(A_j),\ \forall (A_j)_{j \in J},$

$(A \subseteq B) \Rightarrow (g(A) \subseteq g(B))$, etc…

?

Entonces también

$\hat{g}_{(V,W)}(\bigsqcup^W_{j \in J} A_j) = \bigsqcup^V_{j \in J} \hat{g}_{(V,W)}(A_j),\ \forall (A_j)_{j \in J},$

$(A \sqsubseteq^W B) \Rightarrow (\hat{g}_{(V,W)}(A) \sqsubseteq^V \hat{g}_{(V,W)}(B))$, etc…

~~Sistema algebraico $((L^E, \sqsubseteq^W, \sqcap^W, \sqcup^W, W, W^c), ', ^c)$ isomorfo al inicial con el isomorfismo $A \to \varphi_W(A) = A \Delta W = (A' \cdot W) + (A \cdot W^c)$~~

Sistemas algebraicos $((L^E, \sqsubseteq^{W1}, \sqcap^{W1}, W1))$ y $((L^F, \sqsubseteq^{V1}, \sqcap^{V1}, V1))$, que son inf-semiretículos.

Por otra parte, y en el caso de Espacios Topológicos $(E,\Im_E)$, $(F,\Im_F)$;

¿Qué ocurre con las extensiones

$$\hat{g}^{-1}{}_{(W,V)} : (P(F), \sqsubseteq^W) \rightarrow (P(E), \sqsubseteq^V)$$

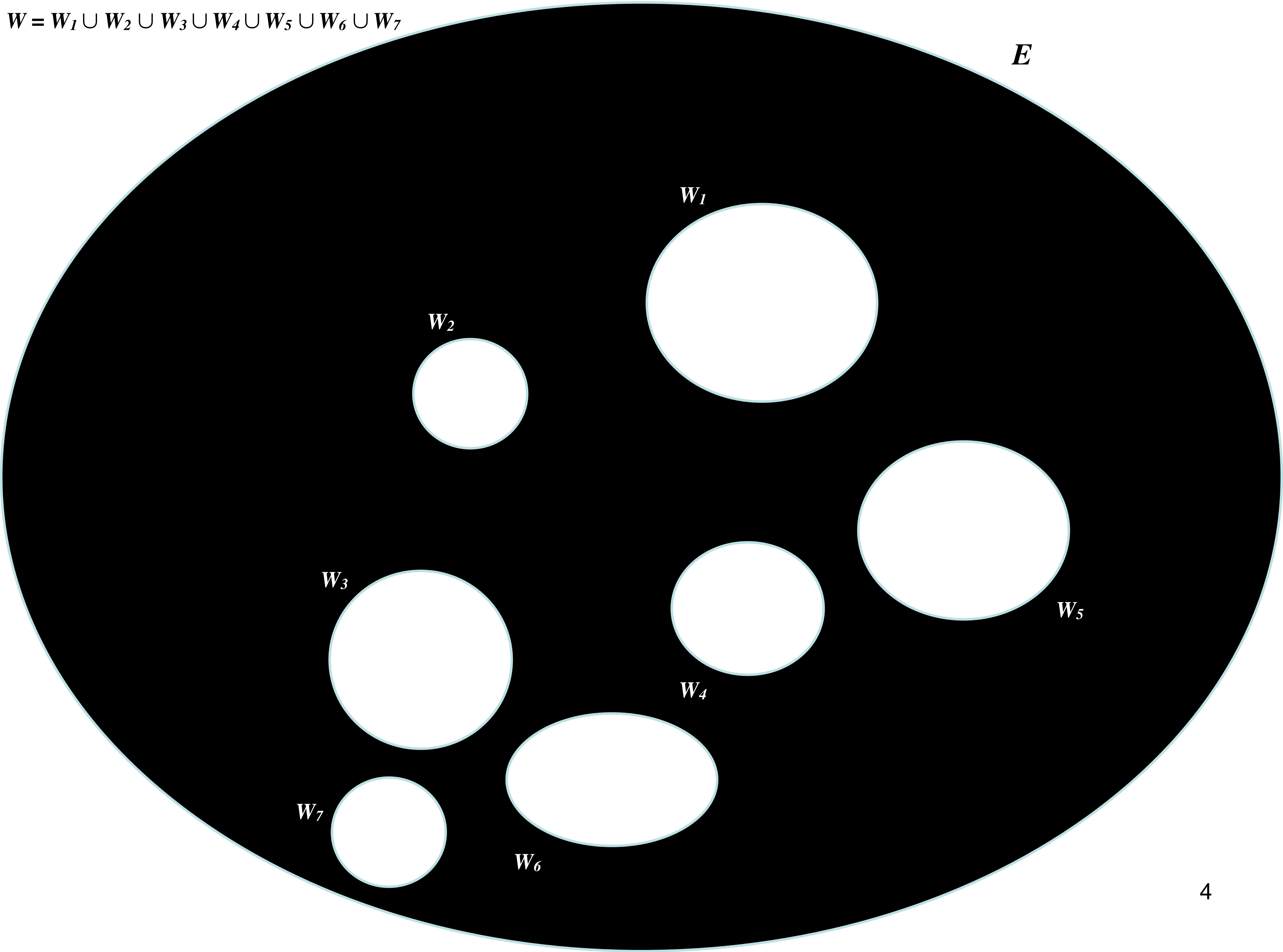
de las funciones conjunto:

$$g^{-1}: (P(F), \subseteq) \rightarrow (P(E), \subseteq) \text{ tales que } g^{-1}:(A) \in \Im_E \ \forall A \in \Im_F$$

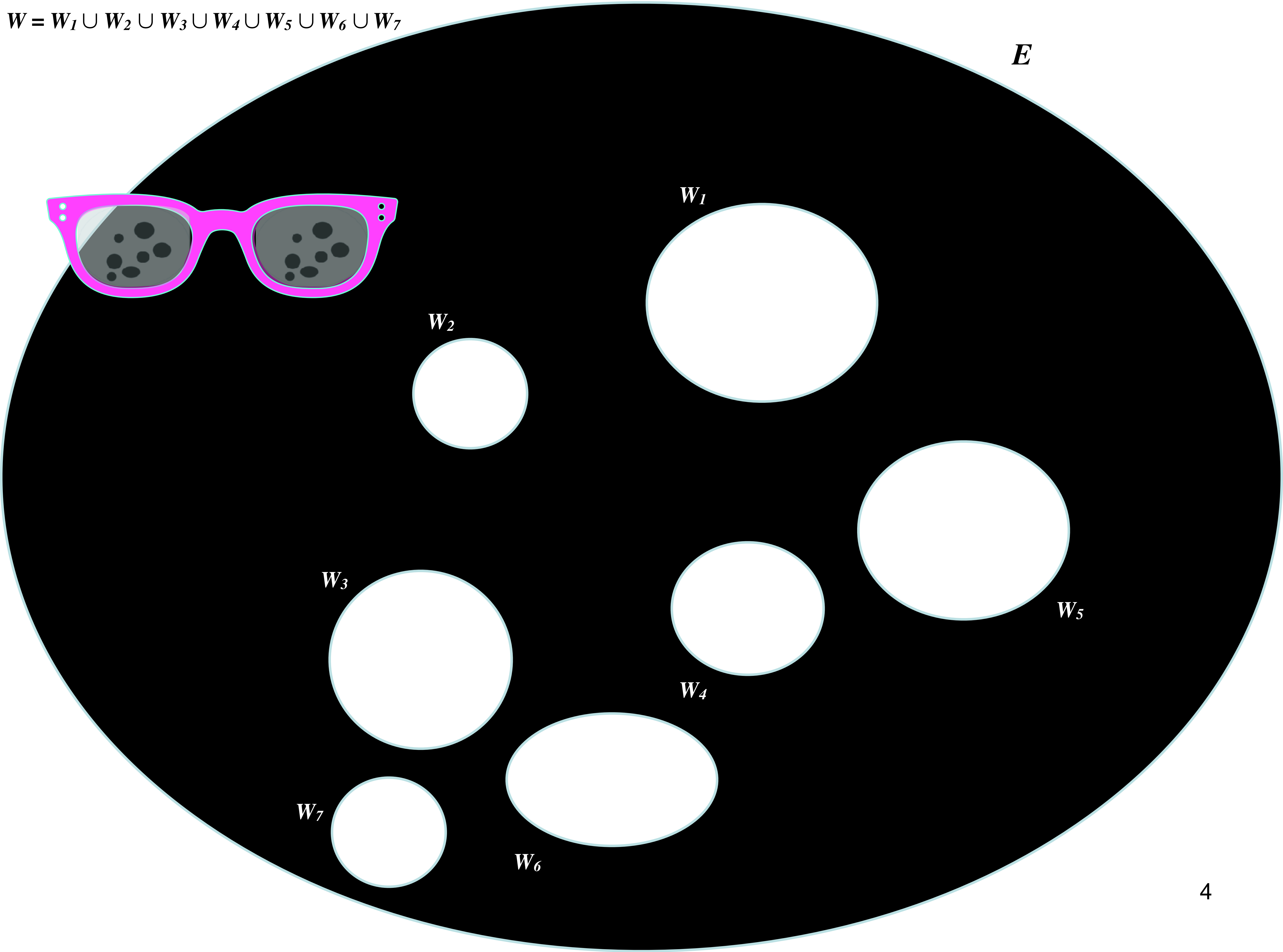
y que caracterizan a las funciones continuas

$$g: (E,\Im_E) \rightarrow (F,\Im_F), ?$$

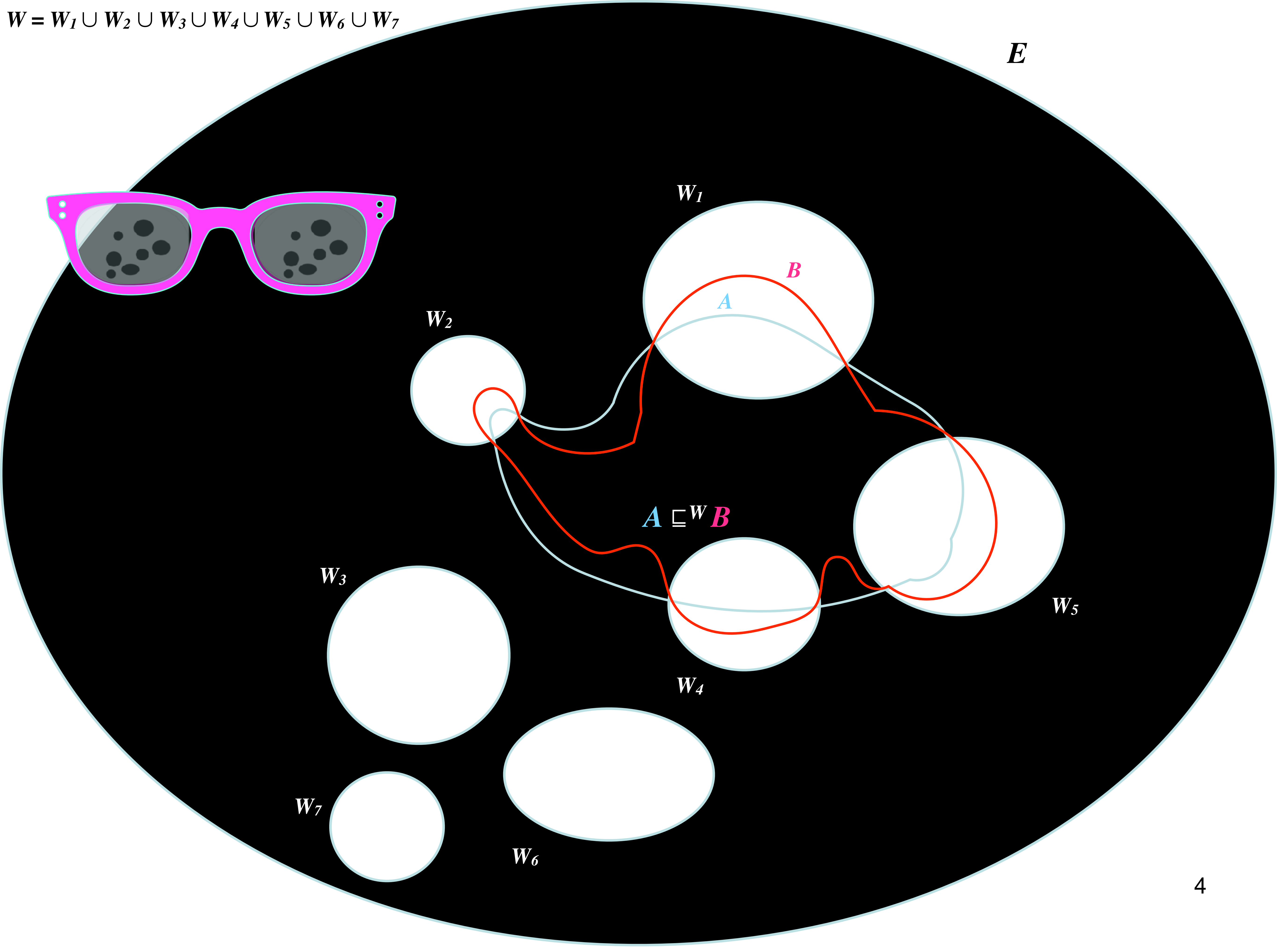
$W = W_1 \cup W_2 \cup W_3 \cup W_4 \cup W_5 \cup W_6 \cup W_7$



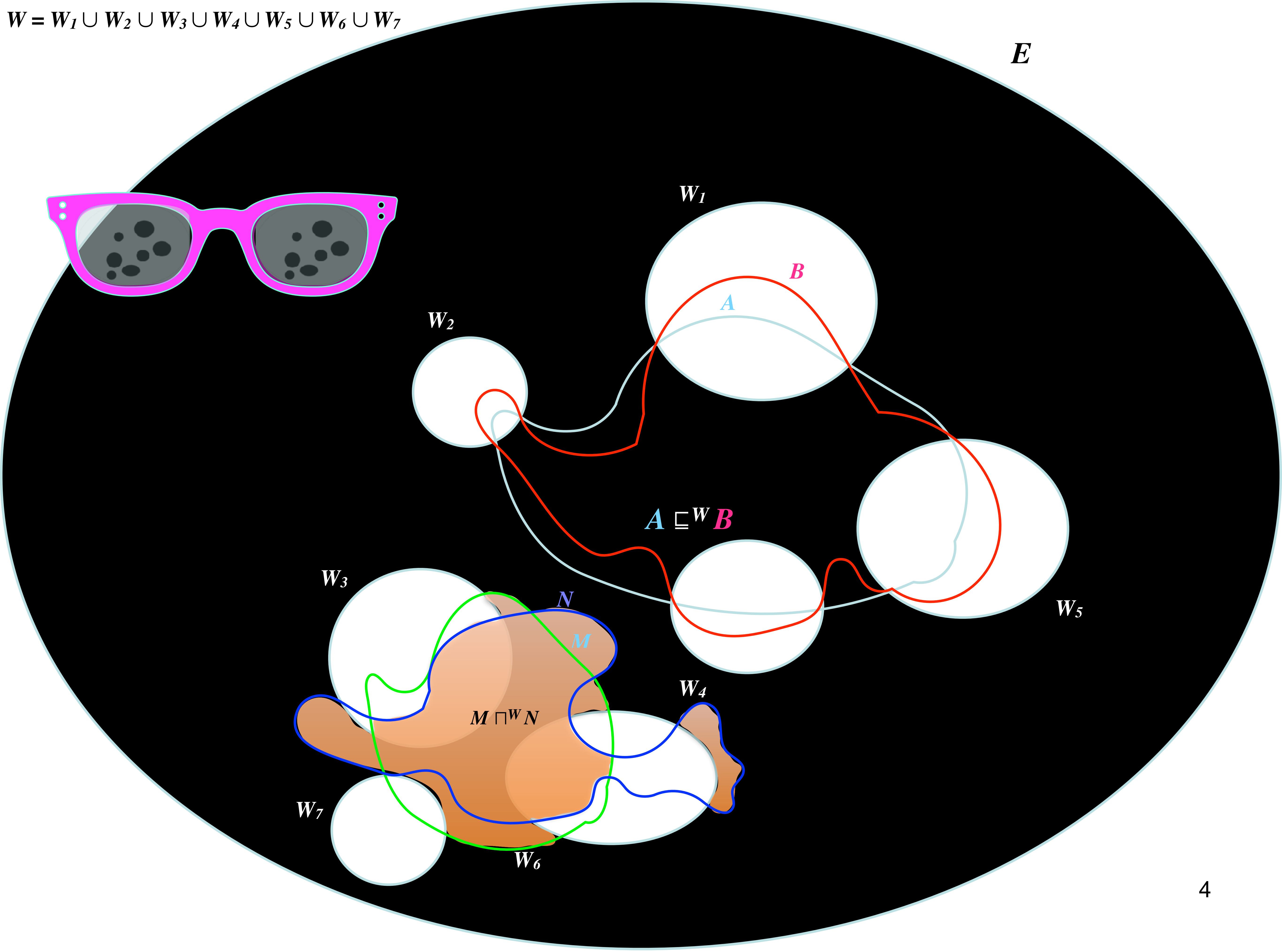
$W = W_1 \cup W_2 \cup W_3 \cup W_4 \cup W_5 \cup W_6 \cup W_7$



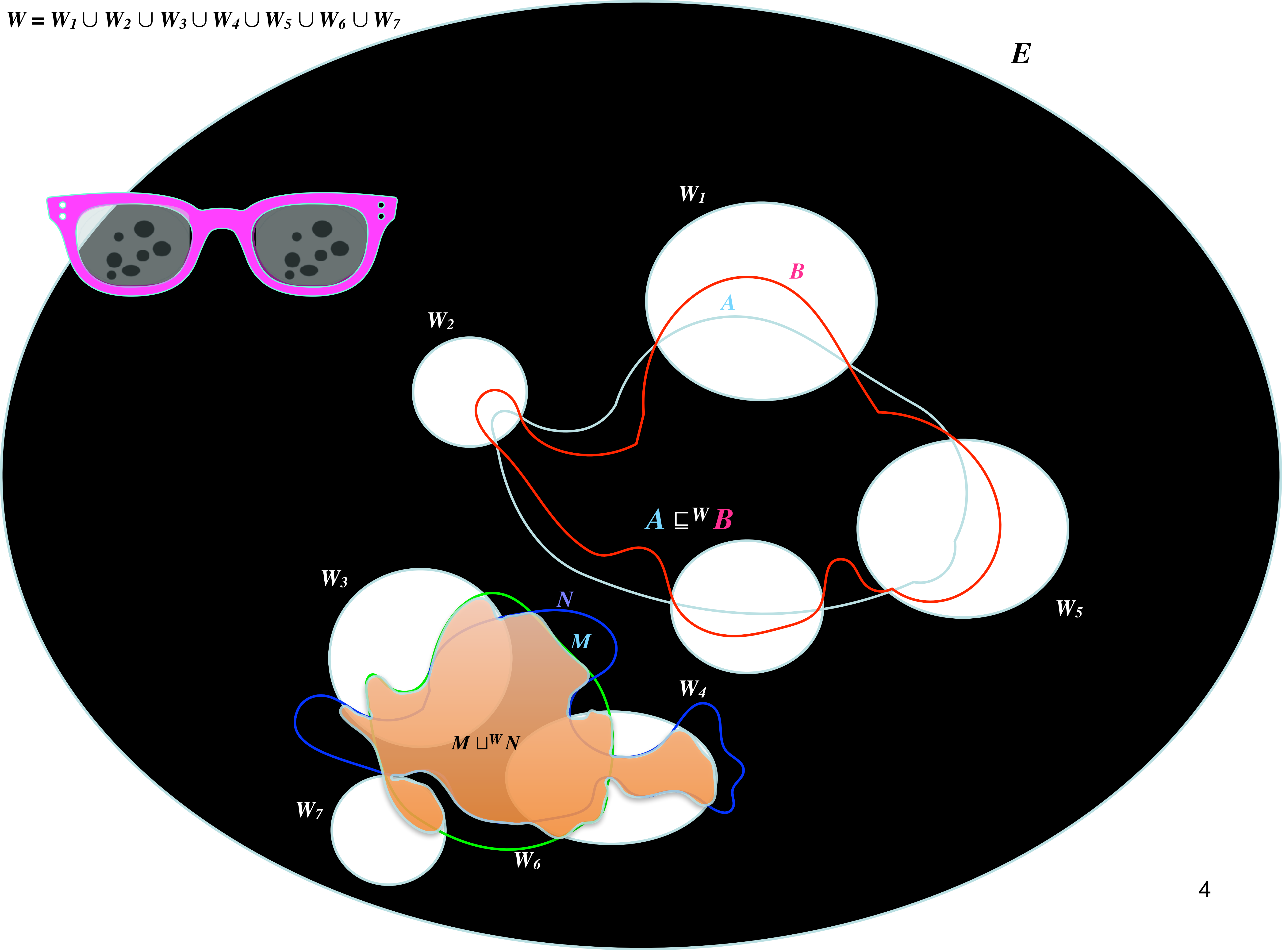
$W = W_1 \cup W_2 \cup W_3 \cup W_4 \cup W_5 \cup W_6 \cup W_7$



$W = W_1 \cup W_2 \cup W_3 \cup W_4 \cup W_5 \cup W_6 \cup W_7$



$W = W_1 \cup W_2 \cup W_3 \cup W_4 \cup W_5 \cup W_6 \cup W_7$



Gracias por su atención


E
B
A
Gracias por su atención
A ⊑^W B
N
M
M ⊔^W N

¿ ?

Vista de la Isla Plana o Nova Tabarca desde Santa Pola del Este (Alicante, Spain) .